

# Cours de Mécanique Analytique

*Jonathan Ferreira*

Année Universitaire 2002-2003



# Contents

<b>1 Mécanique de Lagrange</b>	<b>1</b>
1.1 Coordonnées généralisées . . . . .	1
1.2 Equations de la dynamique . . . . .	3
1.2.1 Principe de d'Alembert . . . . .	3
1.2.2 Equations de Lagrange . . . . .	4
1.2.3 Exemple 1: le pendule . . . . .	7
1.2.4 Exemple 2: masse sur une tige avec ressort . . . . .	7
1.3 Lois de conservation . . . . .	7
1.3.1 Variables cycliques . . . . .	8
1.3.2 Lagrangien indépendant du temps . . . . .	8
1.3.3 Théorème de Noether . . . . .	10
1.4 Une application: force centrale entre deux corps . . . . .	10
1.4.1 Invariance par translation dans le temps . . . . .	11
1.4.2 Invariance par translation dans l'espace . . . . .	11
1.4.3 Invariance par rotation dans l'espace . . . . .	11
1.4.4 Loi horaire . . . . .	12
1.4.5 Trajectoire . . . . .	12
1.4.6 Force en $1/r^2$ , Loi de Kepler . . . . .	13
1.5 Petites oscillations . . . . .	13
1.5.1 Systèmes à 1 degré de liberté . . . . .	13
1.5.2 Systèmes à n degrés de liberté . . . . .	14
1.5.3 Oscillations forcées . . . . .	16
<b>2 Principe variationnel</b>	<b>19</b>
2.1 Le principe de Hamilton . . . . .	19
2.2 Dédution des équations de Lagrange . . . . .	20
2.3 Exemples simples de calcul variationnel . . . . .	21
2.3.1 Plus petite distance dans un plan . . . . .	21
2.3.2 La brachistochrone . . . . .	21
2.4 Généralisation des équations de Lagrange . . . . .	22
2.4.1 Forces non conservatives . . . . .	22
2.4.2 Contraintes non holonomes: multiplicateurs de Lagrange . . . . .	23
2.5 Expressions du lagrangien en fonction de l'espace-temps . . . . .	25
2.5.1 Mécanique non relativiste . . . . .	25
2.5.2 Mécanique relativiste . . . . .	27
2.5.3 Remarques épistémologiques . . . . .	29

<b>3</b>	<b>Mécanique de Hamilton</b>	<b>31</b>
3.1	Hamiltonien d'un système . . . . .	31
3.2	Equations canoniques de Hamilton . . . . .	32
3.3	Principe variationnel . . . . .	33
3.4	Etude d'un cas simple: pendule 1D . . . . .	33
3.4.1	Ecriture de l'hamiltonien . . . . .	33
3.4.2	Le portrait de phase . . . . .	34
3.4.3	Etude au voisinage de points particuliers . . . . .	34
3.4.4	Remarques d'ordre général . . . . .	35
3.5	Théorie de Hamilton-Jacobi . . . . .	35
3.6	Transformations canoniques . . . . .	37
3.6.1	Fonctions génératrices . . . . .	37
3.6.2	Quelques transformations canoniques remarquables . . . . .	38
3.7	Les crochets de Poisson . . . . .	39
3.7.1	Définition . . . . .	39
3.7.2	Propriétés . . . . .	40
3.7.3	Invariance canonique . . . . .	41
3.7.4	Interprétation géométrique . . . . .	42
3.8	L'espace des phases . . . . .	44
3.8.1	Flot hamiltonien . . . . .	44
3.8.2	Incompressibilité du flot . . . . .	45
3.8.3	Théorème de Liouville: lien avec la physique statistique . . . . .	47
3.9	Systèmes intégrables . . . . .	48
3.9.1	Théorème de Arnold-Liouville . . . . .	48
3.9.2	Cartes et atlas symplectiques . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Systèmes hamiltoniens</b>	<b>51</b>
4.1	L'équation de Hamilton-Jacobi . . . . .	51
4.1.1	La fonction principale de Hamilton . . . . .	51
4.1.2	L'action hamiltonienne . . . . .	52
4.1.3	Méthode générale de résolution . . . . .	53
4.1.4	Méthode de séparation des variables . . . . .	53
4.1.5	Applications à quelques problèmes simples . . . . .	55
4.1.6	Le principe de Maupertuis . . . . .	58
4.1.7	Mécanique ondulatoire de Louis de Brooglie . . . . .	59
4.2	Variables canoniques angles-actions . . . . .	63
4.2.1	Systèmes fermés périodiques . . . . .	63
4.2.2	Variables angulaires . . . . .	64
4.2.3	Variables d'actions . . . . .	65
4.2.4	Fonction génératrice des variables angles-actions . . . . .	67
4.2.5	Applications . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Description lagrangienne des milieux continus</b>	<b>73</b>
5.1	Exemple d'un passage à la limite continue . . . . .	73
5.1.1	Corde élastique 1D . . . . .	73
5.1.2	Retour au lagrangien . . . . .	74
5.2	Formulation lagrangienne des milieux continus . . . . .	75
5.2.1	Conjectures . . . . .	75
5.2.2	Equations de Lagrange du champ . . . . .	76
5.3	Théorie classique des champs . . . . .	78
5.3.1	Cadre général . . . . .	78
5.3.2	Exemple: électrodynamique classique . . . . .	79
5.3.3	Tenseur énergie-impulsion d'un champ . . . . .	81

5.4	Compléments . . . . .	82
5.4.1	Formulation relativiste de la théorie des champs . . . . .	82
5.4.2	Densité d'hamiltonien . . . . .	83



# Chapter 1

## Mécanique de Lagrange

### 1.1 Coordonnées généralisées

La mécanique de Newton se base sur trois postulats:

1. Principe d'inertie: le mouvement d'un corps isolé est rectiligne uniforme dans un référentiel galiléen.
2. Principe de la dynamique, offrant une définition de la force

$$\dot{\vec{p}} = m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

3. Principe d'action et de la réaction.

A l'aide de ces trois principes, la mécanique de Newton a montré sa puissance de description dans de nombreux cas. Le mouvement d'un système quelconque de  $N$  particules est ainsi obtenu par la résolution de  $N$  équations vectorielles différentielles du 2eme ordre, mettant en jeu  $6N$  constantes d'intégrations, correspondant aux positions et vitesses initiales des  $N$  particules.

Par ailleurs, cette description du réel suit un autre principe, commun à toute la physique et qu'on peut appeler "principe de relativité". Ce principe stipule que les lois de la physique doivent être indépendantes de l'observateur, ce qui se traduit par une invariance de la forme des équations lors d'un changement de référentiel.

Il y a cependant des circonstances où l'application de la mécanique de Newton est délicate. C'est lorsqu'un système possède des contraintes internes (dues à des forces de liaison), limitant le mouvement du système et diminuant ainsi ses degrés de liberté.

#### Exemple 1: corps rigide

Dans un corps indéformable, la distance entre deux points doit rester constante, c'est à dire  $(r_i - r_j)^2 = c_{ij}^2$ .

#### Exemple 2: pendule

Pendule de longueur  $l$ , bougeant dans le plan. Ses coordonnées obéissent à la contrainte  $x^2 + y^2 = l^2$ : il y a donc  $2 - 1 = 1$  seul degré de liberté du système, l'angle  $\theta$ . Par ailleurs, ce pendule peut devenir paramétrique si  $l = l(t)$  imposé par l'extérieur (ex: encensoir de Compostelle).

#### Exemple 3: perle sur un cerceau

Cerceau tournant avec une vitesse angulaire  $\dot{\phi}$  imposée, perle glissant sur le cerceau. La position de la perle est repérée par les coordonnées

$$\begin{aligned}x &= R \sin \theta \cos \phi \\y &= R \sin \theta \sin \phi \\z &= R \cos \theta\end{aligned}$$

Le seul degré de liberté de la perle est  $\theta$ . Dans cet exemple, on suppose évidemment que la perle ne déforme pas le cerceau.

**Exemple 4: disque vertical roulant sans glisser**

Soit un disque de rayon  $R$  roulant sans glisser sur un plan horizontal, de vitesse  $v$  constante. Ceci ne peut évidemment se produire que si une force maintient un contact avec le sol, mais sans introduire un frottement. On repère la position de son centre par les deux coordonnées  $x$  et  $y$ , le plan du disque par l'angle  $\theta$  que fait l'axe de rotation avec l'axe  $Ox$  et un point  $M$  du disque par un angle  $\phi$ : 4 coordonnées  $(x, y, \theta, \phi)$ . La vitesse  $v$  du centre du disque vérifie

$$\begin{aligned}\dot{x} &= R \cos \theta \\ \dot{y} &= R \sin \theta\end{aligned}$$

La condition de roulement sans glissement introduit la contrainte  $v = R\dot{\phi}$ . On obtient ainsi les contraintes suivantes

$$\begin{aligned}dx - R \cos \theta d\phi &= 0 \\ dy - R \sin \theta d\phi &= 0\end{aligned}$$

que l'on ne peut intégrer qu'après avoir résolu le problème complet: on a deux relations différentielles du type  $f(\dot{x}, \dot{\phi}, \theta)$ .

- Les forces de liaison nous sont le plus souvent inconnues et ne nous intéressent pas: on voudrait simplement pouvoir calculer le mouvement de notre système soumis à des forces extérieures (appliquées) et qui, elles, sont connues.
- Par ailleurs, s'il y a  $k$  contraintes, les degrés de liberté réels du système se réduisent à  $n = 3N - k$ . Cela signifie que, dans la formulation newtonnienne, on résoud trop d'équations (un nombre  $k$  d'entre elles se déduisent des autres).

L'idée simple est alors d'exprimer les lois de la mécanique en fonction, non pas des coordonnées habituelles de position  $\vec{r}_i$  avec  $i=1, \dots, N$ , mais des coordonnées dites généralisées indépendantes  $q_j$ ,  $j=1, \dots, n$ . Les coordonnées généralisées les plus naturelles correspondent aux  $n$  degrés de liberté du système. Il suffit a priori d'identifier les coordonnées  $q$  et de faire ensuite toute la cinématique avec elles,

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n, t)$$

**Définition:** On appelle contraintes holonomes, toutes contraintes obéissant à une relation du type

$$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$$

différentiable en tout point. Si les contraintes sont holonomes, alors on peut exprimer une ou plusieurs coordonnées en fonction des autres, et ceci doit être vrai partout.

Les contraintes sont dites scléronomes si elles ne dépendent pas explicitement du temps, rhéonomes dans le cas contraire.

**Remarques:**

- (1) Dans les exemples précédents, les 1, 2 et 3 sont holonomes tandis que le 4 est non-holonyme. L'exemple 3 est rhéonome.
- (2) Un système rhéonome est un système ouvert. Un système fermé (autonome) est nécessairement décrit par des contraintes scléronomes.
- (3) Les problèmes holonomes ont toujours (au moins formellement) une solution. Par contre, il n'existe pas de méthode générale pour traiter les problèmes non-holonomes.
- (4) la physique moderne est essentiellement sub-atomique et la notion de contrainte  $y$  est rare. Quand elle apparaît, c'est souvent sous la forme d'une modélisation holonome.



## 1.2 Equations de la dynamique

### 1.2.1 Principe de d'Alembert

En choisissant de faire la cinématique avec les coordonnées généralisées, nous sommes sûrs de travailler avec  $n$  variables indépendantes. Mais il nous reste maintenant à voir s'il est possible d'exprimer les lois de la dynamique d'un système à  $n$  degrés de liberté en fonction uniquement des forces extérieures  $\vec{F}_{ext}$ . Autrement dit, comment faire disparaître les forces de liaison  $\vec{F}_l$ ?

**Principe de d'Alembert:**

Lors d'un déplacement virtuel d'un système, les forces de liaison ne travaillent pas.

Un déplacement virtuel correspond à un déplacement de chaque vecteur position  $\vec{r}_i$  d'une quantité  $\delta\vec{r}_i$  à un instant  $t$  donné. Un déplacement réel  $d\vec{r}$ , met en jeu une translation correspondante dans le temps (ainsi qu'un éventuel travail des forces de liaison). Le principe de d'Alembert stipule donc que les seuls déplacements virtuels possibles sont ceux qui sont compatibles avec les forces (internes ou non) de liaison et donc n'engendrent aucun travail.

Si les contraintes ne varient pas au cours du temps (contraintes scléronomes), alors le déplacement virtuel est équivalent à un déplacement réel.

Le principe de d'Alembert ne se vérifie que par l'expérience. Pour se convaincre malgré tout de sa validité, examinons quelques cas:

**Cas du pendule:**

Les seuls déplacements possibles de la masse s'effectuent selon un angle  $\theta$ . Lors d'un déplacement virtuel  $\delta\theta$ , la tension de la tige exerce un travail nul (déplacement perpendiculaire à la force de liaison).

**Cas de la boule:**

Une boule roulant sans glisser sur un plan peut se déplacer selon deux directions  $\delta x$  et  $\delta y$ . La force de liaison qui l'empêche de glisser est dirigée selon l'axe  $z$  et ne va donc pas engendrer de travail (en fait, l'approximation "sans glissement" signifie qu'on néglige toute forme de dissipation par rapport à l'énergie cinétique de la boule).

**Cas d'une contrainte mobile:**

Prenez le cas d'une particule contrainte de se déplacer sur une courbe, elle-même mobile. La force de contrainte (à  $t$  fixé) est normale à la courbe instantanée, mais le déplacement  $d\vec{r}$  de la particule pendant l'intervalle  $dt$  n'est pas tangent à la courbe. Conséquence: la force de contrainte n'est pas normale au déplacement réel et produit donc un travail.

A partir de maintenant, on utilisera les indices grecs ( $\alpha$ ) pour caractériser une particule parmi les  $N$  constituant le système, et les indices latins ( $i, k$ ) pour caractériser une coordonnée généralisée parmi les  $n$ .

En vertu du principe de d'Alembert, le travail virtuel des forces totales sur un système est donc simplement

$$\delta W = \sum_{\alpha} (\vec{F}_{ext} + \vec{F}_l)_{\alpha} \cdot \delta\vec{r}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{ext,\alpha} \cdot \delta\vec{r}_{\alpha}$$

Or, le déplacement virtuel vérifie

$$\delta\vec{r}_{\alpha} = \sum_k \frac{\partial\vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \delta q_k$$

puisque  $\delta t = 0$  dans un déplacement virtuel. Le travail des forces extérieures s'exprime alors en fonction des coordonnées généralisées

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{ext,\alpha} \cdot \sum_k \frac{\partial\vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \delta q_k \\ &= \sum_k Q_k \delta q_k \end{aligned}$$

où nous avons introduit la force généralisée dont la  $k$ -ième composante s'écrit

$$Q_k = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{ext,\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k} \quad (1.1)$$

### 1.2.2 Equations de Lagrange

D'après la relation fondamentale de la dynamique, à ce travail des forces extérieures lors d'un déplacement virtuel correspond une variation d'énergie due à une variation d'impulsion mesurée dans un référentiel galiléen, c'est à dire  $\delta W = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha}$ . Il nous reste donc à calculer le terme de droite en fonction des coordonnées généralisées.

On a

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} = \sum_{\alpha,k} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_k A_k \delta q_k$$

où les coefficients  $A_k$  (parfois appelés accélérations généralisées) sont

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \dot{\vec{r}}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \right) - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \right) \end{aligned}$$

Or, on peut intervertir les dérivées par rapport à des coordonnées indépendantes. En effet, la vitesse s'écrit

$$\vec{v}_{\alpha} = \dot{\vec{r}}_{\alpha} = \sum_k \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial t}$$

ce qui nous fournit la relation utile

$$\frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k}$$

Par ailleurs, le deuxième terme se simplifie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \right) &= \sum_i \frac{\partial^2 \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_i + \frac{\partial^2 \vec{r}_{\alpha}}{\partial t \partial q_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \sum_i \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial q_k} \end{aligned}$$

car  $\frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k}$  est une fonction des  $q_i$  et du temps uniquement. En regroupant tout, on obtient

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial q_k} \\ &= \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left( \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 \right) \end{aligned}$$

c'est à dire

$$A_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}$$

où

$$T = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2$$

est l'énergie cinétique du système. Le principe de d'Alembert permet donc de réécrire la relation fondamentale de la dynamique sous la forme

$$\sum_{k=1}^n (A_k - Q_k) \delta q_k = 0$$

où les  $n$  déplacements virtuels  $\delta q_k$  sont quelconques et indépendants. Cette indépendance découle directement du fait que les contraintes sont holonomes. Pour des contraintes non-holonomes, on ne pourrait rien dire. Ainsi, les  $\delta q_k$  étant indépendants, l'équation ci-dessus ne peut être satisfaite que si chaque coefficient est lui-même nul. On obtient donc  $n$  équations algébriques indépendantes

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

où les forces généralisées sont obtenues, soit par l'équation (1.1), soit en calculant le travail  $\delta W = \sum_k Q_k \delta q_k$ .

**Remarques:**

(1) Obtenues à partir de la RFD, ces équations ne sont valables que dans des référentiels galiléens. Dans un référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$ , la RFD s'écrit

$$\frac{d\vec{p}'}{dt} = \vec{F} + \vec{f}^{in}$$

où  $\vec{f}^{in}$  sont les forces d'inertie. Les équations de la dynamique dans  $\mathcal{R}'$  seront alors

$$A_k = Q_k + Q_k^{in} \tag{1.2}$$

où  $Q_k^{in} = \vec{f}^{in} \cdot \frac{\partial \vec{r}'_{\alpha}}{\partial q_k}$  sont les forces généralisées d'inertie. Par exemple, dans un référentiel animé d'une accélération  $\vec{a}$  par rapport à un référentiel galiléen, la force généralisée sera

$$Q_k^{in} = -\vec{a} \cdot \frac{\partial}{\partial q_k} \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} \right)$$

Si  $\mathcal{R}'$  est en rotation uniforme  $\vec{\Omega}$  par rapport à un référentiel galiléen, la force généralisée sera

$$Q_k^{in} = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial T'}{\partial q_k}$$

où  $U = -\vec{\Omega} \cdot \vec{L}'$  est un potentiel généralisé,  $\vec{L}' = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} \wedge \vec{v}'_{\alpha}$  est le moment cinétique total du système ( $\vec{v}'_{\alpha}$  est la vitesse relative vue dans  $\mathcal{R}'$ ) et  $T' = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}'_{\alpha})^2$ .

(2) La RFD s'occupe des forces: il faut donc faire le bilan de l'ensemble des forces pour calculer le comportement dynamique d'un système. L'approche ci-dessus est énergétique: il suffit de ne prendre en compte que les forces qui travaillent.

(3) Ces équations sont algébriques et non vectorielles: c'est une simplification appréciable...

**Forces conservatives:**  $V(q)$

Si la force (totale) extérieure qui s'exerce sur chaque particule du système dérive d'un potentiel  $V(q)$ , c'est à dire si  $\vec{F}_{\alpha} = -\nabla_{\alpha} V$  (ou encore  $F_{\alpha,i} = -\frac{\partial V}{\partial r_{\alpha,i}}$  pour  $i=1,2,3$ ) alors la force généralisée s'écrit

$$\begin{aligned}
Q_k &= \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{ext,\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k} = - \sum_{\alpha=1}^N \sum_i \frac{\partial V}{\partial r_{\alpha,i}} \frac{\partial r_{\alpha,i}}{\partial q_k} \\
&= - \sum_{\alpha} \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k}
\end{aligned}$$

(Attention c'est une notation: on ne divise pas par un vecteur!). On note que ceci est exactement l'expression de la dérivée partielle d'une fonction  $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$  par rapport à  $q_k$ , ce qui montre que la force généralisée s'exprime directement sous la forme

$$Q_k = - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

Sans perte de généralité, puisque  $V(q)$  uniquement (et pas du temps!), on peut définir la grandeur  $L = T - V$  ou lagrangien, et les  $n$  équations du mouvement prennent la forme connue sous le nom d'équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Cette équation doit évidemment redonner la relation fondamentale de la dynamique.

