Construction de l'espace-temps de Minkowski : Résumé des idées essentielles

Robert Bouzerar
Université de Picardie- Département de Physique
LPMC/ 33 Rue Saint-Leu
80039 Amiens

I- Définitions

- ***Notion d'évènement***

Un événement est un lieu (un point) de l'espace en lequel se produit quelque chose à un instant donné. La localisation spatio-temporelle de cet évènement, i.e. l'attribution de coordonnées spatiales et temporelles, par rapport à un observateur (muni d'une règle et d'une horloge : Référentiel) donné dépendra du mouvement de ce dernier.

L'ensemble des événements (univers physique) est un espace quadri-dimensionnel représenté par l'espace affine $\mathbb{R}^4$. C'est un espace-temps amorphe.

Un phénomène est un processus ou un ensemble de processus mettant en oeuvre un ensemble d'événements pouvant remplir tout un domaine de l'espace-temps.

II- Relativité. Référentiels inertiels. Transformations de Lorentz.

- ***Une approche de la relativité***

L'apparence que prennent les phénomènes pour un observateur dépend du mouvement de celui-ci (ceci peut définir un point de vue jeté sur la Nature). L'unité (la cohérence) supposée du monde physique requiert la possibilité d'une description physique de ces phénomènes qui soit indépendante du point de vue, i.e. de l'observateur : ceci peut définir l'objectivité physique d'une description. Cette définition sous-tend l'idée d'une réalité indépendante. Une description « universelle » i.e. identique pour tous les observateurs est la réalisation la plus poussée du principe de relativité : chaque observateur possède sa propre description des phénomènes, nécessaire pour réaliser et interpréter les mesures effectuées dans son propre référentiel et l'analyse de ces mesures toutes relatives qu'elles soient doivent leur révéler les éléments d'une réalité commune, indépendante, absolue.

La relativité établit donc un pont entre la réalité objective, absolue par nature et la nécessaire diversité des points de vue jetés sur celle-ci par des observateurs prisonniers de cette réalité. S'ils observent sous des perspectives différentes la même réalité fondamentale, il semble raisonnable d'imposer l'équivalence des points de vue, laquelle équivalence requiert la possibilité de comparer leurs mesures. Cette équivalence ne concerne pas tous les référentiels : la mécanique de Newton avait déjà conduit à privilégier la classe des observateurs inertiels qui se distinguait nettement des référentiels accélérés (siège de forces d'inertie). Ce principe de relativité restreinte assure ainsi l'équivalence des observateurs inertiels[1]. Il garantit la correspondance entre grandeurs mesurées dans des référentiels différents (les grandeurs mesurées variant d'un observateur à l'autre, l'apparence des phénomènes afférents change aussi). La Physique ne retient que les lois de transformations

---
[1] *Un référentiel inertiel est un référentiel dans lequel le principe de l'inertie est vérifié.*

des localisations spatiotemporelles des évènements, celles des grandeurs physiques[2] s'en déduisant en fonction de la forme des lois dans lesquelles elles sont engagées.

- ***Transformations de Lorentz***

Les formules de Lorentz donnent ces lois de transformations des coordonnées des événements lors d'un changement de référentiel inertiel. Elles se déduisent du principe de relativité restreinte comptant deux volets :

1^er^ postulat : Il existe une formulation de l'ensemble des lois physiques qui soit la même dans tous les référentiels d'inertie.

2^ème^ postulat : La vitesse de la lumière dans le vide a la même valeur dans toutes les directions de l'espace quelque soit le référentiel d'inertie dans lequel elle est mesurée.

Le premier postulat n'est que l'extension à l'ensemble des lois physiques du principe de relativité galiléenne primitivement réservé aux seules lois de la mécanique. Le second postulat traduit une observation expérimentale fondamentale, initialement relevée par Michelson et Morley. Ces formules prennent leur forme la plus simple dans le cas des boosts de Lorentz pour lesquels les deux observateurs inertiels en jeu se déplacent le long d'une même direction de l'espace (axe Ox commun par exemple) , l'observateur O' ayant une vitesse V par rapport à l'observateur O :

$$\left\|\begin{array}{l} x' = \Gamma(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \Gamma(t - \dfrac{V}{c^2}x) \end{array}\right. , \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{c^2}}}$$

Les principales conséquences de ces formules sont les suivantes :