Pour une particule, cela implique que  $\frac{\partial L}{\partial q_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k$ ,  $k$ -ième composante de la force (généralisée), doit être égale à la dérivée temporelle de l'impulsion (généralisée). On définit ainsi

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (1.3)$$

comme étant l'impulsion généralisée ou moment conjugué de  $q_k$ .

### Potentiels généralisés: $V(q, \dot{q})$

On remarque que l'on peut encore mettre les équations du mouvement sous la forme lagrangienne ci-dessus même si le système n'est pas conservatif dans le sens usuel. Il suffit que l'on puisse définir un potentiel généralisé  $V(q, \dot{q})$  tel que la force généralisée s'écrive

$$Q_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

Exemple: montrer que la force de Lorentz, qui s'écrit  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ , dérive du potentiel généralisé suivant

$$V = q(U(\vec{r}, t) - \vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)) \quad (1.4)$$

où  $U$  et  $\vec{A}$  sont les potentiels scalaire et vecteur ( $\vec{E} = -\nabla U - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  et  $\vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$ ).

### Forces dissipatives: fonction de Rayleigh

Si toutes les forces s'exercent sur un système ne dérivent pas d'un potentiel (même généralisé), on peut toujours écrire les équations de Lagrange sous la forme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$$

où les  $Q_k$  sont les forces généralisées qui ne dérivent pas d'un potentiel. Un cas particulier important concerne les forces de frottement qui s'écrivent sous la forme  $F_i = -k_i v_i$ . Les forces de ce type peuvent en effet s'obtenir à partir d'une fonction, appelée fonction de dissipation de Rayleigh définie par

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (k_x v_{\alpha x}^2 + k_y v_{\alpha y}^2 + k_z v_{\alpha z}^2)$$

On montre sans difficultés que la force généralisée de frottement est alors  $Q_k = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k}$ .

### 1.2.3 Exemple 1: le pendule

Soit un pendule de longueur  $l$  avec une masse  $m$  placée dans un champ de pesanteur  $\vec{g}$  et astreint à se déplacer dans un plan  $(x,y)$ . Ce système possède donc 2 dimensions et 1 contrainte  $x^2 + y^2 = l^2$ , donc 1 seul degré de liberté. On choisit  $\theta$  comme coordonnée généralisée.

La vitesse s'écrit  $\vec{v} = l\dot{\vec{u}}_r = l\vec{\Omega} \wedge \vec{u}_r = l\dot{\theta}\vec{u}_\theta$  ( $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u}_z$ ). L'énergie cinétique vaut alors  $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$ . On a ensuite deux méthodes possibles de résolution.

Méthode 1: On ne connaît pas l'expression du potentiel. On calcule donc le travail lors d'un déplacement virtuel  $\delta\vec{r} = l\delta\theta\vec{u}_\theta$ . La seule force qui travaille est le poids, on a donc

$$\delta W = m\vec{g} \cdot \delta\vec{r} = -mgl \sin\theta \delta\theta = Q_\theta \delta\theta$$

ce qui fournit l'équation

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta = -mgl \sin\theta$$

c'est à dire  $\ddot{\theta} + \omega^2 \sin\theta = 0$ , avec  $\omega^2 = g/l$ .

Méthode 2: On sait que le potentiel s'écrit (à une constante près)

$$V = mgl(1 - \cos\theta)$$

Le lagrangien est  $L = T - V$  et on écrit directement l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

qui redonne évidemment le même résultat.

### 1.2.4 Exemple 2: masse sur une tige avec ressort

Soit une masse  $m$  astreinte à se déplacer sur une tige indéformable, faisant un angle  $\theta$  avec la verticale  $Oz$ , en rotation imposée avec un vecteur vitesse  $\vec{\Omega} = \Omega\vec{u}_z$ . La masse est attachée à un ressort de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$  et glisse sans frottement. Elle est par ailleurs soumise au poids. Ce système est à 1 degré de liberté, on choisit la distance  $r = OM$  comme coordonnée généralisée. Le référentiel choisi est celui du laboratoire, donc galiléen.

La vitesse s'écrit  $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\vec{\Omega} \wedge \vec{u}_r$ . On obtient une énergie cinétique

$$T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\Omega^2 \sin^2\theta)$$

Les équations de Lagrange s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r$$

où  $Q_r$  est la force généralisée totale associée à la coordonnée  $r$ . Un déplacement virtuel, ie. compatible avec les forces de liaison, est de la forme  $\delta\vec{r} = \delta r\vec{u}_r$ , ce qui nous donne un travail virtuel dû au poids et au ressort

$$\delta W = m\vec{g} \cdot \delta\vec{r} - k(r - l_0)\vec{u}_r \cdot \delta\vec{r} = (-mg \cos\theta - k(r - l_0))\delta r = Q_r \delta r$$

L'équation du mouvement de la masse est donc

$$\ddot{r} = -(\omega^2 - \Omega^2 \sin^2\theta)r - g \cos\theta + \omega^2 l_0$$

en posant  $\omega^2 = k/m$ .

## 1.3 Lois de conservation

L'ensemble des lois qui vont suivre ne servent qu'à simplifier la résolution des équations de Lagrange.

### 1.3.1 Variables cycliques

**Définition:** Une variable  $q_i$  est dite cyclique si le lagrangien  $L$  ne dépend pas explicitement de cette variable.

**Théorème:** Si  $q_i$  est cyclique, alors son moment conjugué  $p_i$  est une constante du mouvement ou intégrale première.

Démonstration: L'équation de Lagrange s'écrit

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

D'où  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  est une constante du mouvement.

L'interprétation est aisée: si  $L$  ne dépend pas de  $q_i$ , cela signifie que le système mécanique lui-même ne dépend pas de cette variable. On voit donc apparaître ici un lien entre les symétries d'un système et ses invariants.

Si  $q_i = x$  est une longueur, alors  $p_i = m\dot{x}$  est l'impulsion associée. L'invariance de  $L$  par rapport à une translation selon  $x$  se traduit donc par la conservation de la quantité de mouvement.

Si  $q_i = \theta$  est un angle, alors  $p_i = I\dot{\theta}$  est le moment cinétique associé. L'invariance de  $L$  par rapport à une rotation d'angle  $\theta$  implique la conservation d'une composante du moment cinétique.

### 1.3.2 Lagrangien indépendant du temps

Le temps joue un rôle particulier puisqu'on fait des dérivations par rapport à lui. Que se passe-t-il si le lagrangien  $L = L(q, \dot{q})$  ne dépend pas explicitement du temps ?

Exprimons l'énergie cinétique  $T = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2$  en fonction des coordonnées généralisées:

$$\begin{aligned} v_{\alpha}^2 &= \vec{v}_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha} = \left( \sum_i \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial t} \right) \cdot \left( \sum_j \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial t} \right) \\ &= \left( \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial t} \right)^2 + 2 \sum_i \left( \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial t} \right) \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \sum_{i,j} \left( \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \right) \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j \end{aligned}$$

Dans le cas de contraintes scléronomes  $\partial_t = 0$ , l'énergie cinétique est uniquement une fonction quadratique de  $\dot{q}_i$ , c'est à dire

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j \quad (1.5)$$

où la matrice  $(m)$  est réelle, symétrique et

$$m_{ij} = m_{ji} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \right) \cdot \left( \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \right) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_n} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_1} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_n} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_n} \end{pmatrix}$$

D'après cette expression, on voit que l'énergie cinétique  $T$  est une fonction homogène du second degré en  $\dot{q}_i$  ( $T(q, \lambda \dot{q}) = \lambda^2 T(q, \dot{q})$ )<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Théorème d'Euler: si  $f(\lambda q_i, Q_i) = \lambda^n f(q_i, Q_i)$ , où  $Q_i$  sont toutes les autres variables, alors

$$\sum_i q_i \frac{\partial f}{\partial q_i} = n f$$

Ceci se démontre en posant  $u_i = \lambda q_i$ , calculant  $\frac{df}{d\lambda} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial u_i} \frac{du_i}{d\lambda} = n \lambda^{n-1} f$  puis en posant  $\lambda = 1$ .

La variation du lagrangien avec le temps est alors donnée par

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) \\ &= \sum_i \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right) \\ &= \sum_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_i p_i \dot{q}_i \right)\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les équations de Lagrange dans le passage à la deuxième ligne. On obtient donc bien une grandeur invariante, appelée intégrale de Jacobi,

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L \quad \text{avec} \quad \frac{dH}{dt} = 0 \quad (1.6)$$

mais quelle est sa signification ?

(a) Pour  $V(q)$ , on a  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j m_{ij}(q) \dot{q}_j$  (le terme 1/2 disparaît puisque  $T$  est une fonction homogène du second degré, voir note sur théorème d'Euler). D'où

$$H = \sum_i \sum_j m_{ij}(q) \dot{q}_j \dot{q}_i - T + V = 2T - T + V = T + V = E$$

est l'énergie mécanique totale du système. On a donc conservation de l'énergie d'un système mécanique si celui-ci est invariant par translation dans le temps (système autonome ou fermé: contraintes et potentiel ne dépendant pas explicitement du temps). Il faut noter qu'ici  $V$  ne contient que le travail des forces externes ou appliquées (absence des forces de contrainte).

(b) Lorsque  $V(q, \dot{q})$ , on a

$$\begin{aligned}H &= p_i \dot{q}_i - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \\ &= \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \dot{q}_i \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} - T + V \\ &= T + V - \dot{q}_i \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i}\end{aligned}$$

Dans le cas de la force de Lorentz, par exemple, on obtient ainsi  $H = T + qU = E$ , somme de l'énergie cinétique et de l'énergie électrique. Dans d'autres cas,  $H$  est bien conservé (intégrale première), mais  $H \neq T + V$ .

**Remarques:**

(1) Si les contraintes sont scléronomes mais  $V$  dépend explicitement du temps (par exemple: particules placées dans un champ extérieur variable), alors  $H = E$  et l'énergie varie comme

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} \quad (1.7)$$

Un tel cas correspond à un système ouvert, recevant ou perdant de l'énergie par l'intermédiaire du champ imposé.

(2) Si le lagrangien  $L(q, Q, \dot{q}, \dot{Q}, t)$  d'un système peut se mettre sous la forme  $L = L_1(q, \dot{q}) + L_2(Q, \dot{Q}, t)$ , alors  $H_1 = \dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L_1$  est une intégrale première.

(3) Un système mécanique fermé (=autonome) n'est donc possible que pour  $V$  ne dépendant pas explicitement du temps. S'il possède  $n$  degrés de liberté, alors il y a au plus  $2n-1$  intégrales premières indépendantes: elles correspondent aux  $2n$  conditions initiales moins une, servant à fixer le choix de l'origine des temps:  $q_i(t) = q_i(C_1, \dots, C_{2n}, t) = q_i(C_1, \dots, C_{2n-1}, t + t_0)$

(4) Toutes les grandeurs conservatives liées aux propriétés de l'espace-temps sont additives (énergie  $E$ , impulsion  $\vec{p}$  et moment cinétique  $\vec{L}$ ). Cela est dû au fait que leur définition ne dépend pas de l'existence ou non d'une interaction entre les particules.

### 1.3.3 Théorème de Noether

**Enoncé:** Soit un jeu de coordonnées généralisées  $\tilde{q}_i(s)$  dépendant continûment d'un paramètre  $s$  et tel que  $\tilde{q}_i(0) = q_i$ . Si Le lagrangien  $L$  est indépendant de  $s$ , c'est à dire si  $L(\tilde{q}, \dot{\tilde{q}}, t) = L(q, \dot{q}, t)$ , alors

$$I(q_k, \dot{q}_k) = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\tilde{q}_k}{ds} \Big|_{s=0} \quad (1.8)$$

est une constante du mouvement.

Démonstration:  $L$  indépendant de  $s$  s'écrit

$$\frac{dL}{ds} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \tilde{q}_i} \frac{d\tilde{q}_i}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \frac{d\dot{\tilde{q}}_i}{ds} = 0$$

Or,  $\frac{d\dot{\tilde{q}}_i}{ds} = \frac{d}{dt} \frac{d\tilde{q}_i}{ds}$  et, avec l'équation de Lagrange  $\frac{\partial L}{\partial \tilde{q}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_i}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{dL}{ds} &= \sum_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \frac{d\tilde{q}_i}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \frac{d}{dt} \frac{d\tilde{q}_i}{ds} \\ &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{q}}_i} \frac{d\tilde{q}_i}{ds} \right) = 0 \end{aligned}$$

ce qui, pour  $s = 0$ , prouve le théorème.

Ce théorème offre le lien rigoureux entre symétries et intégrales premières que nous avons vu précédemment. Supposons qu'un système soit invariant par translation dans une direction  $x$ . On peut alors faire un changement de coordonnées tel que  $\tilde{q}_i(s) = q_i + s$ , pour  $i$  tel que  $q_i$  soit associé à la coordonnée  $x$  de chaque particule du système et  $\tilde{q}_k(s) = q_k$  pour les autres. Alors, d'après le théorème de Noether,

$$I = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_\alpha p_{\alpha,x}$$

est un invariant: c'est la somme des composantes  $x$  des impulsions généralisées.

Si un système est invariant par translation dans les trois directions, alors on peut répéter ce jeu et on obtient que l'impulsion totale

$$\vec{P} = \sum_\alpha \vec{p}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \quad (1.9)$$

est une intégrale première. A noter que ceci est valable pour les quantités de mouvement comme pour les moments cinétiques d'un système. Invariance par rotation autour d'un axe  $Oz$  implique la conservation de la composante selon  $z$  du moment cinétique total du système. Un système possédant une symétrie sphérique a un moment cinétique total

$$\vec{J} = \sum_\alpha \vec{J}_\alpha = \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \wedge \dot{\vec{r}}_\alpha \quad (1.10)$$

conservé.

## 1.4 Une application: force centrale entre deux corps

Soit un système mécanique fermé, constitué de deux particules de masses  $m_1$  et  $m_2$ , situées respectivement en  $\vec{r}_1$  et  $\vec{r}_2$  et interagissant par l'intermédiaire d'un potentiel  $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ . Dans un référentiel galiléen, le lagrangien de ce système s'écrit

$$L = T - V = \frac{1}{2} \left( m_1 \dot{r}_1^2 + m_2 \dot{r}_2^2 \right) - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$



C'est un système à  $n = 6$  degrés de liberté, on a donc 6 équations différentielles du second ordre, couplées, et donc 12 constantes d'intégration. La résolution de ce problème va être grandement simplifiée en utilisant les lois de conservation. N'ayant pas de contraintes particulières, on choisit comme coordonnées généralisées  $q_i = r_i$ . Reste à choisir le système de coordonnées, par exemple cartésien  $q_1 = r_{1,x}, \dots, q_4 = r_{2,x}, \dots, q_6 = r_{2,z}$ .

### 1.4.1 Invariance par translation dans le temps

Le système est fermé,  $L$  ne dépendant pas explicitement du temps, donc il y a conservation de l'énergie, c'est à dire

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L = T + V = E$$

### 1.4.2 Invariance par translation dans l'espace

Si le potentiel d'interaction est tel que  $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = V(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ , alors il est évident que  $L$  reste inchangé par translation dans les trois directions. En vertu du théorème de Noether, cela implique que l'impulsion totale du système

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 \quad (1.11)$$

est une constante (en norme et en direction). Cela signifie que le centre de masse du système a un mouvement rectiligne uniforme. Cela nous suggère donc de faire le changement de variable suivant

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ \vec{R} &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M} \end{aligned}$$

où  $M = m_1 + m_2$  est la masse totale du système. La première coordonnée porte sur la distance entre les deux particules et la seconde est celle du centre de masse:  $M \dot{\vec{R}} = \vec{P}$  est une constante. Le mouvement du centre de masse est donc sans intérêt et complètement déterminé par 6 conditions initiales.

Dans ce nouveau jeu de coordonnées, le lagrangien s'écrit

$$L = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$$

où  $\mu = m_1 m_2 / M$  est la masse réduite. On retrouve que les 3 coordonnées de  $\vec{R}$  sont cycliques, donc que  $M \dot{\vec{R}}$  est une constante. Du coup, on peut simplifier le lagrangien qui devient

$$L = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r}) \quad (1.12)$$

c'est à dire celui d'une particule (fictive) de masse  $\mu$ , située en  $\vec{r}$ , soumise à une force dirigée vers le centre de masse. La nouvelle énergie (intégrale première) est

$$E = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r}) \quad (1.13)$$

et ne comporte plus le terme  $\frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}^2$ , correspondant à l'énergie de translation du centre de masse.

Ces résultats sont généraux pour deux particules en interaction, pourvu que la force soit radiale et ne dépende que de la distance entre les particules.

### 1.4.3 Invariance par rotation dans l'espace

On considère maintenant le cas  $V = V(r)$  uniquement, c'est à dire le cas d'une force centrale (indépendante de la direction). Le problème de la particule fictive devient alors un problème à symétrie sphérique, aucune

direction n'est privilégiée. Cela signifie que le système est invariant par rotation dans les trois directions et implique donc que le moment cinétique de la particule fictive,

$$\vec{\Sigma} = \vec{r} \wedge m\dot{\vec{r}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \quad (1.14)$$

est une constante (en norme et en direction). Cela "fixe" ainsi 3 autres constantes d'intégration: il ne reste plus qu'à fixer l'énergie  $E$  et la position ( $r$ ) et vitesse ( $\dot{r}$ ) initiales de la particule fictive, et les 12 constantes d'intégration nécessaires auront bien été utilisées.

Soit Oz l'axe porté par  $\vec{\Sigma}$ :  $\vec{r}$  perpendiculaire à  $\vec{\Sigma}$  à tout instant n'est possible que si le mouvement s'effectue dans le plan xOy. Dans les coordonnées polaires, le lagrangien s'écrit alors

$$L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$$

On pourrait écrire les équations de Lagrange et tenter ensuite de résoudre le problème (une fois  $V(r)$  spécifié). Mais il est plus utile de partir des intégrales premières, sachant que le moment conjugué s'écrit  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ,

$$\begin{aligned} \Sigma &= p_\varphi = \mu r^2 \dot{\varphi} \\ E &= \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + V(r) \end{aligned} \quad (1.15)$$

#### 1.4.4 Loi horaire

Si l'on s'intéresse à la loi horaire  $r(t)$  alors on peut réécrire l'énergie sous la forme

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V_{eff}(r)$$

où

$$V_{eff}(r) = V(r) + \frac{\Sigma^2}{2\mu r^2}$$

Le problème est ainsi ramené au calcul du mouvement d'une particule dans un potentiel effectif à 1 dimension. On obtient alors

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{eff}(r))}} \quad (1.16)$$

relation qui fournit  $t = t(r)$  et qui, du moins en principe, permet d'obtenir  $r(t)$  par inversion.

#### 1.4.5 Trajectoire

Si l'on s'intéresse à la trajectoire  $r(\varphi)$ , alors il est judicieux de faire le changement de variable  $u(\varphi) = 1/r(\varphi)$ . A partir de l'expression de l'énergie (1.15) on obtient

$$u'' + u = -\frac{\mu}{\Sigma^2} \frac{dV}{du} \quad (1.17)$$

où  $u'' = d^2u/d^2\varphi$ . Cette équation porte le nom d'équation de Binet et est valable pour tout potentiel central. Cependant, toutes les formes de potentiels  $V(r)$  ne donnent pas lieu à des équations intégrables analytiquement. Les cas simples (et les plus étudiés) sont des potentiels de la forme

$$V(r) = \lambda r^n$$

Pour  $n = 2$  (oscillateur harmonique),  $n = -1$  (Kepler),  $n = -2$ , les solutions sont analytiques. Pour d'autres valeurs de  $n$ , on tombe sur des intégrales elliptiques.

### 1.4.6 Force en $1/r^2$ , Loi de Kepler

Dans le cas de la loi de Kepler, le potentiel s'écrit  $V(u) = -Ku$  avec  $K = Gm_1m_2$ . L'intégration de l'équation de Binet est alors immédiate et fournit

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\phi - \phi_0)} \quad (1.18)$$

l'équation d'une conique, l'excentricité  $e$  et  $\phi_0$  étant deux constantes d'intégration et  $p = \frac{\sum^2}{\mu K}$  le paramètre de la conique. Pour  $e = 0$  on obtient des cercles,  $0 < e < 1$  des ellipses,  $e = 1$  des paraboles et  $e > 1$  des hyperboles. Il est ensuite aisé de relier  $e$  à la valeur de l'énergie,

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E \sum^2}{\mu K^2}}$$

## 1.5 Petites oscillations

Le formalisme de Lagrange se prête particulièrement bien au traitement des petites oscillations, c'est à dire de faible amplitude, au voisinage d'une position d'équilibre. Dans cette section nous allons obtenir des résultats très généraux.

### 1.5.1 Systèmes à 1 degré de liberté

Soit un système mécanique décrit par une coordonnée généralisée  $q$  (pour simplifier, elle sera considérée du type distance), soumis à un potentiel  $V(q)$ . Son énergie cinétique est  $T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2$  et l'équation du mouvement est fournie par l'équation de Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} &= \frac{\partial L}{\partial q} \\ m\ddot{q} &= -\frac{dV}{dq} \end{aligned}$$

Il existe une position d'équilibre  $q_e$  si, par définition, le potentiel  $y$  est extrémal c'est à dire

$$\left. \frac{dV}{dq} \right|_{q=q_e} = 0$$

Mais cet équilibre est-il stable? Autrement dit, si on donne au système une vitesse initiale  $\dot{q}_0$  lorsqu'il est placé en  $q_e$ , va-t-il s'éloigner ou revenir vers  $q_e$ ? Pour répondre, on fait un développement de Taylor du potentiel à l'ordre 2 (approximation harmonique), en posant  $x = q - q_e$ ,

$$V(x) = V(0) + \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_0 \frac{x^2}{2} + O(3)$$

L'équation de Lagrange linéarisée est alors

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} = -\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_0 x + O(2)$$

(a) Si  $\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_0 > 0$  l'équilibre est stable. En effet, on pose

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_0$$

et le mouvement est celui d'un oscillateur harmonique, de pulsation bien définie  $\omega$ ,  $x(t) = a \cos(\omega t + \phi) = \text{Re}(be^{i\omega t} + ce^{-i\omega t}) = \text{Re}(Ae^{i\omega t})$  pour  $a, b, c$  réels ou  $A$  complexe.

(b) Si  $\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_0 < 0$  l'équilibre est instable. On pose

$$r^2 = -\frac{1}{m} \left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_0$$

et la solution s'écarte exponentiellement de la position d'équilibre, avec un temps caractéristique  $1/r$ ,  $x(t) = ae^{rt} + be^{-rt}$ .

(c) Si  $\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_0 = 0$  l'équilibre est indifférent. On a  $\ddot{x} = 0$  et donc tout dépend des conditions initiales,  $x = x_0 + v_0 t$ .

## 1.5.2 Systèmes à n degrés de liberté

La généralisation du traitement précédent à des systèmes à n degrés de liberté est simple dans le principe, mais met en jeu des techniques de calcul matriciel. On rappelle que l'on ne s'intéresse qu'à des systèmes possédant une ou plusieurs positions d'équilibre, ie.

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{q_i = q_{ie}} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Posons que  $V$  passe par un extremum en  $q_i = q_{ie}$  et introduisons les petits déplacements  $x_i = q_i - q_{ie}$ . Un développement de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de l'équilibre donne

$$V = V(\vec{0}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} x_i x_j + O(3)$$

où la matrice  $(V)$ , d'éléments  $V_{ij} = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{\vec{0}}$  est réelle et symétrique. L'énergie cinétique s'écrit

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij}(\vec{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

A l'ordre 2, au voisinage de la position d'équilibre (variables  $x_i$ ), l'énergie devient

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j} M_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$$

où la matrice  $(M)$  d'éléments  $M_{ij} = m_{ij}(\vec{0})$  est également symétrique et réelle. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= \sum_j M_{ij} \dot{x}_j \\ \frac{\partial L}{\partial x_i} &= -\sum_j V_{ij} x_j \end{aligned}$$

et les équations de Lagrange linéarisées deviennent alors un système de n équations

$$\sum_j (M_{ij} \ddot{x}_j + V_{ij} x_j) = 0$$

La méthode générale de résolution consiste à rechercher des solutions de la forme  $x_j = X_j e^{i\omega t}$ , ce qui fournit un système de n équations algébriques

$$\sum_j (V_{ij} - \omega^2 M_{ij}) X_j = 0 \quad (1.19)$$

La résolution de ce système est fournie par l'équation caractéristique, c'est à dire

$$\det(V - \lambda M) = 0 \quad (1.20)$$

où l'on a posé  $\lambda = \omega^2$ . C'est une équation de degré  $n$  par rapport à  $\lambda$ . En définitive, la détermination des fréquences propres se ramène à une opération qui ressemble au calcul des valeurs propres de matrices. Les matrices (V) et (M) étant symétriques et réelles, elles possèdent  $n$  racines réelles (éventuellement multiples). Dans la base des vecteurs propres associés aux valeurs propres, les matrices (M) et (V) sont toutes deux diagonales. Cette diagonalisation correspond géométriquement à un changement de coordonnées linéaire (matrice (A)), faisant passer d'un système d'axes à un autre. Mais à ce stade, il n'est pas du tout évident qu'il existe une matrice (A) diagonalisant à la fois (V) et (M)!

Quoi qu'il en soit, on peut toujours résoudre l'équation caractéristique (1.20) et obtenir ainsi les  $n$  valeurs propres  $\omega_a$ . On reporte ensuite chaque valeur propre  $\omega_a$  dans le système d'équations

$$\sum_j (V_{ij} - \omega_a^2 M_{ij}) X_{a,j} = 0 \quad (1.21)$$

afin d'obtenir les  $n$  composantes  $X_{a,j}$  du vecteur propre  $\vec{X}_a$  correspondants. Il faut répéter cette opération pour obtenir l'ensemble des  $n$  vecteurs propres.

La solution particulière recherchée est donc de la forme  $x_j = C_a X_{a,j} e^{i\omega_a t}$  où  $C_a$  est un nombre complexe (ou encore  $\vec{x} = C_a \vec{X}_a e^{i\omega_a t}$ ). La solution particulière complète est donc la partie réelle de la somme des solutions précédentes, à savoir

$$x_j = \operatorname{Re} \left( \sum_a C_a X_{a,j} e^{i\omega_a t} \right) = \sum_a A_{a,j} z_a$$

où

$$z_a = \operatorname{Re} (C_a e^{i\omega_a t}) \quad (1.22)$$

constitue une solution oscillante triviale, avec la pulsation propre  $\omega_a$  puisqu'elle obéit à l'équation harmonique

$$\ddot{z}_a + \omega_a^2 z_a = 0 \quad (1.23)$$

Qu'est ce que cela signifie? La variation de chacune des coordonnées  $x_j$  avec le temps apparait donc comme une superposition linéaire des  $n$  états propres indépendants  $z_a$ . On appelle ces états les modes propres, associés aux axes principaux ou normaux du système. Le changement de coordonnées s'effectue par la matrice de passage (A), dont les éléments sont  $A_{a,j} = X_{a,j}$ : c'est tout simplement la matrice constituée des  $n$  vecteurs propres  $\vec{X}_a$

$$A_{a,j} = \begin{pmatrix} X_{1,1} & & X_{n,1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ X_{1,n} & & X_{n,n} \end{pmatrix}$$

Les coordonnées normales  $z_a$  étant indépendantes, cela signifie que le lagrangien du système, écrit avec ces coordonnées, doit pouvoir s'écrire comme la somme de lagrangiens indépendants. Chaque mode évolue sans interagir avec les autres, c'est à dire

$$L = \sum_a \frac{m_a}{2} (\dot{z}_a^2 - \omega_a^2 z_a^2) \quad (1.24)$$

Autrement dit, la matrice de passage (A) diagonalise bien simultanément (M) et (V).

En résumé, la détermination des fréquences propres se ramène toujours au calcul des valeurs propres d'une matrice. Celle-ci étant symétrique, les valeurs propres sont toujours réelles, positives ou négatives.

Les valeurs propres positives correspondent à des modes oscillants (équilibre stable). Les modes propres sont des modes collectifs d'oscillation à une seule fréquence, pouvant être excités indépendamment les uns

des autres. Dans le cas où toutes les valeurs propres sont positives, on peut considérer le mouvement complet d'un système comme étant obtenu en excitant les divers oscillateurs harmoniques avec des amplitudes et des phases différentes.

Les valeurs propres négatives correspondent à des solutions s'écartant exponentiellement de la position d'équilibre (ex: selle). Un système isolé devant conserver son énergie, cela signifie que notre traitement échoue pour les grandes amplitudes.

Cette remarque est également valable dans le cas d'oscillations de trop grande amplitude. Dans ce cas, on excite également les harmoniques des fréquences fondamentales (traitement des grandes amplitudes par les séries ou transformées de Fourier).

Enfin, les valeurs propres nulles forment ce qu'on appelle des modes mous (en élasticité, ils sont appelés modes rigides). Ils correspondent à  $\ddot{z}_a = 0$  et donc à une vitesse de translation constante dans la direction de la coordonnée principale associée. Puisque cette vitesse est constante, cela signifie que l'impulsion associée est un invariant. A l'inverse, un système invariant par translation dans une direction donnée aura donc un mode propre mou correspondant. Même chose pour la rotation.

### 1.5.3 Oscillations forcées

Le traitement des oscillations forcées est particulièrement simple dans les coordonnées normales. On reprend tout depuis le début avec une force généralisée extérieure, ne dépendant pas nécessairement d'un potentiel<sup>2</sup>. Soit  $Q_i$  la force généralisée exprimée avec les coordonnées  $x_i = q_i - q_{ie}$ . Les équations de Lagrange linéarisées s'écrivent alors

$$\sum_j (M_{ij}\ddot{x}_j + V_{ij}x_j) = Q_i$$

et peuvent se mettre sous la forme matricielle suivante

$$M\ddot{X} + VX = Q$$

où  $X$  est le vecteur des coordonnées  $x_i$ . Puisque  $A$  est la matrice de passage des axes principaux vers les axes usuels, on a  $X = AZ$ . On pose alors  $Q = AF$  où les  $F_i$  sont les coordonnées de la force généralisée exprimées dans la base principale  $z_i$ . Par ailleurs, soit  $M = A\bar{M}A^{-1}$  et  $V = A\bar{V}A^{-1}$  les matrices exprimées dans la base principale, donc diagonales: on peut donc poser  $(\bar{M})_{ij} = m_i\delta_{ij}$  et  $(\bar{V})_{ij} = m_i\omega_i^2\delta_{ij}$ .

Les équations de Lagrange se ramènent alors

$$\begin{aligned} M\ddot{X} + VX &= Q \\ A\bar{M}A^{-1}\ddot{X} + A\bar{V}A^{-1}X &= AF \\ A\bar{M}A^{-1}AZ + A\bar{V}A^{-1}AZ &= AF \\ A(\bar{M}\ddot{Z} + \bar{V}Z) &= AF \end{aligned}$$

c'est à dire à la forme simple

$$\ddot{z}_i + \omega_i^2 z_i = \frac{F_i}{m_i} \quad (1.25)$$

En général, on s'intéresse au cas particulier où la force est elle-même périodique, de pulsation  $\omega$ ,  $F_i = F_{i0}\cos(\omega t + \phi_i)$ . La solution générale de l'équation de Lagrange est alors la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène. Cette dernière est une oscillation (les cas instables n'ont pas d'intérêt car leur comportement est évident) à la fréquence propre  $\omega_i$ . Une telle solution est souvent un régime transitoire. Dans ce qui suit, on ne s'intéresse qu'à la solution particulière.

Le moteur extérieur imposant son mouvement, on recherche des solutions particulières de la forme  $z_i = Z_{i0}\cos(\omega t + \phi_i)$ . En les réinjectant dans l'équation du mouvement on obtient les amplitudes

$$Z_{i0} = \frac{F_{i0}/m_i}{\omega_i^2 - \omega^2}$$

<sup>2</sup>On peut cependant écrire le lagrangien  $L = T - V'$  avec  $V' = V + V_{ext}$  et  $Q_i = -\frac{\partial V_{ext}}{\partial x_i}$ .

ce qui fournit un mouvement complet (sans la partie oscillations propres) décrit par

$$x_i(t) = \sum_j A_{ij} z_j = \sum_j \frac{A_{ij} F_j(t)/m_j}{\omega_j^2 - \omega^2} \quad (1.26)$$

Conséquences:

(1) Si la force n'a pas de composante dans la direction de vibration d'un mode normal particulier, alors  $F_{i0} = 0$ : une force extérieure ne peut exciter un mode propre particulier que si elle agit dans le même sens de vibration.

(2) Il y a résonance lorsque  $\omega = \omega_i$ : l'amplitude du mode propre correspondant se met à croître. Dans une situation réelle, il y a toujours de la dissipation qui limite la croissance de l'amplitude et la maintient finie.





## Chapter 2

# Principe variationnel

### 2.1 Le principe de Hamilton

Jusqu'à présent, nous avons décrit l'état d'un système mécanique à  $n$  degrés de liberté par la donnée, à chaque instant  $t$ , des  $n$  coordonnées généralisées  $q_i(t)$ . A un instant donné, on peut donc représenter l'état<sup>1</sup> de ce système par un point dans un espace cartésien de dimension  $n$ , appelé "espace des configurations". A chaque axe de cet espace correspond une coordonnée  $q_i$ . Un système mécanique subissant une évolution entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  va donc dessiner une courbe dans l'espace des configurations entre un point 1 et un point 2, qu'on appelle (faute de mieux) "trajectoire". Le temps peut alors être pris comme paramètre de cette courbe.

La trajectoire réelle est celle qui correspond effectivement à la dynamique suivie par le système, elle sera donc obtenue en résolvant les équations de Lagrange. Mais qu'avons-nous fait pour les obtenir? En suivant le principe de d'Alembert, nous avons considéré le travail lors de déplacements virtuels. Graphiquement, cela revient à considérer des chemins<sup>2</sup> différents mais très proches, reliant les points 1 à 2. C'est cette constatation qui nous amène au principe de Hamilton.

**Enoncé:** Le mouvement d'un système réel, depuis l'instant  $t_1$  jusqu'à l'instant  $t_2$ , est tel que l'intégrale

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (2.1)$$

où  $L = T - V$  est le lagrangien du système, est extrémale. Par extrémale, on entend qu'elle reste stationnaire, c'est à dire  $\delta S = 0$ , lors d'une variation fonctionnelle des chemins. On appelle cette intégrale "l'action du système".

Remarques:

(1) D'un point de vue mathématique, calculer l'action d'un système revient à faire une application qui, à une fonction  $\bar{q}(t)$  (la trajectoire), associe un nombre. Ce nombre dépend donc de la fonction utilisée: on dit que  $S$  est une fonctionnelle de la trajectoire.

(2) L'action doit être extrémale, c'est à dire posséder un minimum ou un maximum. Un grand nombre de conditions physiques sont en fait décrites par un minimum, ce qui fait que le principe de Hamilton est parfois appelé "principe de moindre action".

(3) Nous allons démontrer que ce principe permet de retrouver les équations de Lagrange. Or, celles-ci sont elles-mêmes équivalentes aux équations de Newton. On peut donc remplacer les trois principes de Newton par celui-ci!

---

<sup>1</sup>L'état du système ne consiste en sa position que si les variables  $q_i$  sont des variables d'espace.

<sup>2</sup>On va maintenir cette distinction: le terme de trajectoire  $\bar{q}(t)$  décrira la solution des équations de la dynamique, tandis que celui de chemin décrira une fonction  $\tilde{q}(t)$  virtuelle.

(4) Cette formulation de la mécanique possède en outre l'avantage d'être indépendante du système de coordonnées choisi pour exprimer  $L$ .

## 2.2 Dédution des équations de Lagrange

Nous allons prouver que le principe de Hamilton permet effectivement de retrouver les équations de Lagrange. Autrement dit, qu'il contient les équations de Lagrange. Soit l'action

$$S = \int_1^2 f(y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n, x) dx$$

Soit  $\vec{y}(x)$  la trajectoire recherchée, c'est à dire celle qui assure  $\delta S(y) = 0$ . On peut construire des chemins voisins de cette solution en introduisant un paramètre  $\epsilon$  et une fonction  $\vec{\eta}(x)$  quelconque telle que

$$\vec{y}(x, \epsilon) = \vec{y}(x) + \epsilon \vec{\eta}(x)$$

où  $\vec{\eta}(x_1) = \vec{\eta}(x_2) = \vec{0}$ : tous les chemins passent par les points 1 et 2.

La variation de l'action (qui est devenue une fonction de  $\epsilon$ ) est alors

$$\delta S = \frac{dS}{d\epsilon} \delta\epsilon = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial \epsilon} + \frac{\partial f}{\partial y'_i} \frac{\partial y'_i}{\partial \epsilon} \right) \delta\epsilon dx$$

On intègre par parties le deuxième terme,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'_i} \frac{\partial y'_i}{\partial \epsilon} dx &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'_i} \frac{\partial^2 y_i}{\partial \epsilon \partial x} dx \\ &= \left[ \frac{\partial f}{\partial y'_i} \frac{\partial y_i}{\partial \epsilon} \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \frac{\partial y_i}{\partial \epsilon} dx \end{aligned}$$

d'où

$$\delta S = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \frac{\partial y_i}{\partial \epsilon} \delta\epsilon \left[ \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) \right] dx$$

où l'on peut identifier  $\frac{\partial y_i}{\partial \epsilon} \delta\epsilon = \delta y_i$ . Le principe de Hamilton ( $\delta S = 0$ ) ne peut être vérifié quelque soit le chemin (les  $\delta y_i$  sont indépendants), que si, pour tout indice  $i$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial y'_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 \quad (2.2)$$

ce qui redonne les équations de Lagrange lorsqu'on effectue le changement de variable  $x \rightarrow t$ .

**Théorème:** La fonction de Lagrange  $L$  d'un système mécanique n'est déterminée qu'à une fonction près, s'écrivant comme la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction quelconque  $f(q, t)$  du temps et des coordonnées.

Soit  $L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t)$ . L'action associée à ce lagrangien est alors  $S' = \int L' dt = S + f(q_2, t_2) - f(q_1, t_1)$ . D'où  $\delta S' = \delta S = 0$ .

Conséquence: ce théorème très utile permet de simplifier un lagrangien de tous les termes qui peuvent se mettre sous la forme  $\frac{d}{dt} f(q, t)$ . On peut se ramener ainsi à résoudre des équations considérablement plus simples.