- Le passage de O' à O se fait en inversant le signe de la vitesse dans les mêmes formules : c'est le principe de réciprocité, indispensable pour assurer l'équivalence des observateurs.
- A la limite $c \to \infty$, on retrouve les fameuses formules de Galilée, plus simples. Ceci montre aussi que l'approximation galiléenne des formules de Lorentz est largement suffisante lorsque $V \ll c$. Cette circonstance est bien celle réalisée dans le monde de tous les jours, expliquant pourquoi l'univers de Galilée-Newton est pertinent. Notre conscience sensible des phénomènes s'exerce dans un tel monde et nous livre une intuition du monde environnant conforme à la vision absolutiste de Galilée et Newton. Ce monde est bien celui du sens commun : les écarts à cette vision sont hors de portée de notre conscience.
- Les conséquences les plus fondamentales concernent la mesure des longueurs et des durées par les divers observateurs :

    - L'observateur en mouvement observant un objet extérieur (entre les mains de l'autre observateur par exemple) le verra contracté dans la

---

[2] Attention : On pourrait tout aussi bien spécifier les lois de transformations des grandeurs physiques sans référence aux évènements.

direction de son mouvement. Si l'objet étendu le long de l'axe *Ox* a une longueur propre L_0, elle sera pour l'observateur en mouvement $L' = L_0\sqrt{1-V^2/c^2}$. Si l'objet passe entre les mains de *O'* et observé par *O*, il le verra contracté dans les mêmes proportions. Ceci est conforme au principe de réciprocité : nos observateurs sont bien équivalents.

- La simultanéité de deux évènements absolue dans le cas newtonien (il existe un temps universel) devient relative à l'observateur dans le cas einsteinien (pas de temps universel).
- Si l'observateur *O* attribue une durée Δt à un phénomène se déroulant dans son propre référentiel (durée propre du phénomène), l'observateur *O'* lui attribuera une durée $\Delta t' = \dfrac{\Delta t}{\sqrt{1-V^2/c^2}} > \Delta t$, plus grande que la durée propre : Cet effet est dénommé dilatation des durées.
- La relativité des durées, conjuguée au principe de réciprocité conduit à un paradoxe apparent magnifié par le problème des jumeaux de Langevin. Le paradoxe n'est qu'apparent car si l'on accepte sans problème la réciprocité de l'effet de contraction des longueurs, on doit accepter également celui des durées. La levée de ce paradoxe apparent ne peut se faire que dans la cadre de l'espace-temps convenablement géométrisé.
- Conséquence un peu moins intuitive : L'ensemble des boosts de Lorentz le long d'une direction fixe de l'espace possède une structure de groupe abélien. La loi de groupe correspond à la loi de composition des vitesses des référentiels. Cette structure de groupe persiste pour des transformations quelconques mais est cette fois non commutatif. On notera que la réciprocité est fondamentale dans la reconnaissance de cette structure de groupe (les transformations y sont inversibles). Toute tentative d'abandon de la réciprocité, notamment en raison des paradoxes apparents soulevés par celle-ci ferait dégénérer cette structure en semi-groupe et modifierait le contenu physique de la théorie.

III- Intervalle d'univers. Causalité relativiste. Séparabilité du monde physique.

Une conséquence fondamentale des transformations de Lorentz est qu'elles conservent une combinaison quadratique des longueurs et durées mesurées par un observateur donné : il s'agit d'un ***invariant fondamental***. Ainsi si l'on se donne deux événements $A(t_A; x_A, y_A, z_A)$ et $B(t_B; x_B, y_B, z_B)$ repérés par rapport à un observateur quelconque *O*, l'intervalle d'univers les séparant[3] est

$$\Delta s_{AB}^2 = c^2(t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2 = c^2\Delta t_{AB}^2 - d_{AB}^2 \qquad (1)$$

où Δt_{AB} désigne la durée déparant les évènements et d_{AB} la distance spatiale les séparant. La signature « hyperbolique » + - - - de cette forme quadratique conduit à la distinction absolue de trois catégories d'intervalles selon le signe de celui-ci,

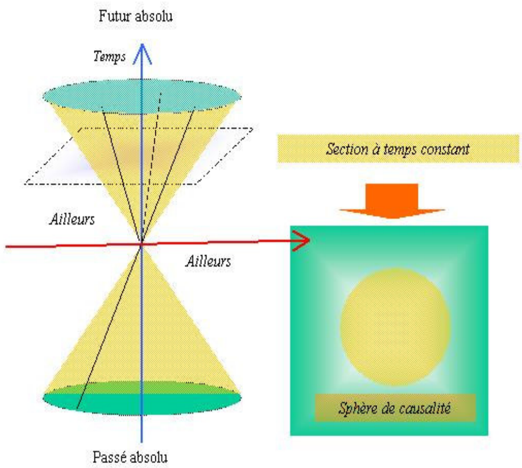
---

[3] *A noter l'existence d'une convention opposée à la nôtre pour la définition de l'intervalle : signature - + + +*

$$\left\|\begin{array}{ll}\Delta s^2 > 0, & \text{intervalle du genre temps} \\ \Delta s^2 = 0, & \text{intervalle du genre lumière} \\ \Delta s^2 < 0, & \text{intervalle du genre espace}\end{array}\right. \qquad (2)$$