## 2.3 Exemples simples de calcul variationnel

On vient incidemment de démontrer que toute une classe de problèmes se ramenant au calcul de variations (c'est à dire lorsqu'on cherche une fonction de une ou plusieurs variables rendant extrémale une quantité) peut se résoudre par les équations de Lagrange. Ceci n'est valable, évidemment, que si la fonctionnelle à extrémiser s'écrit bien sous la forme

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx$$

c'est à dire ne met en jeu ni des dérivées secondes  $y''$  ou d'ordre plus élevé, ni des variables supplémentaires d'intégration, par exemple,

$$S = \int \int f(y, y', x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Dans ces cas là, la méthode utilisée ci-dessus fonctionne, mais donne des équations qui ne sont pas celles de la mécanique de Lagrange.

### 2.3.1 Plus petite distance dans un plan

Quelle est la courbe  $y(x)$  qui minimise la distance entre deux points A et B dans un plan ?

L'élément infinitésimal de distance est  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ . La grandeur à minimiser est alors

$$S = \int_A^B ds = \int_{x_A}^{x_B} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Ici, la variable  $x$  joue le rôle du temps et le "lagrangien" est

$$L(y') = \sqrt{1 + y'^2}$$

La variable  $y$  est cyclique donc le moment conjugué  $p_y$  est constant, c'est à dire

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

On obtient donc que  $y' = dy/dx$  est une constante, c'est à dire l'équation d'une droite.

### 2.3.2 La brachistochrone

Sous l'action de la pesanteur seule, un point matériel de masse  $m$  glisse sans frottement dans un plan vertical. Quelle est l'équation de la courbe joignant 2 points, O et A, dans le temps le plus court ?

La grandeur à minimiser est évidemment

$$S = \int_O^A dt = \int_O^A \frac{ds}{v} = \int_0^{x_A} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

où la variable  $x$  joue encore le rôle du temps et le "lagrangien" est

$$L(y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}$$

Ici,  $x$  est cyclique, ce qui implique la conservation de la grandeur

$$H = y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L = \frac{-1}{\sqrt{2gy(1 + y'^2)}}$$

ce qui fournit  $y(1 + y'^2) = a$  où  $a$  est une constante.

On peut résoudre cette équation en donnant une forme paramétrique  $y(\theta)$ ,  $x(\theta)$ . Pour cela, on pose  $u = y'$ , ce qui fournit

$$u = \sqrt{\frac{a-y}{y}}$$

Essayons la fonction d'essai  $y = a \sin^2 \theta$ , c'est à dire  $u = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ . Alors,  $dx = \frac{dy}{u} = \frac{2a \sin \theta \cos \theta d\theta}{u} = a(1 - \cos 2\theta)d\theta$  et on obtient après intégration

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{2}(2\theta - \sin 2\theta) \\ y &= \frac{a}{2}(1 - \cos 2\theta) \end{aligned}$$

qui est l'équation d'une cycloïde.

## 2.4 Généralisation des équations de Lagrange

### 2.4.1 Forces non conservatives

Nous avons vu que le principe de Hamilton permet de déduire les équations de Lagrange pour des systèmes soumis des forces conservatives, c'est à dire pour lesquels toutes les forces en présence dérivent d'un potentiel (éventuellement généralisé). Que se passe-t-il pour une force  $\vec{F}$  non conservative?

Si on reprend la démonstration des équations de Lagrange, on voit que celles-ci s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

où  $T$  est l'énergie cinétique et  $Q_i = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$  la force généralisée.

On peut également obtenir ces équations à partir d'un principe variationnel en écrivant que l'action est cette fois-ci définie par

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (T + W) dt \quad (2.3)$$

où  $W = \vec{F} \cdot \vec{r}$ .

En effet, le principe variationnel  $\delta S = 0$  implique

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt$$

Or, le terme de gauche, on l'a vu, s'écrit

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \delta q_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] dt$$

tandis que celui de droite vaut

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \delta \vec{r} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \delta q_i \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \delta q_i Q_i \end{aligned}$$

ce qui redonne effectivement les équations de Lagrange dissipatives.

### 2.4.2 Contraintes non holonomes: multiplicateurs de Lagrange

Nous avons vu que la condition de contraintes holonomes (il existe  $k$  relations du type  $f_k(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$ ) était essentielle pour l'établissement des équations de Lagrange, puisque c'est elle qui assure l'indépendance des coordonnées généralisées  $q_i$ . Pour les systèmes non holonomes, les  $q_i$  ne sont pas indépendantes les unes des autres. Comment faire?

#### Méthode des multiplicateurs

Si les  $m$  équations de contrainte peuvent se mettre sous la forme différentielle suivante,

$$\sum_k a_{lk} dq_k + a_{lt} dt = 0 \quad (2.4)$$

( $l = 1, \dots, m$ ) alors on peut utiliser la méthode dite des "multiplicateurs de Lagrange".

Lors d'un déplacement virtuel  $dt = 0$  et les équations qui doivent être satisfaites sont seulement

$$\sum_k a_{lk} \delta q_k = 0. \quad (2.5)$$

On introduit alors  $m$  constantes indéterminées  $\lambda_l$  (qui peuvent être des fonctions du temps) et les  $m$  relations suivantes sont évidemment vérifiées

$$\lambda_l \sum_k a_{lk} \delta q_k = 0$$

ainsi que leur version intégrale

$$\int_1^2 \sum_l \lambda_l \sum_k a_{lk} \delta q_k dt = 0$$

Pour un système lagrangien, le principe de Hamilton fournit

$$\delta S = \int_1^2 dt \sum_k \left[ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \delta q_k = 0$$

d'où, la somme de ces deux variations doit également être nulle, à savoir

$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_l \lambda_l a_{lk} \right] \delta q_k = 0 \quad (2.6)$$

Dans cette équation, les  $n$   $\delta q_k$  sont dépendants les uns des autres, reliés par les  $m$  contraintes (2.5). On peut toujours choisir les  $n-m$  premières coordonnées comme étant les coordonnées indépendantes. Les  $m$  dernières coordonnées généralisées seront ensuite fixées par les  $m$  relations  $\sum_k a_{lk} \delta q_k = 0$ . Mais les  $m$  constantes  $\lambda_l$  que nous avons introduites sont libres. On peut donc les choisir de telle sorte que

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = 0 \quad (2.7)$$

pour  $k = n - m + 1, \dots, n$ . Si on introduit cela dans l'équation (2.6) on obtient

$$\int_1^2 dt \sum_{k=1}^{n-m} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_l \lambda_l a_{lk} \right] \delta q_k = 0$$

où les  $\delta q_k$  mis en jeu sont cette fois-ci tous indépendants. Du coup, on obtient les  $n-m$  équations suivantes pour  $k = 1, \dots, n - m$ ,

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} = 0 \quad (2.8)$$

Les équations (2.7) et (2.8) se condensent sous la forme des  $n$  équations

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \sum_{l=1}^m \lambda_l a_{lk} \quad k = 1, \dots, n \quad (2.9)$$

où il y a  $n+m$  inconnues: les  $n$  coordonnées  $q_k$  et les  $m$  constantes  $\lambda_l$ . Pour résoudre le système complet il faut rajouter les  $m$  équations (différentielles) de contraintes

$$\sum_{k=1}^n a_{lk} \dot{q}_k + a_{lt} = 0 \quad (2.10)$$

Quelle est la signification physique des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_l$ ? Les équations de Lagrange en présence de forces conservatives et non conservatives s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$$

où les  $Q_k$  sont les forces généralisées associées aux forces non conservatives. Les  $\lambda_l$  décrivent donc les forces (inconnues) généralisées de contrainte. Celles-ci sont donc obtenues lors de la résolution complète du problème (étendu à  $n+m$  variables).

**Remarque:** Cette méthode des multiplicateurs de Lagrange est également applicable pour des systèmes holonomes. En effet, toute relation du type  $f(q_1, \dots, q_n, t) = 0$  peut s'écrire après différentiation

$$\sum_k \frac{\partial f}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0$$

c'est à dire  $a_{lk} = \frac{\partial f}{\partial q_k}$  et  $a_{lt} = \frac{\partial f}{\partial t}$ . On peut donc utiliser cette méthode lorsque

- il n'est pas commode de ramener tous les  $q_k$  à des coordonnées indépendantes.
- l'on souhaite obtenir les forces de liaison internes à un système.

### Exemple

Soit un cerceau de rayon  $R$  et de masse  $M$  roulant sans glisser sur un plan incliné d'angle  $\alpha$ , sous l'effet de son poids. L'énergie cinétique du solide est

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

où  $I = \int r^2 dm = R^2 \int dm = MR^2$  est le moment d'inertie du cerceau par rapport à l'axe passant par son centre d'inertie  $G$ ,  $\dot{x}$  est la vitesse de  $G$  et  $\dot{\theta}$  la vitesse angulaire de rotation du cerceau sur lui-même. Ce problème possède donc 2 coordonnées  $x$  et  $\theta$ , reliées entre elles par la contrainte de roulement sans glissement

$$\dot{x} = R\dot{\theta}$$

Cette contrainte peut se mettre sous la forme holonome  $x = R\theta + C$ , permettant ainsi de traiter le problème par les équations de Lagrange usuelles. Mais ce faisant, nous ne serons pas capables de calculer la force de contrainte qui permet justement au cerceau de ne pas glisser. Si on veut la calculer, il faut introduire un multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  et conserver les deux variables comme coordonnées généralisées. L'équation de contrainte fournit

$$dx - R d\theta = 0$$

Le potentiel s'écrit

$$V = -Mg \sin \alpha x$$

et les équations de Lagrange généralisées deviennent

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= \lambda a_{1x} = \lambda \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= \lambda a_{1\theta} = -R\lambda\end{aligned}$$

On obtient ainsi un système de 3 équations à 3 inconnues  $(x, \theta, \lambda)$

$$\begin{aligned}M\ddot{x} - Mg \sin \alpha &= \lambda \\ MR\ddot{\theta} &= -\lambda \\ \dot{x} &= R\dot{\theta}\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{g \sin \alpha}{2} \\ \dot{\theta} &= \frac{\dot{x}}{R} \\ \lambda &= -\frac{Mg \sin \alpha}{2}\end{aligned}$$

Le cerceau descend avec une accélération 2 fois plus petite que celle qu'il aurait en l'absence des frottements dus à la contrainte  $\lambda$ , dirigée selon  $x$ .

## 2.5 Expressions du lagrangien en fonction de l'espace-temps

### 2.5.1 Mécanique non relativiste

Nous allons suivre une démarche déductive (à la Landau) qui, à partir de principes premiers très simples, va nous permettre de déterminer l'ensemble des principes de la mécanique de Newton.

Tout d'abord, il est nécessaire de choisir un système de référence (un observateur) pour y exprimer les lois de la physique, puisque tout événement physique est relatif à un observateur. Cependant, les lois mêmes de la physique doivent être indépendantes de ce choix. On peut donc choisir celui où les lois y adoptent la forme la plus simple. Un référentiel galiléen est ainsi un système de référence privilégié doté des propriétés suivantes:

- (1) l'espace est homogène et isotrope;
- (2) le temps y est uniforme (= le même partout). On dit également que le temps est absolu.

L'ensemble de ces prémisses constitue le "principe de relativité de Galilée".

En vertu du principe de Hamilton, le mouvement d'une particule matérielle se déplaçant librement dans l'espace, est tel que son action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

est extrémale. La fonction de Lagrange  $L$  ne peut être fonction

- ni de  $\vec{r}$ : espace homogène (inv par translation, donc  $L$  aussi)

- ni de  $t$ : temps uniforme (inv par translation). On doit avoir  $L(\vec{r}', t') = L(\vec{r}, t)$ . Cela signifie que  $L$  ne peut être qu'une fonction de la vitesse  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ . Mais l'espace étant isotrope (toutes ses directions sont équivalentes),  $L$  ne peut dépendre de la direction de  $\vec{v}$ . Elle dépend donc de sa valeur absolue, c'est à dire

$$L = L(v^2) \tag{2.11}$$

Les équations de Lagrange (qui découlent du principe de Hamilton) fournissent ensuite

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

donc  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  est une constante, ce qui implique que la vitesse  $\vec{v}$  est une constante (car  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$  est une fonction de  $\dot{q}_i$  et  $v$  uniquement). Ainsi, dans un référentiel galiléen, le mouvement d'une particule libre s'effectue avec une vitesse uniforme. Nous venons de démontrer le principe d'inertie, postulé dans le cadre de la mécanique newtonienne.

Soit  $L = L(v^2)$  dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . Reste à trouver la dépendance fonctionnelle de  $L$  en  $v^2$ . Soit  $\vec{v}'$  la vitesse de la particule dans un autre référentiel galiléen  $\mathcal{R}'$ , animé d'une vitesse  $\vec{V}$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Les formules de changement de référentiel sont données par la transformation de Galilée,

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}' + \vec{V}t \\ t &= t'\end{aligned}\tag{2.12}$$

Si  $\vec{V}$  est faible par rapport à  $\vec{v}'$ , on a

$$\begin{aligned}L(v^2) &= L(v'^2 + 2\vec{v}' \cdot \vec{V} + V^2) \\ &\simeq L(v'^2) + \frac{\partial L}{\partial v'^2} 2\vec{v}' \cdot \vec{V}\end{aligned}$$

Or, puisque  $L(q, \dot{q}, t) = L'(q', \dot{q}', t) + \frac{d}{dt}f(q', t)$ , cela signifie que le deuxième terme du développement limité doit s'écrire comme une dérivée temporelle totale d'une fonction de  $\vec{r}'$  et du temps, c'est à dire

$$\frac{\partial L}{\partial v'^2} 2 \frac{d\vec{r}'}{dt} \cdot \vec{V} \equiv \frac{d}{dt}f(\vec{r}', t)$$

Cela implique que  $\frac{\partial L}{\partial v'^2}$  est indépendant de  $\vec{r}'$  et de  $t$ , c'est à dire une constante  $a$ . Donc  $L = av'^2$ , où  $a$  doit être une caractéristique intrinsèque de la particule. Ce qui est vrai dans  $\mathcal{R}'$  l'est également dans  $\mathcal{R}$  (donc  $L = av^2$ ) et pour une vitesse  $\vec{V}$  quelconque. En effet, on a

$$\begin{aligned}L' &= av'^2 = a(\vec{v} - \vec{V})^2 = av^2 - 2a\vec{v} \cdot \vec{V} + aV^2 \\ &= L - \frac{d}{dt}(2a\vec{r} \cdot \vec{V} - aV^2t)\end{aligned}$$

Puisque  $L = av^2$  pour une particule libre dans tout référentiel galiléen, les équations de lagrange s'écrivent

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v_i} \right) &= \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0 \\ \frac{d}{dt} (2av_i) &= 2a\dot{v}_i = 0 \\ 2a \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{0}\end{aligned}$$

Pour que les équations de Lagrange d'une particule libre soient compatibles (et, de ce fait, démontrent) la relation fondamentale de la dynamique de Newton, il suffit de poser

$$a = \frac{m}{2}$$

Le lagrangien devient alors  $L = \frac{m}{2}v^2 = T$  pour une particule de masse  $m$ .

Pour un système de particules n'interagissant pas entre elles, les équations du mouvement de l'une ne peut contenir des grandeurs se reportant aux autres: cela implique que le lagrangien du système est une somme de lagrangiens indépendants et

$$L = \sum_{\alpha} L_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{m_{\alpha}}{2} v_{\alpha}^2$$

Lorsque les particules interagissent entre elles (système fermé), il suffit de définir le lagrangien comme étant

$$L = T - V$$



où le potentiel  $V$  ne dépend que des positions  $\vec{r}_\alpha$ . Les équations de Lagrange s'écrivent alors

$$m_\alpha \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} = \vec{F}_\alpha$$

où  $\vec{F}_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_\alpha}$  (notation vectorielle) est la force qui s'exerce sur la particule  $\alpha$  et qui est la RFD.

L'homogénéité de l'espace implique qu'un système fermé reste invariant par translation d'ensemble. Cela implique que le lagrangien également reste invariant lorsqu'on applique une translation  $\delta \vec{r}_\alpha = \vec{\epsilon}$  identique à tous les vecteurs position, c'est à dire

$$\delta L = \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_\alpha} \cdot \delta \vec{r}_\alpha = \vec{\epsilon} \cdot \sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_\alpha} = 0$$

On obtient alors

$$\sum_\alpha \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_\alpha} = \sum_\alpha \left( -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_\alpha} \right) = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha = \vec{0}$$

Dans le cas particulier d'un système fermé de deux particules, cela fournit  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$ , qui est le principe d'action et de réaction.

On voit donc que le principe de Hamilton, associé à des considérations sur les propriétés de l'espace-temps (principe de relativité de Galilée) permettent de redémontrer les trois principes fondamentaux de la mécanique de Newton:

- (1) Principe d'inertie;
- (2) Principe de la dynamique (RFD);
- (3) Principe d'action et de réaction.

Par ailleurs, il est important de noter que  $L = T - V$  est une conséquence directe de notre a priori galiléen sur l'espace-temps. Dans un référentiel non-galiléen, on ne pourra utiliser  $L = T - V$ , à moins d'introduire "à la main" le potentiel qui serait associé à la force d'inertie correspondante<sup>3</sup>. En pratique, il vaut mieux écrire le lagrangien dans un référentiel galiléen, puis de faire un simple changement de variables.

## 2.5.2 Mécanique relativiste

On peut faire de même dans le cadre de la mécanique relativiste, en remplaçant le principe de relativité de Galilée par celui de Lorentz. Nous allons obtenir de cette façon le lagrangien relativiste en suivant plusieurs étapes:

(1) L'action d'une particule libre doit être en effet définie de façon indépendante du référentiel: elle doit donc être invariante par transformation de Lorentz. La façon la plus simple est qu'elle soit l'intégrale d'un scalaire, lui-même étant un invariant de Lorentz.

(2) Cette fonction scalaire doit cependant mettre en jeu des différentielles du premier ordre: en effet, les équations de Lagrange qui résultent du principe de Hamilton (et qui mettent en jeu des dérivées de cette fonction), produisent des équations avec des dérivées secondes des positions.

Le seul scalaire construit à partir de différentielles du premier ordre est  $ads$  où  $a > 0$  est une constante caractéristique de la particule et  $ds = \sqrt{c^2 dt^2 - dl^2}$  l'intervalle d'espace-temps de Minkowski.

(3) On pose que l'action d'une particule libre relativiste s'écrit alors

$$S = -a \int_1^2 ds \tag{2.13}$$

Le signe moins se justifiera plus tard. Il indique qu'ici  $S$  doit être minimale (principe de moindre action) pour un mouvement réel.

<sup>3</sup>Dans un référentiel en rotation, l'espace n'est plus isotrope puisqu'il existe une direction privilégiée: l'axe de rotation.

(4) On peut ensuite identifier le lagrangien  $L$  d'une particule libre comme étant

$$L = -ac\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.14)$$

(5) Reste à déterminer la constante  $a$ . La limite newtonienne est obtenue en faisant tendre la vitesse de la lumière  $c$  vers l'infini, c'est à dire

$$L \simeq -ac \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) = -ac + \frac{a}{2c}v^2$$

Le premier terme est une constante sans influence tandis que le second redonne bien l'énergie cinétique de la particule si on pose

$$a = mc$$

(incidemment, on voit l'utilité du signe moins: la mécanique relativiste obéit à un principe de moindre action).

**Résumé:** L'action et la fonction de Lagrange d'une particule matérielle libre de masse  $m$  sont

$$S = -mc \int_1^2 ds \quad (2.15)$$

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.16)$$

L'impulsion généralisée d'une particule libre est  $p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i}$ , c'est à dire

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.17)$$

qui tend vers  $m\vec{v}$  lorsque  $c \rightarrow \infty$ .

L'énergie est  $E = \sum_i p_i v_i - L$ , ce qui donne

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.18)$$

Lorsque  $c \rightarrow \infty$ , l'énergie devient  $E \simeq mc^2 + T$  est (à une constante près) cohérente avec l'expression newtonnienne. Cette constante est l'énergie que possède la particule même en l'absence de vitesse: c'est l'énergie de masse au repos. On remarque donc qu'ici, la valeur de l'énergie d'une particule est parfaitement déterminée. Dans la mécanique de Newton, elle n'est connue qu'à une constante près. Par ailleurs on voit qu'aucune particule matérielle ne peut aller à  $v = c$  (divergence). L'énergie cinétique de la particule s'écrit

$$T = (\gamma - 1)mc^2$$

où  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  est le facteur de Lorentz.

Enfin, en combinant les deux relations ci-dessus, on peut un lien direct entre énergie et impulsion,

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \vec{v} \quad (2.19)$$

Cette équation est intéressante, car elle est indépendante de la masse de la particule. Si  $\vec{p} = p\vec{u}$ , alors une particule de masse nulle, allant à la vitesse de la lumière et possédant une énergie  $E$  vérifie  $\vec{p} = \frac{E}{c}\vec{u}$ . Enfin, utilisant cette relation, on peut également construire un autre invariant

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2 \quad (2.20)$$

qui n'est autre que la quadri-norme de l'énergie-impulsion...

### 2.5.3 Remarques épistémologiques

Que retenir de cette approche? Qu'il a suffi d'associer au principe de Hamilton un a priori (principe de relativité de Galilée ou de Lorentz) sur la structure de l'espace-temps dans lequel se produit un événement pour nous permettre de reconstruire l'ensemble des outils nécessaires à la description de la dynamique. Certaines constantes apparues lors de cette procédure ont été ensuite identifiées à des grandeurs communes (ex, la masse  $m$ , ou le produit  $mc$ ), en imposant simplement une continuité de notre description.

Si nous avons des raisons de croire que l'espace-temps est encore plus compliqué (par ex, doté d'une métrique complexe  $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$  ou de propriétés géométriques particulières), alors la procédure reste absolument identique et aboutirait à de nouvelles équations de la mécanique. Il faudrait ensuite comparer les prédictions de cette théorie avec les expériences.



## Chapter 3

# Mécanique de Hamilton

Ce que nous avons vu du formalisme lagrangien suffit amplement à traiter l'ensemble des problèmes de la mécanique classique (et relativiste). L'approche de Hamilton, que nous allons développer dans la suite du cours, n'apporte rien de nouveau du point de vue du contenu physique. Mais elle offre un cadre théorique puissant, permettant une interprétation géométrique de la mécanique. C'est dans ce cadre que s'est développée la mécanique quantique et la physique moderne (en particulier la théorie des champs) et c'est dans ce cadre également que s'étudient tous les phénomènes de chaos.

### 3.1 Hamiltonien d'un système

Nous savons modéliser tout système à  $n$  degrés de liberté  $q_k$  soumis à des forces conservatives, grâce à un lagrangien  $L(q_k, \dot{q}_k, t) = T - V$ . Dans cette formulation,  $\dot{q}_k = dq_k/dt$  et donc dépend à priori de  $q_k$ , de même que l'impulsion généralisée  $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ .

Mais, in fine, l'expression  $\dot{q}_k(t)$  dépend de sa valeur initiale qui est indépendante des  $q_k$ . L'état complet d'un système dépend ainsi des positions  $\vec{q}(t=0)$  et des vitesses  $\vec{\dot{q}}(t=0)$  initiales qui sont, elles, totalement indépendantes les unes des autres. C'est notre formalisme de la mécanique qui a créé ce lien, les  $q_k$  et les  $p_k$  étant, en définitive, deux jeux de coordonnées indépendantes.

Imaginons par exemple que nous voudrions connaître tous les comportements possibles d'un système dynamique: il suffit pour cela de spécifier de façon indépendante les positions et les vitesses initiales. Cela peut se faire aisément dans le formalisme lagrangien, mais n'aurait-on pas plutôt intérêt à formuler la mécanique de telle sorte que  $q_k$  et  $p_k$  soient d'emblée indépendants?

Travailler sur certaines variables puis en changer pour d'autres plus pertinentes (tout en conservant la notion de différentielle totale) est une démarche courante en thermodynamique: on appelle cela faire une transformée de Legendre. On cherche ainsi à obtenir une fonction  $g(q, p, t)$  construite à partir de  $L(q, \dot{q}, t)$ . La façon la plus simple est de chercher une fonction  $h$  triviale, telle que

$$g(q, p, t) = L(q, \dot{q}, t) + h(q, \dot{q}, p, t)$$

Si on différencie cette expression, on obtient

$$\begin{aligned} dg &= \sum_k \left( \frac{\partial g}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial g}{\partial p_k} dp_k \right) + \frac{\partial g}{\partial t} dt \\ &= \sum_k \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial h}{\partial q_k} \right) dq_k + \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial h}{\partial \dot{q}_k} \right) d\dot{q}_k + \frac{\partial h}{\partial p_k} dp_k \right] + \left( \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) dt \end{aligned}$$

ce qui se traduit par les contraintes suivantes

$$\frac{\partial g}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial h}{\partial q_k}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial p_k} &= \frac{\partial h}{\partial p_k} \\ 0 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial h}{\partial \dot{q}_k} \\ \frac{\partial g}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial t}\end{aligned}$$

La troisième équation permet d'obtenir  $h(q, \dot{q}, p, t) = -\sum_k p_k \dot{q}_k + f(q, p, t)$ . On voit ensuite qu'il existe une solution triviale en posant  $f = 0$ . On obtient alors

$$g(q, p, t) = L(q, \dot{q}, t) - \sum_k p_k \dot{q}_k$$

On reconnaît alors, au signe près, l'intégrale première obtenue dans le formalisme lagrangien et associée à la translation dans le temps. On choisit donc pour nouvelle fonction, l'expression

$$H(q, p, t) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L \quad (3.1)$$

appelée le hamiltonien du système.

## 3.2 Equations canoniques de Hamilton

Grâce au hamiltonien  $H$ , les coordonnées  $q$  et les moments conjugués  $p$  sont indépendants. Reste donc à reformuler les équations de Lagrange avec cette nouvelle grandeur. Par construction, on a

$$\frac{dH}{dt} = \sum_k \left( \frac{\partial H}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

Par ailleurs, la définition de  $H$  fournit

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \sum_k \left( \dot{p}_k \dot{q}_k + p_k \ddot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \sum_k \left( -\frac{\partial L}{\partial q_k} \dot{q}_k + \dot{q}_k \dot{p}_k \right) - \frac{\partial L}{\partial t}\end{aligned}$$

ce qui, par identification et puisque  $\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}$  (équations de Lagrange), donne les équations suivantes

$$\begin{aligned}\dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k}\end{aligned} \quad (3.2)$$

Ce jeu d'équations est appelé "équations canoniques de Hamilton" (canoniques car simples et symétriques). Elles découlent directement des équations de Lagrange et de la définition du hamiltonien. Nous avons remplacé  $n$  équations différentielles du second ordre (Lagrange) par  $2n$  équations différentielles du premier ordre (Hamilton), ce qui est un gain appréciable en termes de résolution mathématique!

On peut donc choisir de résoudre un problème mécanique en utilisant le formalisme hamiltonien. Pour cela, il faut

- (1) Etablir le lagrangien  $L(q, \dot{q}, t) = T(q, \dot{q}, t) - V(q, \dot{q}, t)$
- (2) Calculer les moments conjugués  $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$
- (3) Calculer le hamiltonien  $H(q, p, t) = \sum_k p_k \dot{q}_k - L$
- (4) Résoudre les  $2n$  équations canoniques de Hamilton.

L'ensemble des propriétés de symétrie et des lois de conservation vérifiées par le lagrangien se retrouvent dans l'hamiltonien. Le formalisme hamiltonien apparaît cependant particulièrement adapté au traitement des coordonnées cycliques: si  $q_i$  est cyclique, c'est à dire si  $\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$ , alors  $p_i$  est une intégrale première.

Enfin, le hamiltonien obéit à l'équation suivante

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (3.3)$$

et, on l'a vu, se confond avec l'énergie (pertinente) totale du système  $H = E = T + V$  pour des systèmes fermés (autonomes) et  $V(q)$ .

### 3.3 Principe variationnel

Nous allons montrer ici que les équations de Hamilton se déduisent également d'un principe variationnel. L'action est en effet définie par

$$S = \int L dt = \int \left( \sum_k p_k \dot{q}_k - H \right) dt$$

Le principe de Hamilton stipule que l'action est stationnaire ( $\delta S = 0$ ) lors d'une variation des chemins  $\delta q$  et  $\delta p$  entre deux points fixes. La variation d'action est (pour  $n=1$  pour alléger l'écriture)

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int (p\dot{q} - H) dt = \int (\delta p\dot{q} + p\delta \frac{dq}{dt} - \delta H) dt \\ &= \int \left( \dot{q}\delta p + p\frac{d(\delta q)}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q}\delta q - \frac{\partial H}{\partial p}\delta p \right) dt \\ &= \int \left[ \left( \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p - \left( \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \delta q \right] dt + [p\delta q]_1^2 \end{aligned}$$

où le dernier terme est nul puisque tous les chemins passent par les extrémités. Ainsi, une action extrémale pour des variations  $\delta q$  et  $\delta p$  indépendantes correspond aux équations suivantes

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} \end{aligned}$$

qui sont bien les équations de Hamilton. On remarque accessoirement que les termes "coordonnées" et "moments" sont trompeurs car ils semblent donner plus d'importance aux coordonnées, alors que dans le formalisme hamiltonien les  $q$  et les  $p$  jouent un rôle équivalent.

## 3.4 Etude d'un cas simple: pendule 1D

### 3.4.1 Ecriture de l'hamiltonien

Nous avons vu que le potentiel d'un tel pendule s'écrit (à une constante sans importance près)

$$V = -mgl \cos \theta$$

ce qui fournit un lagrangien  $L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$ . La coordonnée généralisée choisie est un angle  $q = \theta$  et le moment conjugué est  $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$ . En posant  $I = ml^2$  et  $\omega^2 = g/l$ , on obtient un hamiltonien de la forme

$$H(q, p) = T + V = \frac{p^2}{2I} - \omega^2 I \cos q \quad (3.4)$$

La connaissance de la dynamique de ce système passe a priori par la résolution des équations de Hamilton. Mais avec ce formalisme, on a maintenant accès à une information plus globale du système. En effet, ce système est conservatif car  $H$  ne dépend pas explicitement du temps:  $H = E$  est une intégrale première. La nature du mouvement suivi par le pendule va alors dépendre de la valeur prise par  $E$ , ce qui signifie que l'on peut prendre  $E$  comme un paramètre. On va voir que, sans résoudre les équations de Hamilton, on a accès à des informations importantes.

### 3.4.2 Le portrait de phase

On peut représenter la dynamique de ce système par des courbes d'iso-énergie,

$$p = \pm \omega I \sqrt{2} \sqrt{\cos q + \frac{E}{\omega^2 I}} \quad (3.5)$$

dans un espace à 2 dimensions dont les axes sont  $p$  et  $q$ , appelé l'**espace des phases**. Trois cas se présentent alors:

(1)  $0 < E < \omega^2 I$ ; il n'y a de solution que pour  $\cos q \leq \frac{E}{\omega^2 I}$ , autrement dit que pour un domaine borné de  $q$ : on doit assister à des oscillations libres. C'est ce qu'on appelle un **mouvement de libration**. Les points où  $p = 0$  sont appelés "points tournants" ou "points de rebroussement".

(2)  $E > \omega^2 I$ ; il y a une solution quelle que soit la valeur de  $q$ , par contre  $p$  reste bornée: on assiste à un **mouvement de rotation** (on dit aussi circulation) complet du pendule. La courbe  $p(q)$  est  $q_0$ -périodique (ici  $q_0 = 2\pi$ ).

(3)  $E = \omega^2 I$ ; correspond au cas limite séparant les 2 régimes précédents (qui sont topologiquement différents). La courbe décrite par  $p = \pm \omega I \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos q}$  s'appelle **la séparatrice**.

### 3.4.3 Etude au voisinage de points particuliers

Quelles sont les positions d'équilibre de ce système? Il y en a deux, l'une stable à  $q_e = 0$  et l'autre instable à  $q_e = \pm\pi$ . Faisons une étude à proximité de ces équilibres en posant  $x = q - q_e$  pour  $x$  petit et développons le potentiel à l'ordre 2 (approximation harmonique).

En  $q_e = 0$ , on obtient

$$E = \frac{p^2}{2I} + \frac{\omega^2 I}{2} x^2$$

Ainsi, la trajectoire est une ellipse et le point  $q_e = 0$  est dit **point elliptique**. Remarquons qu'en faisant un changement de coordonnées approprié,  $Q = \sqrt{\omega I} x$ ,  $P = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}}$ , le hamiltonien devient plus simple

$$E = \frac{\omega}{2} (P^2 + Q^2)$$

et fournit l'équation d'un cercle. Les équations de Hamilton,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{I} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{c'est à dire} \quad I\ddot{x} = -\omega^2 I x \end{aligned}$$

fournissent une solution oscillante  $x(t) = \text{Re}(Ae^{i\omega t})$  ( $A$  nombre complexe).

En  $q_e = \pm\pi$ , on obtient

$$E = \frac{p^2}{2I} - \frac{\omega^2 I}{2} x^2 = \frac{\omega}{2} (P^2 - Q^2)$$

c'est à dire l'équation d'une hyperbole, d'où l'appellation de **point hyperbolique** pour  $q_e = \pm\pi$ . Les axes de l'hyperbole sont les séparatrices elles-mêmes,  $p = \pm\omega I x$ . Les équations de Hamilton fournissent une solution divergente  $x(t) = \text{Re}(Ae^{wt})$ .



### 3.4.4 Remarques d'ordre général

Que faut-il retenir de général dans ce cas particulier?

(1) Dans le cadre hamiltonien, l'état complet d'un système à  $n$  degrés de liberté est représenté par un point dans l'espace des phases, espace à  $2n$  dimensions  $q_i, p_i$ .

(2) Le tracé du portrait de phase permet de voir graphiquement le comportement d'un système, sans même résoudre les équations du mouvement. Il offre ainsi une vision globale de sa dynamique. Chaque portrait de phase dépend du potentiel  $V(q)$ . Cette approche de géomètre associe ainsi une équation différentielle à une courbe (dite courbe intégrale) dans l'espace des phases.

(3) Au voisinage d'un point d'équilibre stable ou elliptique (minimum local de  $V$ ), les trajectoires sont des courbes fermées, des ellipses. Au voisinage d'un point d'équilibre instable ou hyperbolique (maximum local de  $V$ ), les trajectoires se comportent comme des hyperboles. Les deux types de solutions occupent des régions distinctes de l'espace des phases, séparées par des courbes appelées séparatrices.

(4) Nous venons de voir un point important: l'étude locale (au voisinage des points particuliers) a fourni des cartes locales, valables uniquement dans un domaine restreint. Mais les solutions étant uniques en des points réguliers (théorème de Cauchy), on peut faire un prolongement analytique des solutions à l'extérieur de leur domaine. En pratique, on peut tracer qualitativement le portrait de phase d'un système en étudiant seulement son comportement au voisinage des points "singuliers".

(5) Poincaré a introduit une classification des points singuliers:

**Centre** ou point elliptique: toutes les solutions forment à son voisinage des courbes fermées (ellipses).

**Col ou selle** ou encore point hyperbolique: les solutions sont des hyperboles à son voisinage.

**Noeud**: c'est un point traversé par une infinité de solutions.

**Foyer**: c'est un point vers lequel les solutions convergent, formant des spirales.

(6) L'introduction d'une dissipation aurait comme conséquence la diminution de l'énergie sur une échelle de temps  $\tau$ . La trajectoire de ce pendule dissipatif peut s'appréhender grâce au portrait de phase du pendule conservatif, de période  $T$ . Si  $\tau \ll T$ , la trajectoire va converger très rapidement vers le point centre. Chaque trajectoire va dépendre des conditions initiales: on peut observer soit une courbe pratiquement rectiligne, soit une forme en spirale. Si  $\tau \gg T$ , il faudra beaucoup de périodes pour que le pendule perde de l'énergie. Ainsi, partant par exemple d'une solution circulante, on arriverait, de proche en proche à une solution du type libration, dont l'amplitude décroît au fil du temps. Le pendule dissipatif possède ce qu'on appelle un **attracteur**: c'est le point elliptique  $(0,0)$ . Un autre d'exemple d'attracteur apparaît pour un système soumis à l'action d'un moteur. Le système, après une phase transitoire liée à sa dynamique interne, sera forcé de suivre un certain comportement imposé par le moteur. Ce comportement dessine une trajectoire dans l'espace des phases qui n'est rien d'autre qu'un attracteur.

## 3.5 Théorie de Hamilton-Jacobi

Nous avons tout d'abord montré (chapitre I) que tout système mécanique ayant  $n$  degrés de liberté  $q$ , soumis ou non à des contraintes holonomes, sur lequel s'exercent des forces conservatives peut être décrit par un lagrangien  $L(q, \dot{q}, t)$ . Les équations de la dynamique sont constituées de  $n$  équations différentielles du second ordre, les équations de Lagrange. L'état du système à un instant donné  $t$  est décrit par un point dans l'espace des configurations (dim  $n$ ). On vient de voir que l'on peut remplacer ces équations par les équations canoniques de Hamilton,  $2n$  équations différentielles du premier ordre seulement, portant sur le hamiltonien  $H(q, p, t) = p\dot{q} - L$ . L'état complet du système à un instant donné  $t$  est alors défini par un point dans l'espace des phases (dim  $2n$ ). Ces deux approches sont parfaitement équivalentes, elles découlent toutes deux du même principe variationnel (chapitre II).

Mais la simplicité même des équations canoniques de Hamilton

$$\begin{aligned}\dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k}\end{aligned}$$

suggère une méthode générale de résolution des problèmes mécaniques pour des systèmes dont les forces dérivent d'un potentiel (même généralisé).

*En effet, rechercher l'évolution temporelle d'un système est équivalent, dans le formalisme hamiltonien, à faire un changement de coordonnées  $(p, q) \rightarrow (P, Q)$  dans l'espace des phases.* Envisageons deux cas pour se convaincre de ceci.

Soit  $H'(Q, P, t)$  le nouvel hamiltonien exprimé avec les nouvelles variables. Supposons que l'on trouve des variables telles que  $H' = 0$  (alors que  $H(q, p, t) \neq 0$ ). D'après les équations canoniques de Hamilton on aurait alors

$$\begin{aligned}\dot{Q}_k &= \frac{\partial H'}{\partial P_k} = 0 \\ \dot{P}_k &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_k} = 0\end{aligned}$$

ce qui implique que toutes les  $Q$  ainsi que les  $P$  sont des invariants. Un système à  $n$  degrés de liberté aurait ainsi  $2n$  invariants ! Cela peut paraître étrange mais c'est effectivement toujours le cas: ce sont les  $2n$  conditions initiales. Ainsi, notre changement de variable  $(p, q) \rightarrow (P, Q)$  permet, après inversion, d'exprimer

$$\begin{aligned}q_k(t) &= q_k(Q, P, t) = q_k(q_1(0), \dots, q_n(0), p_1(0), \dots, p_n(0), t) \\ p_k(t) &= p_k(Q, P, t) = p_k(q_1(0), \dots, q_n(0), p_1(0), \dots, p_n(0), t)\end{aligned}$$

D'un point de vue géométrique, cela signifie que nous avons fait un changement de coordonnées qui, à un point de l'espace des phases caractérisé par le paramètre  $t = 0$ , associe un nouveau point de paramètre  $t$ . Le problème consiste à trouver ce fameux changement de variables...