Pour le premier type d'intervalle (genre temps) les événements A et B sont connectés causalement, i.e. l'un d'eux peut être la cause (ou la conséquence) de l'autre qu'il influence par le biais de signaux physiques infra-luminiques (échange de particules par exemple). Pour le second type d'intervalle (genre lumière) la connection causale persiste mais liée à l'échange de signaux lumineux (ou de particules se déplaçant à la vitesse de la lumière). Pour le dernier type (genre espace), les deux évènements ne sont pas connectés causalement (indépendants). Ainsi l'introduction de l'intervalle d'univers associé à chaque paire d'évènements permet une structuration causale de l'univers relativiste.

Cette structure peut être résumée par une notion fondamentale attachée à l'intervalle invariant, le cône de lumière attaché à chaque observateur. Il est déterminé par la partition de l'univers en trois domaines constitués par les événements reliés causalement à l'observateur (voir figure ci-dessous) ou non.



Sur ce diagramme (où l'espace est réduit à un plan pour faciliter les schémas) apparaissent le passé et le futur absolus de l'observateur constitués d'évènements susceptibles d'influencer O (passé de l'observateur) ou d'être influencés par O (futur de l'observateur) et donc séparés de O par un intervalle du genre temps. Ces zones sont situés à l'intérieur d'un cône de sommet O qui les séparent du reste de l'univers (Ailleurs) inaccessible à notre observateur et donc constitué d'évènements séparés de O par des intervalles du genre espace. Enfin, les deux nappes du ***<u>cône de lumière</u>*** sont constitués d'évènements séparés de O par un intervalle du genre lumière et donc connectés causalement à O. Les génératrices de ce cône peuvent être considérées comme l'ensemble des histoires possibles d'un rayon lumineux passant par O.

Le schéma de droite présente un autre mode de lecture de la structure du cône de lumière : Une section de l'espace-temps à un temps t donné (durée écoulée depuis t=0 situé sur l'observateur) est une sphère de rayon fini ct dont l'intérieur correspond aux évènements connectés causalement à O (c'est la sphère de causalité) et l'extérieur est l'ailleurs de cet observateur à cet instant. Il est clair que la surface de la sphère est la zone de l'espace atteinte par un rayon lumineux émis par O à t=0. Lorsque le temps passe (on se déplace le long de l'axe vertical), cette sphère se dilate à la vitesse de la lumière englobant progressivement des zones de l'espace initialement inaccessibles. Ceci montre que l'univers relativiste est séparable. On notera qu'en O cette sphère se réduit à un point : l'ailleurs est l'univers entier qui peut être regardé comme une sorte de présent inaccessible (instantanément).

IV- Ré-interprétation de l'intervalle d'univers comme métrique. Espace-temps de Minkowski. Quadri-vecteurs.

L'écriture de l'invariant d'univers comme somme algébrique de carrés de longueurs rappelle étrangement le théorème de Pythagore, symbole de la géométrie euclidienne. Cela suggère une relecture géométrique de cet invariant. Cette reconstruction fut établie par Hermann Minkowski (mathématicien au Polytechnicum de Zurich) et constitue une géométrisation de la structure causale de l'univers physique qui, à travers la définition d'un nouveau cadre métrique, permet une formulation des lois physiques explicitement invariante de Lorentz. Ce cadre est l'espace-temps de Minkowski.

Nous le définirons comme l'espace (affine) des évènements $\mathbb{R}^4$ muni de l'intervalle d'univers séparant deux évènements infiniment voisins,

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \qquad (3)$$

interprété comme une métrique (hyperbolique de par sa signature) et le noterons M_4. Cette expression présuppose que l'espace tridimensionnel usuel (euclidien[4]) est rapporté à une base orthornormée. Si celui-ci est rapporté à un système de coordonnées spatial quelconque (coordonnées sphériques, cylindriques, ….), l'expression (3) devient

$$ds^2 = c^2dt^2 - \sum_{j,k} h_{jk} dy^j dy^k \qquad (3')$$

où les $h_{jk}(y^l)$ sont les composantes du tenseur métrique de l'espace usuel rapporté au système de coordonnées $\{y^l\}$. Pour simplifier, nous considérerons la métrique d'espace-temps sous la forme canonique (3) et introduisons la notation $x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ de sorte que

$$ds^2 = \sum_{\alpha=0}^{3}\sum_{\beta=0}^{3} \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \equiv \sum_{\alpha,\beta} \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

$$\text{où } (\eta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & O \\ O & -\hat{I} \end{pmatrix} \leftrightarrow \eta_{00} = 1; \eta_{ij} = -\delta_{ij} (i, j = 1,2,3) \qquad (4)$$

où $\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ceci établit une analogie complète avec les espaces euclidiens puisque le symbole $(\eta_{\alpha\beta})$ désigne un tenseur de rang deux symétrique deux fois covariant, le tenseur