Dans l'exemple ci-dessus, le hamiltonien peut dépendre explicitement du temps. Considérons maintenant le cas plus simple d'un système conservatif  $H = H(q, p)$ . Si l'on trouve de nouvelles variables  $(Q, P)$  telles que  $H' = H'(P)$ , autrement dit telles que les  $Q$  soient toutes cycliques, alors les équations de Hamilton donnent

$$\begin{aligned}\dot{P}_k &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_k} = 0 \\ \dot{Q}_k &= \frac{\partial H'}{\partial P_k} = \omega_k(P)\end{aligned}$$

Cela signifie que les  $n$  nouveaux moments  $P_k$  sont des invariants tandis que l'évolution temporelle des  $Q_k$  est triviale

$$Q_k = \omega_k(P)t + Q_{k,0}$$

Il suffit ensuite d'exprimer  $(q, p)$  en fonction de  $(Q, P)$  pour avoir l'évolution temporelle des anciennes coordonnées.

Cette approche géométrique est connue sous le nom de théorie de Hamilton-Jacobi. Nous verrons au chapitre suivant sur les systèmes hamiltoniens que chercher un changement de variables tel que

- (i)  $H' = 0$ , nous conduit à l'équation de Hamilton-Jacobi;
- (ii) toutes les  $Q$  sont cycliques, nous conduit aux variables canoniques d'angles et d'action.

Mais le raisonnement que nous avons suivi ne tient que si, avec les nouvelles variables, on peut encore écrire

$$\begin{aligned}\dot{Q}_k &= \frac{\partial H'}{\partial P_k} \\ \dot{P}_k &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_k}\end{aligned}$$

autrement dit, qu'à la seule condition que la structure formelle des équations de hamilton soit conservée. Avant donc d'aborder la manière de rechercher les "bons" changement de variables, il faut nous munir d'outils permettant de manipuler des grandeurs quelconques dans l'espace des phases: transformations canoniques et crochets de Poisson.

## 3.6 Transformations canoniques

### 3.6.1 Fonctions génératrices

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des transformations de coordonnées dites ponctuelles, c'est à dire de la forme

$$Q_i = Q_i(q_k, t)$$

(par exemple: passage cartésiennes en polaires). Dans le formalisme de Hamilton, les  $p_k$  sont également des coordonnées, il faut donc élargir le concept de transformation. On appelle transformation de contact toute transformation de la forme

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q_k, p_k, t) \\ P_i &= P_i(q_k, p_k, t) \end{aligned}$$

Avec ce nouveau jeu de variables, on doit pouvoir écrire de nouvelles équations de Hamilton, portant sur un nouvel hamiltonien  $H'(P, Q, t)$ . Or, cet hamiltonien décrit le même système physique que  $H(p, q, t)$  et donc, obéit au même principe variationnel,

$$\delta S = \delta \int L dt = \delta \int (p_k \dot{q}_k - H) dt = \delta \int (P_k \dot{Q}_k - H') dt$$

H et H' viennent donc du même lagrangien, à une dérivée totale par rapport au temps près, c'est à dire

$$H' = H + P_k \dot{Q}_k - p_k \dot{q}_k + \frac{dG}{dt} \quad (3.6)$$

**Définition:** une transformation canonique est une transformation de contact satisfaisant la condition (3.6). On appelle G la fonction génératrice de la transformation canonique, définie sur l'espace des phases du système.

*L'importance de la fonction génératrice réside dans le fait que sa connaissance détermine complètement la transformation canonique. Ceci n'est pas évident et résulte de la contrainte canonique.*

A 1 degré de liberté, il y a 4 classes de fonctions génératrices intéressantes mêlant les deux jeux de coordonnées:  $G_1(q, Q, t)$ ,  $G_2(q, P, t)$ ,  $G_3(p, Q, t)$  et  $G_4(p, P, t)$ . Le choix dépend des circonstances. A n degrés de liberté, le nombre de fonctions génératrices mêlant les anciennes et les nouvelles coordonnées est évidemment beaucoup plus élevé, mais la méthode qui suit reste toujours la même.

Supposons que nous ayons une relation du type  $G_1(q, Q, t)$ , c'est à dire que nous sachions exprimer  $p = p(q, Q, t)$  et  $P = P(q, Q, t)$ . La condition (3.6) signifie que si on les remplace dans le membre de gauche et dans le membre de droite, on arrive à une égalité fonctionnelle quelles que soient les valeurs des variables indépendantes q et Q. Plus précisément, on doit avoir

$$p dq - H dt = P dQ - H' dt + \frac{\partial G_1}{\partial q} dq + \frac{\partial G_1}{\partial Q} dQ + \frac{\partial G_1}{\partial t} dt$$

c'est à dire

$$(p - \frac{\partial G_1}{\partial q}) dq + (H' - H - \frac{\partial G_1}{\partial t}) dt - (P + \frac{\partial G_1}{\partial Q}) dQ = 0$$

pour des variations indépendantes des variables  $q$  et  $Q$  et du paramètre  $t$ . On a donc les équations suivantes:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial G_1}{\partial q} \\ P &= -\frac{\partial G_1}{\partial Q} \\ H' &= H + \frac{\partial G_1}{\partial t} \end{aligned}$$

Par souci de complétude, regardons ce qu'il advient des autres fonctions génératrices. Par exemple pour  $G_2(q, P, t)$ , on aurait

$$\left(p - \frac{\partial G_2}{\partial q}\right) dq + \left(H' - H - \frac{\partial G_2}{\partial t}\right) dt - P dQ - \frac{\partial G_2}{\partial P} dP = 0$$

Or, ici nous sommes supposés savoir exprimer  $Q$  en fonction de  $(q, P, t)$ , on peut donc en théorie éliminer le terme  $PdQ$ . Pour cela, il suffit de prendre pour fonction génératrice la fonction  $G = G_2 - PQ$ , ce qui revient à prendre la transformée de Legendre de  $G_2$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial G_2}{\partial q} \\ Q &= \frac{\partial G_2}{\partial P} \\ H' &= H + \frac{\partial G_2}{\partial t} \end{aligned}$$

pour  $G_3(p, Q, t) + pq$ ,

$$\begin{aligned} P &= -\frac{\partial G_3}{\partial Q} \\ q &= -\frac{\partial G_3}{\partial p} \\ H' &= H + \frac{\partial G_3}{\partial t} \end{aligned}$$

et pour  $G_4(p, P, t) + pq - PQ$

$$\begin{aligned} q &= -\frac{\partial G_4}{\partial p} \\ Q &= \frac{\partial G_4}{\partial P} \\ H' &= H + \frac{\partial G_4}{\partial t} \end{aligned}$$

**Remarques:**

- (1) Si l'on désire que  $H'$  soit un invariant, on choisira des fonctions génératrices telles que  $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$ .
- (2) Même si l'on ne trouve pas des nouvelles coordonnées où toutes les  $Q_i$  sont cycliques, il est avantageux de rechercher celles qui en offrent le maximum.

### 3.6.2 Quelques transformations canoniques remarquables

#### Identité

Soit la transformation canonique suivante

$$G_2(q, P) = \sum_i q_i P_i \tag{3.7}$$

D'après les relations obtenues plus haut, on a

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial G_2}{\partial q_k} = P_k \\ Q_k &= \frac{\partial G_2}{\partial P_k} = q_k \\ H' &= H + \frac{\partial G_2}{\partial t} = H \end{aligned}$$

On dit que  $G_2$  engendre la transformation identité.

### Transformations ponctuelles

Une transformation canonique de la forme

$$G_2(q, P) = \sum_i f_i(q, t) P_i \quad (3.8)$$

fournit

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial G_2}{\partial q_k} = \sum_i P_i \frac{\partial f_i}{\partial q_k} \\ Q_k &= \frac{\partial G_2}{\partial P_k} = f_k(q, t) \\ H' &= H + \frac{\partial G_2}{\partial t} \end{aligned}$$

engendre une transformation ponctuelle puisque les nouvelles coordonnées  $Q_k$  ne dépendent pas des moments. Les  $f_i$  étant arbitraires, on en déduit que toute transformation ponctuelle est canonique (ce qui n'était pas évident).

### Echange du rôle

Soit la transformation

$$G_1 = \sum_i q_i Q_i \quad (3.9)$$

fournissant les relations de passage suivantes

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\partial G_1}{\partial q_k} = Q_k \\ P_k &= -\frac{\partial G_1}{\partial Q_k} = -q_k \\ H' &= H \end{aligned}$$

Cette transformation effectue un échange entre coordonnée généralisée et moment. En mécanique hamiltonienne, il faut perdre l'habitude de considérer  $q$  comme une coordonnée spatiale et  $p$  comme une impulsion.

## 3.7 Les crochets de Poisson

### 3.7.1 Définition

#### Une nouvelle opération

Soit une fonction  $f(q, p, t)$  définie dans l'espace des phases. Sa dérivée par rapport au temps est

$$\frac{df}{dt} = \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

Remplaçant  $\dot{q}_k$  et  $\dot{p}_k$  par les équations de Hamilton, on obtient une nouvelle expression qui peut se mettre sous la forme compacte

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.10)$$

où l'on a introduit la notation suivante, appelée crochet de Poisson pour H et f,

$$\{f, H\} = \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \quad (3.11)$$

Etablie à partir des équations de Hamilton, l'équation (3.10) porte en elle la même information sur la dynamique d'un système. Mais l'intérêt essentiel de l'équation (3.10) réside dans le calcul des intégrales premières. En effet, si  $f$  est une intégrale première,  $\frac{df}{dt} = 0$  et  $f$  doit donc vérifier

$$\{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (3.12)$$

Si  $f = f(q, p)$  ne dépend pas explicitement du temps (ce qui est toujours vrai pour des systèmes autonomes), alors la condition pour être une intégrale première se ramène à

$$\{f, H\} = 0 \quad (3.13)$$

Ainsi, une façon de vérifier si une expression quelconque des variables dynamiques est un invariant est de calculer son crochet de Poisson avec le hamiltonien. Les crochets de Poisson nous offrent donc un test général pour la recherche et l'identification des constantes du mouvement.

### Définition générale

Soient deux fonctions  $f(q, p)$  et  $g(q, p)$  quelconques définies dans l'espace des phases, les crochets de Poisson sont par définition

$$\{f, g\} = \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right) \quad (3.14)$$

A partir de cette définition générale, on peut construire des crochets dits fondamentaux, en prenant pour fonctions  $f$  et  $g$  les variables  $q_k$  et  $p_k$ . On obtient alors les relations suivantes

$$\begin{aligned} \{p_i, p_j\} &= \sum_k \left( \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = 0 \\ \{q_i, q_j\} &= 0 \\ \{q_i, p_j\} &= \sum_k \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} - \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} \right) = \sum_k \delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.15)$$

### 3.7.2 Propriétés

Tout un ensemble de propriétés découlent de la définition même des crochets de Poisson:

$$\{f, g\} = -\{g, f\} \quad (3.16)$$

$$\{f, c\} = 0 \quad \text{où } c \text{ est une constante} \quad (3.17)$$

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\} \quad (3.18)$$

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\} \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f, g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} \right\} \quad (3.20)$$

$$\{f, q_i\} = -\frac{\partial f}{\partial p_i} \quad (3.21)$$

$$\{f, p_i\} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \quad (3.22)$$

Enfin, il est aisé (bien que pénible) de vérifier que les crochets de Poisson satisfont l'identité de Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0 \quad (3.23)$$

Une application importante résulte directement de cette identité. En effet, soient deux fonctions quelconques  $f$  et  $g$  définies dans l'espace des phases. On a d'après (3.10)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{f, g\} &= \{\{f, g\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} \\ &= \{f, \{g, H\}\} + \{g, \{H, f\}\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} \\ &= \left\{f, \frac{dg}{dt} - \frac{\partial g}{\partial t}\right\} - \left\{g, \frac{df}{dt} - \frac{\partial f}{\partial t}\right\} + \frac{\partial}{\partial t}\{f, g\} \\ &= \left\{\frac{df}{dt}, g\right\} + \left\{f, \frac{dg}{dt}\right\} \end{aligned}$$

**Théorème de Poisson:** Le crochet de Poisson de deux invariants est lui-même un invariant.

La démonstration est au-dessus: si  $f$  et  $g$  sont des invariants alors  $\frac{df}{dt} = \frac{dg}{dt} = 0$  et donc  $\frac{d}{dt}\{f, g\} = 0$ .

Note: cette méthode pour trouver de nouveaux invariants a cependant ses limitations, car on tombe souvent sur des fonctions triviales sans intérêt.

### 3.7.3 Invariance canonique

**Théorème:** Les crochets de Poisson sont indépendants du système de coordonnées canoniques dans lequel ils sont exprimés, autrement dit

$$\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P} \quad (3.24)$$

La démonstration complète (très calculatoire) ne sera pas donnée, je me contente de l'argumentation donnée par Landau (et qui constitue également une démonstration).

Lorsqu'on fait une transformation canonique  $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ , le temps n'intervient jamais explicitement. Il ne joue éventuellement que le rôle d'un paramètre. En conséquence, si on démontre (3.24) pour des grandeurs ne dépendant pas explicitement du temps, le théorème sera également vrai dans le cas général (puisque'il s'agit d'une propriété indépendante du temps). Par ailleurs, on peut toujours considérer que  $g$  est formellement le hamiltonien d'un système fictif. En vertu de l'équation (3.10) on obtient alors (pour  $g = H$ )

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\}_{q,p}$$

Or, le taux de variation de  $f$  ne peut dépendre du système de coordonnées choisi. Cela implique donc  $\{f, g\}_{q,p} = \{f, g\}_{Q,P}$ . On ne mettra donc plus les indices  $q, p$  aux crochets.

Regardons ce que cela implique. Soit une transformation canonique  $q = q(Q, P)$  et  $p = p(Q, P)$ . Les crochets de Poisson de deux fonctions quelconques s'écrivent

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{q,p} &= \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} \right) \\ &= \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \sum_i \left[ \frac{\partial g}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} + \frac{\partial g}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial p_k} \right] - \frac{\partial f}{\partial p_k} \sum_i \left[ \frac{\partial g}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial g}{\partial P_i} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right] \right) \\ &= \sum_i \frac{\partial g}{\partial Q_i} \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \right) + \sum_i \frac{\partial g}{\partial P_i} \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial P_i}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial P_i}{\partial q_k} \right) \\ &= \sum_i \frac{\partial g}{\partial Q_i} \{f, Q_i\}_{q,p} + \sum_i \frac{\partial g}{\partial P_i} \{f, P_i\}_{q,p} \end{aligned}$$

Cette dernière relation va nous être très utile. En remplaçant  $f$  par  $Q_i$  et  $g$  par  $f$ , on obtient

$$\{f, Q_i\}_{q,p} = -\{Q_i, f\}_{q,p} = -\sum_j \frac{\partial f}{\partial Q_j} \{Q_i, Q_j\}_{q,p} - \sum_j \frac{\partial f}{\partial P_j} \{Q_i, P_j\}_{q,p}$$

où l'on reconnaît des crochets fondamentaux. La condition (3.24) s'applique évidemment aux crochets fondamentaux, ce qui fournit

$$\{Q_i, Q_j\}_{q,p} = 0 \quad \{Q_i, P_j\}_{q,p} = \delta_{ij} \quad \{P_i, P_j\}_{q,p} = 0 \quad (3.25)$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \{f, Q_i\}_{q,p} &= -\frac{\partial f}{\partial P_i} \\ \{f, P_i\}_{q,p} &= \frac{\partial f}{\partial Q_i} \end{aligned}$$

ce qui nous fournit bien

$$\{f, g\}_{q,p} = -\sum_i \frac{\partial g}{\partial Q_i} \frac{\partial f}{\partial P_i} + \sum_i \frac{\partial g}{\partial P_i} \frac{\partial f}{\partial Q_i} = \{f, g\}_{Q,P}$$

Ainsi, on voit qu'il suffit que les crochets fondamentaux de Poisson soient des invariants canoniques (ie. laissés invariants lors d'une transformation canonique) pour que cela reste vrai pour des fonctions  $f$  et  $g$  quelconques. On peut donc ériger en théorème la proposition suivante.

**Théorème:** Une transformation sera canonique si elle vérifie (3.24) pour des fonctions  $f$  et  $g$  quelconques ou si, de manière équivalente, les relations (3.25) sont satisfaites.

### 3.7.4 Interprétation géométrique

Nous avons vu dans le formalisme lagrangien qu'il y avait un lien entre symétrie et invariants. Le théorème de Emmy Noether nous a même fourni une méthode permettant de calculer l'invariant lorsque nous savons quel changement de variable opérer.

Nous allons maintenant voir que ce lien entre invariants et propriétés de symétrie est une propriété géométrique de l'espace des phases<sup>1</sup>.

#### Générateurs de transformations canoniques infinitésimales

Toute opération de symétrie se traduit par un changement de variables (nous ne considérons évidemment que des transformations canoniques). Soit  $f(q, p, t)$  une fonction quelconque définie sur l'espace des phases. La modification due à une transformation infinitésimale ne dépendant pas explicitement du temps est

$$\begin{aligned} \delta f &= f(q + \delta q, p + \delta p, t) - f(q, p, t) \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \delta p_i \right) \end{aligned}$$

où les  $\delta q_i$  et  $\delta p_i$  ne sont pas des variations au sens du calcul variationnel mais des modifications élémentaires. Soit la transformation canonique infinitésimale

$$\begin{aligned} Q_i &= q_i + \delta q_i \\ P_i &= p_i + \delta p_i \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Ce faisant, nous allons généraliser le théorème de Noether de la même manière qu'une transformation de contact généralise la notion de transformation ponctuelle.



quelle est la fonction génératrice  $G$  associée? Nous avons vu que la transformation identité est engendrée par  $G_2(q, P) = \sum_i q_i P_i$ . On peut donc écrire

$$G(q, P) = \sum_i q_i P_i + \epsilon F \quad (3.26)$$

où  $\epsilon$  est un petit paramètre et  $F$  une fonction encore inconnue. Or,  $G$  doit être une transformation canonique, elle vérifie donc (en posant  $\tilde{G} = G - PQ$ )

$$pdq - Hdt = PdQ - H'dt + d\tilde{G}$$

quelles que soient les variations des  $P_i$  et des  $q_i$ . On obtient ainsi les relations

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial G}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ Q_i &= \frac{\partial G}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial F}{\partial P_i} \\ H' &= H \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \delta p_i &= P_i - p_i = -\epsilon \frac{\partial F}{\partial q_i} \\ \delta q_i &= Q_i - q_i = \epsilon \frac{\partial F}{\partial P_i} \simeq \epsilon \frac{\partial F}{\partial p_i} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ces expressions doivent être toutes deux du premier ordre en  $\epsilon$ , ce qui était bien le cas pour  $\delta p_i$ , alors que  $\delta q_i$  mettait en jeu une dérivation par rapport à  $P_i$ . On voit donc qu'il suffit de se donner une fonction  $F(q, p)$ , dépendant des anciennes variables, pour engendrer une transformation canonique infinitésimale de paramètre  $\epsilon$ .

Forts de ce résultat, on obtient que au premier ordre

$$\begin{aligned} \delta f &= \epsilon \sum_i \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} \right) \\ &= \epsilon \{f, F\} \end{aligned}$$

L'opération  $\{f, F\}$  a donc une signification précise:  $\delta f$  est la modification apportée à la fonction  $f$  lors d'un changement infinitésimal de coordonnées canoniques, de fonction génératrice  $F$ . Cette transformation infinitésimale est caractérisée par un unique paramètre  $\epsilon$ .

### Relation avec les invariants d'un système

**Théorème:** Les constantes du mouvement d'un système autonome sont les fonctions génératrices des transformations canoniques infinitésimales qui laissent  $H$  invariant.

Soit  $G$  une transformation canonique quelconque (ne dépendant pas explicitement du temps). Si on a

$$\{H, G\} = 0 \quad (3.28)$$

alors, cela signifie d'après l'équation (3.10) que  $G$  est une intégrale première. Mais en vertu de la relation précédente, cela signifie aussi que  $\delta H = 0$ , autrement dit, que  $G$  laisse  $H$  invariant.

Ce que nous savions déjà grâce à Lagrange apparaît ici comme un cas particulier d'un ensemble très vaste de transformations canoniques possibles.

**Exemple 1: translation dans le temps**

Nous avons vu que l'hamiltonien  $H$  d'un système est invariant si ce dernier est symétrique par translation dans le temps.

Prenons donc  $F = H$  et regardons ce que cela implique. Les relations (3.27) deviennent

$$\begin{aligned}\delta p_i &= -\epsilon \frac{\partial H}{\partial q_i} = \epsilon \dot{p}_i \\ \delta q_i &= \epsilon \frac{\partial H}{\partial p_i} = \epsilon \dot{q}_i\end{aligned}$$

ce qui indique que  $\epsilon = dt$ . Ainsi, le hamiltonien d'un système est bien le générateur d'une translation infinitésimale dans le temps, faisant passer celui-ci de l'instant  $t$  à l'instant  $t + dt$ .

*En conséquence, le mouvement d'un système entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  peut être décrit par une succession de transformations canoniques infinitésimales dont le générateur est  $H$ .*

**Exemple 2: translation d'un  $q_i$** 

Nous avons vu aussi que si une variable  $q_k$  est cyclique (ex: invariance par translation dans une direction, rotation autour d'un axe, mais cela peut être plus général), alors le moment conjugué  $p_i$  est un invariant.

Prenons  $F = p_k$ , les relations (3.27) deviennent

$$\begin{aligned}\delta p_i &= -\epsilon \frac{\partial p_k}{\partial q_i} = 0 \\ \delta q_i &= \epsilon \frac{\partial p_k}{\partial p_i} = \epsilon \delta_{ik}\end{aligned}$$

ce qui montre que  $p_k$  est bien le générateur d'une translation dans la direction  $q_k$  d'une quantité  $\epsilon$ . L'impulsion est le générateur du mouvement de translation du système, tandis que le moment cinétique celui de rotation.

## 3.8 L'espace des phases

Nous avons vu que l'état complet d'un système à un instant donné  $t$  est un point  $x(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  dans un espace à  $2n$  dimensions, appelé l'espace des phases. Cet espace n'a pas la structure d'un espace vectoriel (c'est une variété différentiable, une classe d'équivalence d'atlas). L'espace des phases va nous permettre d'appréhender tout un ensemble de propriétés formelles des systèmes dynamiques et d'en tirer des interprétations géométriques simples.

### 3.8.1 Flot hamiltonien

L'évolution temporelle du système est régie par les équations de hamilton qui peuvent se mettre sous la forme condensée suivante

$$\dot{x} = g_H^t(x, t) \tag{3.29}$$

où le vecteur

$$g_H^t = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}$$

représente le "champ de vitesses" au point  $x$ . En résolvant les équations de Hamilton, on dessine une trajectoire dans l'espace des phases, de la même manière qu'on le ferait en suivant de proche en proche le vecteur vitesse dans un espace euclidien. On appelle  $g_H^t$  le flot hamiltonien, par analogie avec la mécanique des fluides.

Le flot hamiltonien a une structure de groupe (loi interne, associativité, élément neutre, inverse).

**Théorème de Cauchy** (non démontré): Pour des conditions initiales données  $\dot{x}_0 = \dot{x}(t = t_0)$ , la solution  $\dot{x}(t)$  de l'équation (3.29) existe et est unique pour un temps  $t$  fini.

Ce théorème n'est valable que pour des positions dites "non-singulières" de l'espace des phases. Un point hyperbolique est un exemple de point singulier.

Conséquences:

(1) Deux trajectoires dans l'espace des phases ne peuvent se couper. Attention: un point commun à deux trajectoires signifie le même point de l'espace des phases au même instant. Si c'était le cas, alors cela signifierait que deux conditions initiales différentes conduiraient à un même état commun, ce qui est en contradiction avec l'unicité des solutions. A noter que cela ne concerne pas les trajectoires associées à des temps de parcours infinis.

(2) Il est difficile de représenter un espace à plus de 2 dimensions ( $n=1$ ). Lorsqu'on le fait, on fait une projection et on peut alors y observer des trajectoires qui se coupent.

### 3.8.2 Incompressibilité du flot

#### Conservation du volume

**Théorème:** un volume  $V$  quelconque de l'espace des phases est conservé par le flot hamiltonien  $g_H^t$ , c'est à dire

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad (3.30)$$

Soit un point quelconque de  $V$ . Lors d'une évolution temporelle, ce point va suivre une trajectoire précise dans l'espace des phases, imposée par les équations canoniques de Hamilton. Il en va de même pour tous les autres points appartenant à  $V$ . On va donc assister, entre les instants initial et final, à une déformation de  $V$ , analogue à celle d'un élément de fluide pris dans un écoulement. Le théorème ci-dessus stipule simplement que la déformation due au flot hamiltonien conserve le volume (écoulement incompressible).

Nous avons déjà vu que la variation de  $p$  et  $q$  au cours du mouvement peut être considérée comme une transformation canonique. Donc, montrer que le volume  $V$  reste invariant par le flot hamiltonien, revient à montrer que le volume est un invariant canonique.

L'espace des phases étant un espace à  $2n$  dimensions, le produit de différentielles

$$dV = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$$

peut être considéré comme un élément infinitésimal de volume et le volume  $V$  s'écrit  $V = \int \dots \int dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$ . Pour  $n = 1$ ,  $V$  est en fait une surface, tandis que pour  $n \geq 2$   $V$  est un hypervolume.

C'est un invariant canonique si

$$\begin{aligned} \int \dots \int dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n &= \int \dots \int dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n \\ &= \int \dots \int \mathbf{J} dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n \end{aligned}$$

où

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial q_1} & \frac{\partial P_1}{\partial q_1} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial q_1} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial Q_1}{\partial p_n} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial p_n} & \frac{\partial P_1}{\partial p_n} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial p_n} \end{vmatrix}$$

est le déterminant de Jacobi ou jacobien. La démonstration du théorème revient à démontrer que  $\mathbf{J} = 1$  pour toute transformation canonique.

La manipulation des jacobiens jouit de certaines propriétés. On peut en particulier réécrire  $\mathbf{J}$  sous la forme

$$\mathbf{J} = \frac{\frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)}}{\frac{\partial(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n, P_1, \dots, P_n)}}$$

Par ailleurs, on peut réduire le rang d'un jacobien si  $\frac{\partial(x,y,a)}{\partial(u,v,a)} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$  est vérifiée. Dans notre cas, on obtient

$$\mathbf{J} = \frac{\left. \frac{\partial(Q_1, \dots, Q_n)}{\partial(q_1, \dots, q_n)} \right|_{P=Cst}}{\left. \frac{\partial(p_1, \dots, p_n)}{\partial(P_1, \dots, P_n)} \right|_{q=Cst}} = \frac{\mathbf{J}_1}{\mathbf{J}_2}$$

où  $\mathbf{J}_1 = \det(A)$  et  $\mathbf{J}_2 = \det(B)$ , les matrices  $A$  et  $B$  étant définies par

$$A_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \quad \text{et} \quad B_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial P_j}$$

Si on choisit comme fonction génératrice de la transformation canonique  $G_2(q, P)$ , on a les relations suivantes

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{\partial G_2}{\partial P_i} \\ p_i &= \frac{\partial G_2}{\partial q_i} \end{aligned}$$

ce qui fournit

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 G_2}{\partial q_j \partial P_i} \quad \text{et} \quad B_{ij} = \frac{\partial^2 G_2}{\partial P_j \partial q_i}$$

Ainsi,  $B = {}^t A$  est la matrice transposée de  $A$  et  $\det(B) = \det(A)$ , autrement dit  $\mathbf{J} = 1$ .

### Invariants intégraux de Poincaré

Soit la grandeur suivante

$$I_1 = \int \int \sum_i dq_i dp_i$$

où l'intégration s'effectue sur une surface à 2 dimensions  $S$  quelconque (en fait une variété) de l'espace des phases. On peut démontrer très facilement que  $I_1$  est un invariant canonique. Soient deux coordonnées  $u$  et  $v$  indépendantes, permettant de caractériser tout point appartenant à la surface  $S$ . Pour tous indices  $i$  et  $k$  nous sommes capables d'effectuer les changements de variables suivants

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(u, v) \\ p_i &= p_i(u, v) \\ Q_k &= Q_k(u, v) \\ P_k &= P_k(u, v) \end{aligned}$$

où les variables  $(Q, P)$  sont reliées aux  $(q, p)$  par une transformation canonique. L'invariance canonique de  $I_1$  est assurée dès lors que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \int \sum_i dq_i dp_i = \int \int \sum_i \mathbf{J}_i du dv \\ &= \int \int \sum_k dQ_k dP_k = \int \int \sum_k \mathbf{J}'_k du dv \end{aligned}$$

autrement dit, si on montre que

$$\sum_i \mathbf{J}_i = \sum_k \mathbf{J}'_k$$

avec les jacobiens  $\mathbf{J}_i = \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(u, v)}$  et  $\mathbf{J}'_k = \frac{\partial(Q_k, P_k)}{\partial(u, v)}$ . Utilisant les règles de calcul des jacobiens et la fonction génératrice  $G_2(q, P, t)$ , il vient

$$\mathbf{J}_i = \frac{\frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(q_i, P_i)}}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(q_i, P_i)}} = \frac{1}{\mathbf{A}_i} \begin{vmatrix} \frac{\partial q_i}{\partial q_i} & \frac{\partial p_i}{\partial q_i} \\ \frac{\partial q_i}{\partial P_i} & \frac{\partial p_i}{\partial P_i} \end{vmatrix} = \frac{1}{\mathbf{A}_i} \frac{\partial p_i}{\partial P_i} = \frac{1}{\mathbf{A}_i} \frac{\partial^2 G_2}{\partial P_i \partial q_i}$$

tandis que l'autre jacobien devient

$$\mathbf{J}'_k = \frac{\frac{\partial(Q_k, P_k)}{\partial(q_k, P_k)}}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(q_k, P_k)}} = \frac{1}{\mathbf{A}_k} \begin{vmatrix} \frac{\partial Q_k}{\partial q_k} & \frac{\partial P_k}{\partial q_k} \\ \frac{\partial Q_k}{\partial P_k} & \frac{\partial P_k}{\partial P_k} \end{vmatrix} = \frac{1}{\mathbf{A}_k} \frac{\partial Q_k}{\partial q_k} = \frac{1}{\mathbf{A}_k} \frac{\partial^2 G_2}{\partial q_k \partial P_k}$$

Il est donc évident que  $\sum_i \mathbf{J}_i = \sum_k \mathbf{J}'_k$ .

On peut recommencer de la même manière pour la grandeur suivante

$$I_2 = \int \int \int \int \sum_i dq_i dp_i$$

où l'intégration s'effectue sur une hypersurface  $S$  de dimension 4 (ce qui suppose un espace des phases de dimension  $2n$  avec  $n \geq 2$ ). Dans ce cas, il faut 4 coordonnées indépendantes pour caractériser un point de  $S$  et on reproduit la même démonstration que ci-dessus.

D'une façon générale, Poincaré a montré que toutes les intégrales de la forme

$$I_s = \int \int \dots \int \int \sum_i dq_i dp_i \quad (3.31)$$

étendues à des variétés  $S$  à  $2s$  dimensions sont des invariants canoniques, dans un espace des phases à  $2n$  dimensions ( $n \geq s$ ).

Remarques: La conservation du volume n'est qu'un cas particulier, obtenu pour  $s = n$ . Ce n'est d'ailleurs que pour ce cas là que l'on n'est pas obligés de passer par des variables intermédiaires (comme  $u$  et  $v$ ), puisque tous les  $q_i$  et  $p_i$  sont mis en jeu (ce qui simplifie la démonstration comme on l'a vu).

### 3.8.3 Théorème de Liouville: lien avec la physique statistique

**Théorème:** Soit  $D = dN/dV$  la densité d'états d'un système mécanique au voisinage d'un point de l'espace des phases. Cette densité d'états vérifie

$$\frac{dD}{dt} = 0 \quad (3.32)$$

et est donc une grandeur qui se conserve lors de l'évolution du système.

Soit  $dN$  le nombre d'états contenus dans le volume  $dV$  de l'espace des phases. Nous avons vu que  $dV$  est un invariant canonique, ce qui signifie qu'il reste constant lors de l'évolution du système. Par ailleurs, le nombre d'états  $dN$  reste également constant, car aucune trajectoire ne peut traverser la surface frontière définissant le volume  $dV$ . En effet, si c'était le cas, alors deux conditions initiales différentes mèneraient au même état (celui situé à la frontière), ce qui est en contradiction avec l'unicité des solutions. Le quotient  $dN/dV$  est donc une constante.

Le théorème de Liouville a surtout une importance en physique statistique, où le nombre de particules  $N$  est très grand. L'évolution temporelle de la densité d'états (ie. densité de particules dans un état donné) s'écrit

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{dD}{dt} - \{D, H\} = \{H, D\}$$

A l'équilibre statistique, le nombre de particules dans un état donné doit être constant. Comme  $dV$  reste également constant, on obtient  $\frac{\partial D}{\partial t} = 0$  c'est à dire

$$\{H, D\} = 0 \quad (3.33)$$

Pour assurer alors l'équilibre statistique, il suffit de choisir  $D$  comme fonction des constantes du mouvement...

Exemple: Ainsi l'ensemble microcanonique est obtenu pour  $D = D_0 \delta_{E_0}$ , c'est à dire une constante pour une énergie donnée  $E_0$ , nulle sinon.

## 3.9 Systèmes intégrables

### 3.9.1 Théorème de Arnold-Liouville

De nos jours, il est facile de résoudre par ordinateur les équations du mouvement de nombreux systèmes, une fois choisies les conditions initiales. Mais très souvent, ce n'est pas cela que nous désirons.

Cette méthode ne nous permet en effet que de calculer une trajectoire particulière dans l'espace des phases, alors que nous pouvons désirer avoir une image de l'ensemble des comportements possibles du système (comme pour le pendule). Par exemple: savoir si l'axe de rotation de la Terre est stable ou chaotique, connaître les régimes de fonctionnement non chaotique des réacteurs etc...

Par ailleurs, il est des systèmes (ex: problème à  $N$  corps) pour lesquels l'intégration numérique est (encore) hors de portée et leur connaissance passe donc par une étude analytique. Enfin, on peut ne s'intéresser qu'à certaines caractéristiques d'un système, comme par exemple vouloir connaître sa (ou ses) période(s) et savoir à quelle(s) condition(s) celle(s)-ci reste(nt) stable(s).

**Définition:** Un système est dit intégrable si l'on peut caractériser qualitativement son comportement (les trajectoires) dans l'espace des phases.

**Théorème de Arnold-Liouville (1963)** (non démontré): un système mécanique à  $n$  degrés de liberté est intégrable s'il possède les trois propriétés suivantes:

- 1- Il existe  $n$  intégrales premières  $I_i$ ;
- 2- Elles sont indépendantes;
- 3- Elles sont en involution.

La première propriété nécessite la recherche au préalable des  $n$  intégrales premières d'un système. Il faut donc rechercher l'ensemble des propriétés d'invariance liées à l'espace-temps, utiliser les crochets de Poisson et surtout se laisser guider par l'intuition physique ou mathématique (symétries cachées). Si le système est fermé, alors  $H = I_1$  est un invariant. Alors,  $I_i$  est une intégrale première si

$$\{I_i, I_1\} = 0 \quad \forall i = 2, \dots, n$$

On a donc  $n - 1$  relations vérifiées par  $I_1$ .

La seconde propriété stipule l'indépendance des invariants: l'espace formé par l'intersection des surfaces  $I_i = Cte$  doit être de dimension  $n$ . Chaque invariant doit apporter une information supplémentaire.

La troisième propriété est assez contraignante. Les intégrales premières sont en involution si

$$\{I_i, I_j\} = 0 \quad \forall i, j \leq n \quad (3.34)$$

autrement dit si  $I_i$  reste constante le long du flot  $g_{I_j}^t$ . Cela fournit  $n(n - 1)/2$  relations en tout, ce qui pour  $n > 2$  est plus contraignant que les  $n - 1$  relations. Pour  $n = 2$ , la condition d'involution est équivalente à celle d'indépendance.

Une conséquence immédiate de ce théorème est que tout système conservatif à 1 degré de liberté est intégrable. A plus de dimensions, les systèmes intégrables sont l'exception plutôt que la règle.

### 3.9.2 Cartes et atlas symplectiques

Nous l'avons vu à maintes reprises, le "bon" choix des coordonnées  $(q, p)$  est celui où la dynamique est la plus simple. Faire un choix de coordonnées, c'est se doter d'une **carte** (langage de géographe). Mais cette carte peut n'avoir d'intérêt qu'au voisinage d'un point. Par exemple dans le cas du pendule à 1D, nous avons introduit une transformation ponctuelle ramenant le hamiltonien à l'expression particulièrement simple

$$H = \frac{\omega}{2}(P^2 + Q^2)$$

mais valable uniquement au voisinage du point elliptique.

Pour représenter correctement l'ensemble de l'espace des phases d'un système dynamique complexe, il est en général nécessaire d'avoir un ensemble de cartes. Elles correspondent par exemple aux divers changements de coordonnées au voisinage des divers extrema (minima et maxima) locaux du potentiel et autres points singuliers. On dit que ces cartes forment un **atlas** si elles possèdent des zones de recouvrement, autrement dit si elles sont compatibles (les relations de passage  $Q(q, p, t)$  et  $P(q, p, t)$  de l'une à l'autre doivent être différentiables).

Cet atlas sera dit **symplectique** si chacune de ces cartes correspond à une transformation canonique, autrement dit si, sur chacune d'elles, la structure formelle des équations de Hamilton est préservée.

D'après ce que nous avons vu précédemment, les cartes les plus appropriées sont celles où les coordonnées sont des invariants du système. Il nous faudrait donc trouver un procédé permettant d'obtenir le plus grand nombre possible d'invariants d'un système: l'utilisation des crochets de Poisson mais surtout la recherche systématique des propriétés de symétrie du système devient nécessaire. Cette démarche, initiée par les travaux de Hamilton et de Jacobi, est celle qui perdure désormais en physique.