---

[4] *Un espace (affine ou vectoriel) euclidien est muni d'un produit scalaire c'est-à-dire d'une forme bilinéaire symétrique définie et positive attachée à un tenseur de rang 2 symétrique (uniforme : identique en tout point)* h_{ij}.

métrique de Minkowski. De façon équivalente et toujours par analogie avec la description des espaces réels euclidiens, le tenseur métrique définit un produit scalaire sur M_4 . Le produit scalaire de deux vecteurs $\tilde{u}=(u^\alpha), \tilde{v}=(v^\alpha)$ de cet espace s'écrit,

$$\tilde{u}.\tilde{v}=\sum_{\alpha,\beta}\eta_{\alpha\beta}u^\alpha v^\beta = u^0 v^0 - \vec{u}.\vec{v} \qquad (5)$$

et le carré scalaire $\tilde{u}^2 = u_0^2 - \vec{u}^2$. On peut réécrire (5) en introduisant les composantes covariantes des vecteurs (notées par un indice en position basse)

$$\tilde{u}.\tilde{v}=\sum_\beta u^\beta v_\beta = \sum_\alpha u_\alpha v^\alpha \text{ où } (\forall\alpha)\ u_\alpha = \sum_\beta \eta_{\alpha\beta}u^\beta \qquad (5')$$

Il va de soi que ces vecteurs sont dits orthogonaux –au sens de Minkowski – lorsque leur produit scalaire (5) est nul. La forme canonique du produit scalaire minkwoskien est réalisée lorsque l'espace usuel est rapporté à une base orthornormée (au sens euclidien) de sorte que nous définirons une base orthormale de M_4 $\{e_\alpha\}_{0\le\alpha\le3}$ par les identités

$$e_\alpha.e_\beta=\eta_{\alpha\beta} \leftrightarrow e_0^2=1, e_1^2=-1, e_2^2=-1, e_3^2=-1 \qquad (6)$$

Il est clair que par construction, le produit scalaire (5) est invariant par toute transformation de Lorentz. Toute transformation de Lorentz est en effet un automorphisme de M_4 agissant linéairement sur les évènements. Si l'on fait agir ces transformations sur les vecteurs intervenant dans (5), il vient

$$\tilde{u}'=\begin{pmatrix}\Gamma & -\Gamma V/c & 0 & 0\\ -\Gamma V/c & \Gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\tilde{u},\ \Gamma=1/\sqrt{1-V^2/c^2} \qquad \text{(Boost le long de Ox)}$$

ou de façon équivalente,

$$\left\|\begin{array}{l} u'^0=\Gamma(u^0-\frac{V}{c}u_x)\\ u'_x=\Gamma(u_x-\frac{V}{c}u_0)\\ u'_y=u_y\\ u'_z=u_z\end{array}\right. \qquad (7)$$

et la condition d'invariance[5] s'écrit,

$$^T\begin{pmatrix}\Gamma & -\Gamma V/c & 0 & 0\\ -\Gamma V/c & \Gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\eta\begin{pmatrix}\Gamma & -\Gamma V/c & 0 & 0\\ -\Gamma V/c & \Gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\eta \qquad (8)$$

dans laquelle le symbole $^T(\bullet)$ désigne l'opération de transposition d'une matrice.

---

[5] *Cette relation est aussi la formule de transformation des composantes d'un tenseur de rang deux dans un changement de coordonnées cartésiennes de l'espace-temps de Minkowski. En effet, les transformations de Lorentz peuvent aussi s'interpréter comme changement de coordonnées cartésiennes sur M_4 (transformation passive).*

Cela fait apparaître les transformations de Lorentz comme (sous-) groupe (du groupe) des isométries du tenseur de Minkowski (ou du produit scalaire correspondant) conservant séparément chaque composante de ce tenseur. ***Les vecteurs de M_4 dont les composantes se transforment comme les coordonnées des événements dans un changement de référentiel inertiel sont les quadri-vecteurs***. De façon plus générale, les (quadri-)tenseurs se transforment comme le tenseur de Minkowski dans un changement de référentiel. Ils jouent un rôle important en physique relativiste.Il va de soi que tous les vecteurs d'intérêt physique n'en sont pas forcément. Par exemple, le champ électrique et le champ magnétique ne définissent pas des quadri-vecteurs alors que les potentiels électromagnétiques dont ils dérivent ont ce caractère. Par contre champ électrique et magnétique définissent un tenseur de rang deux antisymétrique de M_4, le tenseur de Faraday.