# Chapter 4

## Systemes hamiltoniens

### 4.1 L'équation de Hamilton-Jacobi

#### 4.1.1 La fonction principale de Hamilton

La façon la plus simple de s'assurer qu'en faisant un changement de variables on tombe sur des nouvelles variables  $P$  et  $Q$  cycliques, c'est naturellement d'imposer que le nouvel hamiltonien  $H'(P, Q)$  soit nul. Le mouvement est alors trivial puisque

$$\begin{aligned}\dot{Q}_k &= \frac{\partial H'}{\partial P_k} = 0 \\ \dot{P}_k &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_k} = 0\end{aligned}$$

ce qui signifie qu'il y a  $2n$  invariants, fonctions des  $2n$  conditions initiales. La condition de transformation canonique (3.6) s'écrit alors

$$H(q, p, t) - \sum_k p_k \dot{q}_k + \frac{dG}{dt} = 0 \quad (4.1)$$

Ici, on a le choix de la fonction génératrice. Si l'on choisit  $G = G_2(q, P, t)$ , alors

$$\frac{dG_2}{dt} = \sum_k \frac{\partial G_2}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_k \frac{\partial G_2}{\partial P_k} \dot{P}_k + \frac{\partial G_2}{\partial t}$$

Le deuxième terme est nul par construction, puisque tous les  $P_k$  sont des invariants, tandis que  $p_k = \frac{\partial G_2}{\partial q_k}$ . On obtient alors l'équation suivante,

$$H(q_k, \frac{\partial G}{\partial q_k}, t) + \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \quad (4.2)$$

connue sous le nom d'équation de Hamilton-Jacobi. La solution de cette équation est justement la fonction  $G(q, t; P)$ , fonction de  $n + 1$  variables (les  $n$   $q_k$  et le temps: les  $n$   $P_k$  agissent comme des paramètres puisqu'invariants)<sup>1</sup>. Ainsi, la résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi nous fournit la fonction génératrice de la transformation canonique souhaitée. La solution est appelée **fonction principale de Hamilton**.

**Remarque:** Cette approche reste valable même si l'hamiltonien de départ  $H(p, q, t)$  dépend explicitement du temps.

---

<sup>1</sup>La fonction génératrice  $G$  dépend de  $n + 1$  variables mais seulement de  $n$  invariants. Les invariants sont simplement les constantes d'intégration qui apparaissent lors de la résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi. A  $n + 1$  variables correspondent donc  $n + 1$  constantes. Mais l'une d'entre elles est additive. Comme  $G$  n'intervient que par ses dérivées dans l'équation de Hamilton-Jacobi, cette constante n'intervient pas et seules  $n$  sont pertinentes.

### 4.1.2 L'action hamiltonienne

#### Une nouvelle vision de l'action

Peut-on attribuer un sens à la fonction principale de Hamilton? Remarquons que

$$\frac{dG}{dt} = \sum_k \frac{\partial G}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial G}{\partial t} = \sum_k p_k \dot{q}_k - H = L$$

où  $L$  est le lagrangien du système, lui-même étant la dérivée totale de l'action  $S$  par rapport au temps. La fonction principale de Hamilton n'est autre que l'action hamiltonienne, définie par

$$S(q, t; P) = \int_{t_1}^t L dt \quad (4.3)$$

L'action hamiltonienne n'est pas tout à fait l'action  $S(q)$  que nous avons introduit avec le principe variationnel, à savoir

$$S(q) = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

Au chapitre II, l'action était vue comme une fonctionnelle des chemins  $q$ , *rendue extrémale par la trajectoire réelle entre deux points fixes*  $q_1(t_1)$  et  $q_2(t_2)$ . Ici, l'action hamiltonienne  $S = S(q, t; P)$  dépend aussi du temps (et des conditions initiales). On peut donc la voir comme une fonctionnelle des chemins  $q$  où seul le point de départ est maintenu fixe.

Mais si on laisse le point d'arrivée libre, on perd une contrainte par rapport au calcul variationnel effectué au chapitre II. Il faut donc la remplacer par une autre. Dans notre dérivation de l'équation de Hamilton-Jacobi, nous avons imposé que notre changement de variables conservait les équations de Hamilton. Or celles-ci sont équivalentes aux équations de Lagrange. Il est donc normal d'être obligés de réutiliser cette information. *On va donc exiger que chaque chemin suivi soit une trajectoire possible mais aboutissant à un point d'arrivée laissé libre.*

#### Principe variationnel

Démontrons cette conjecture, à savoir que l'équation de Hamilton-Jacobi découle bien d'un principe variationnel, mais construit avec l'action hamiltonienne.

Soit l'action écrite sous la forme suivante

$$S(q, t; q_1, t_1) = \int_{t_1}^t L(q, \dot{q}, t) dt$$

On part d'un point fixe dans l'espace des configurations, mais le point d'arrivée est laissé libre. Par contre, on suit la trajectoire réelle (et pas des chemins virtuels), ce qui signifie que  $q_i(t)$  doit obéir aux équations de Lagrange. La différentielle totale de l'action est par définition

$$dS = \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S}{\partial t} dt = L dt \quad (4.4)$$

Le premier terme correspond à une variation  $\delta S_t$  de l'action à  $t$  constant, donc ce dont nous avons déjà l'habitude. Evaluons-le en faisant une variation des trajectoires  $\delta \vec{q} = \epsilon \vec{\eta}$ , telles que  $\delta \vec{\eta}(t_1) = \vec{0}$ . La variation  $\delta S_t$  associée est alors

$$\begin{aligned} \delta S_t &= \sum_i \left. \frac{\partial S}{\partial q_i} \right|_t \delta q_i = \int_{t_1}^t \delta L dt \\ &= \int_{t_1}^t \sum_i \left[ \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right] dt = \int_{t_1}^t \sum_i \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right] dt \\ &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i = \sum_i p_i \delta q_i \end{aligned}$$

puisque  $t$  est fixé et que  $\delta q_i(t_1) = 0$ . On en déduit donc

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \quad (4.5)$$

Repartant de la différentielle totale de l'action, on obtient

$$\begin{aligned} dS &= \sum_i p_i dq_i + \frac{\partial S}{\partial t} dt = L dt \\ L &= \sum_i p_i \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial t} \\ 0 &= H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.6)$$

qui est bien l'équation de Hamilton-Jacobi.

**Remarque:** En suivant la démonstration, on voit qu'il a suffi d'exiger  $\delta q = 0$  en  $t_1$ , rien concernant  $\delta p$ . En effet, il n'est pas possible d'exiger quoi que ce soit d'autre, puisqu'on demande que chaque chemin suivi corresponde à une trajectoire réelle aboutissant à un point d'arrivée différent. Il faut donc se laisser libre la direction de "départ", à savoir les  $p_i$  à  $t = t_1$ . Ceci se comprendra mieux plus loin (avec l'analogie de la construction de Huygens).

### 4.1.3 Méthode générale de résolution

Tout comme les équations de Lagrange ou les équations canoniques de Hamilton, l'équation de Hamilton-Jacobi est le point de départ d'une nouvelle méthode générale de résolution des problèmes mécaniques.

Montrons que le problème est effectivement formellement résolu dès lors que la fonction génératrice est connue. Soit  $S(q_k, t; P_k)$  cette fonction, obtenue par résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi (4.2). On a

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k} \quad (4.7)$$

$$Q_k = \frac{\partial S}{\partial P_k} \quad (4.8)$$

Les équations (4.7) sont valables à tout instant. Ces  $n$  équations fournissent à  $t = 0$  un lien entre les conditions initiales et les  $P_k$ . On connaît donc, en principe, la valeur des  $P_k$  et par conséquent de  $\frac{\partial S}{\partial P_k}$ . Par construction les  $Q_k$  sont aussi des invariants. Les  $n$  équations (4.8) fournissent également à  $t = 0$  un lien entre les  $Q_k$  et les conditions initiales, permettant de connaître ces  $Q_k$ . On a presque fini: les expressions  $p_k(t)$  sont alors fournies par (4.7) tandis que les  $q_k(t)$  sont obtenues en inversant le système des  $n$  équations (4.8).

En pratique cependant, on utilise une autre façon de calculer les  $q_k(t)$ , mettant en jeu la résolution de  $n$  ODE du premier ordre (voir les applications).

On a remplacé les  $2n$  ODE du premier ordre de Hamilton par la résolution d'une PDE (équation aux dérivées partielles) du premier ordre en temps, non linéaire (si  $S_1$  et  $S_2$  sont solutions,  $S_1 + S_2$  ne l'est pas), suivie ensuite par la résolution de  $n$  ODE du premier ordre et  $n$  inversions. Ce n'est pas forcément un gain, car la résolution d'une PDE est en général très difficile mathématiquement. Concrètement, seuls les systèmes séparables seront intéressants pour cette méthode.

### 4.1.4 Méthode de séparation des variables

#### Notion de séparabilité

Si l'équation de Hamilton-Jacobi peut se mettre sous la forme (après avoir remplacé l'expression de l'hamiltonien  $H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t)$ )

$$\Phi_n \left( q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t, \frac{\partial S}{\partial t}, F_1 \left[ q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1} \right] \right) = 0 \quad (4.9)$$

alors on peut chercher une solution de la forme

$$S = S'(q_i, t) + S_1(q_1) \quad \text{pour } i \neq 1 \quad (4.10)$$

En effet, l'équation (4.9) se met sous la forme

$$\Phi_n \left( q_i, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, t, \frac{\partial S'}{\partial t}, F_1 \left[ q_1, \frac{dS_1}{dq_1} \right] \right) = 0$$

qui doit être vérifiée quel que soit  $q_1$ . Cela implique que les termes ne dépendant que de  $q_1$  sont constants, c'est à dire

$$\begin{aligned} F_1 \left[ q_1, \frac{dS_1}{dq_1} \right] &= \alpha_1 \\ \Phi_{n-1} \left( q_i, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, t; \alpha_1 \right) &= 0 \end{aligned}$$

La première équation se résout sans problème (ODE du premier ordre), tandis que nous avons diminué de un le nombre de variables intervenant dans la seconde. Il faut espérer pouvoir continuer cette tactique le plus longtemps possible.

Dans le cas particulier où le système est conservatif, le temps n'intervient pas explicitement dans le hamiltonien,  $H = E$  et l'équation de Hamilton-Jacobi peut se lire  $\frac{\partial S}{\partial t} = -E$ , qui s'intègre facilement et fournit

$$S(q, t; P) = S_0(q; P) - Et \quad (4.11)$$

La nouvelle fonction  $S_0(q; P)$  est parfois appelée **fonction caractéristique de Hamilton**. Elle est déterminée par

$$H(q_i, \frac{\partial S_0}{\partial q_i}) = E$$

Un problème sera entièrement séparable si la fonction caractéristique de Hamilton peut s'écrire

$$S_0 = \sum_i S_i(q_i; P_1, \dots, P_n) \quad (4.12)$$

Dans ce cas, la résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi se ramène à la simple résolution de  $n$  ODE du premier ordre de la forme

$$F_i \left[ q_i, \frac{dS_i}{dq_i} \right] = \alpha_i$$

où les  $\alpha_i$  sont des constantes.

### Variables cycliques

Si une variable  $q_1$  est cyclique, elle n'apparaît jamais dans le hamiltonien de telle sorte que l'on doit résoudre

$$F_1 \left[ \frac{dS_1}{dq_1} \right] = \alpha_1$$

La solution est évidemment  $S_1 = \alpha'_1 q_1$ . Or, on a également  $p_1 = \frac{\partial S}{\partial q_1} = \alpha'_1$ , ce qui détermine la constante (rien de nouveau: si  $q_1$  est cyclique alors  $p_1$  est un invariant). L'action hamiltonienne s'écrit alors

$$S(q, t; P) = S'(q_i, t) + p_1 q_1 \quad (4.13)$$

où l'un des  $n$  invariants  $P_i$  vient d'être identifié:  $P_1 = p_1$ . Noter également que ceci constitue une généralisation du cas conservatif.

### Commentaires

Il n'existe pas de critère simple pour savoir si l'équation de Hamilton-Jacobi sera séparable ou pas. La séparabilité dépend du système de coordonnées choisi. La principale difficulté consiste donc à introduire des variables commodes, mais nous ne sommes guidés par aucune règle...

Ainsi, le problème de la force centrale est séparable en coordonnées polaires, mais pas en cartésiennes. Le potentiel  $V = \frac{\alpha}{r} - Fz$  décrivant un champ coulombien superposé à un champ homogène est séparable en coordonnées paraboliques. Le potentiel  $V = \frac{\alpha_1}{r_1} + \frac{\alpha_2}{r_2}$ , décrivant les champs coulombiens créés par deux centres immobiles, est séparable en coordonnées elliptiques (Landau, section 48). Le problème à 3 corps est non séparable, mais la plupart des problèmes en physique atomique le sont.

### 4.1.5 Applications à quelques problèmes simples

#### La particule libre 1D

Soit une particule libre de masse  $m$  avec une seul degré de liberté  $q$ . Son hamiltonien s'écrit

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m}$$

L'équation de Hamilton-Jacobi (HJ) est alors

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

L'hamiltonien ne dépendant pas explicitement du temps, on a  $H = E$  conservé et la fonction génératrice s'écrit  $S(q; P) = S_0(q) - Et$ . L'équation (HJ) fournit

$$\frac{dS_0}{dq} = \pm \sqrt{2mE}$$

c'est à dire  $S(q; P) = \pm \sqrt{2mE}q - Et$ . La fonction principale engendre une transformation canonique où toutes les variables sont cycliques, c'est à dire  $\dot{P} = 0, \dot{Q} = 0$ , donc des invariants. L'invariant évident ici est  $E$ . Si on choisit  $P = E$ , alors la nouvelle coordonnée est

$$Q = \frac{\partial S}{\partial E} = \pm \sqrt{\frac{m}{2E}}q - t$$

ce qui, par inversion, fournit

$$q = \sqrt{\frac{2E}{m}}(t \pm Q)$$

Le signe  $\pm$  est imposé par les conditions initiales.

Une deuxième méthode, plus rapide, consiste à utiliser le lagrangien. En effet,

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{dS_0}{dq} = \pm \sqrt{2mE}$$

ce qui fournit immédiatement  $q(t) = \pm \sqrt{\frac{2E}{m}}t + q_0$ . Cette méthode est préférable, car elle évite d'intégrer  $\frac{dS_0}{dq}$  pour obtenir l'expression de  $S_0$ , puis de calculer  $\frac{\partial S}{\partial E}$  pour avoir  $Q(q)$  et enfin de l'inverser. Mais elle nécessite la connaissance du lagrangien, ce qui peut ne pas être le cas.

#### La chute libre 1D

Soit une particule de masse  $m$  soumise à un potentiel gravitationnel constant. L'hamiltonien s'écrit

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + mgq$$

et fournit donc l'équation de Hamilton-Jacobi (HJ)

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + mgq + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

L'hamiltonien ne dépendant pas explicitement du temps, on a  $H = E$  conservé et la fonction principale s'écrit  $S(q, t) = S_0(q) - Et$ . L'équation (HJ) devient

$$\frac{dS_0}{dq} = \pm \sqrt{2m(E - mgq)}$$

On a deux méthodes possibles de résolution pour obtenir  $q(t)$ .

(a) Dans la première, on intègre cette équation et on obtient

$$S_0(q) = \pm \frac{2}{3g} \sqrt{\frac{2}{m}} (E - mgq)^{3/2}$$

La fonction génératrice  $S$  étant maintenant connue, on choisit  $P = E$  (par ex), et la nouvelle coordonnée est obtenue en calculant

$$Q = \frac{\partial S}{\partial E} = \pm \frac{1}{g} \sqrt{\frac{2}{m}} (E - mgq)^{1/2} - t$$

ce qui, après inversion, donne

$$q = \frac{E}{mg} - \frac{g}{2} (t + Q)^2$$

(b) Dans la deuxième méthode, on utilise le Lagrangien

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \\ &= \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{dS_0}{dq} = \pm \sqrt{2m(E - mgq)} \end{aligned}$$

ce qui nous fournit une ODE du premier ordre qui s'intègre facilement et redonne le même résultat.

### L'oscillateur harmonique 3D

Soit l'hamiltonien suivant

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{p_i^2}{2m} + k_i \frac{x_i^2}{2} \right)$$

correspondant à un oscillateur harmonique de masse  $m$  et de constante de raideur  $k_i$  dans la direction  $x_i$ . Ce système étant fermé, l'énergie se conserve et la fonction génératrice s'écrit

$$S(x_1, x_2, x_3, t) = S_0(x_1, x_2, x_3) - Et$$

L'équation de Hamilton-Jacobi est séparable, en effet elle s'écrit

$$\sum_{i=1}^3 \left[ \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial x_i} \right)^2 + k_i \frac{x_i^2}{2} \right] = E$$

On cherche donc une solution de la forme  $S_0 = \sum_{i=1}^3 S_i(x_i)$ . On obtient alors

$$F_1(x_1) + F_2(x_2) + F_3(x_3) = E$$

qui doit être satisfaite quels que soient les  $x_i$ . Cela n'est possible que si  $F_i(x_i) = \alpha_i$  avec  $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = E$ , les  $\alpha_i$  étant des invariants fixés par les conditions initiales. On obtient alors

$$\frac{dS_i}{dx_i} = \pm \sqrt{2m \left( \alpha_i - k_i \frac{x_i^2}{2} \right)}$$

A ce stade, les deux méthodes s'offrent à nous. Soit on intègre cette équation et on obtient ainsi la fonction  $S_0$ , soit on repart du Lagrangien.

(a) La première donne en posant  $u = \sqrt{\frac{k_i}{2\alpha_i}} x_i = \sin \theta$ ,

$$S_i = \pm \frac{\alpha_i}{2\omega_i} (2\theta + \sin 2\theta)$$

où  $\omega_i^2 = k_i/m$ . En choisissant ensuite pour valeurs des nouveaux moments  $P_i = \alpha_i$ , on obtient

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial S_i}{\partial \alpha_i} - \frac{\partial E}{\partial \alpha_i} t \\ &= \pm \frac{1}{\omega_i} \arcsin \sqrt{\frac{k_i}{2\alpha_i}} x_i - t \end{aligned}$$

c'est à dire, après inversion,

$$x_i = \pm \sqrt{\frac{2\alpha_i}{k_i}} \sin \omega_i (t + Q_i)$$

(b) La deuxième méthode est beaucoup plus directe. On obtient en effet

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m \dot{x}_i \\ &= \frac{\partial S}{\partial x_i} = \frac{dS_i}{dx_i} = \pm \sqrt{2m \left( \alpha_i - k_i \frac{x_i^2}{2} \right)} \end{aligned}$$

fournissant

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pm \omega_i dt$$

c'est à dire  $\theta = \pm \omega_i t + \theta_i$ , ie. le même résultat.

### La force centrale

Nous avons vu que le mouvement d'une particule soumise à une force centrale s'effectue dans un plan et est décrite par le lagrangien (en coordonnées sphériques)

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r)$$

correspondant à un hamiltonien

$$H(r, \phi, p_r, p_\phi) = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\phi^2}{r^2} \right) + V(r)$$

indépendant du temps et  $H = E$ . La fonction génératrice de Hamilton-Jacobi s'écrit alors

$$S(r, \phi, t) = S_0(r, \phi) - Et$$

et on cherche des solutions de la forme  $S_0(r, \phi) = S_r(r) + S_\phi(\phi)$ . La variable  $\phi$  étant cyclique, on a immédiatement

$$S_\phi(\phi) = p_\phi \phi$$

et  $S(r, \phi, t) = S_r(r) + p_\phi \phi - Et$ . Il ne reste donc plus qu'à résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi, mise sous la forme

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{dW_r}{dr} \right)^2 + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + V(r) = E$$

c'est à dire

$$S_r = \pm \int \sqrt{2m(E - V) - \frac{p_\phi^2}{r^2}} dr$$

(a) En choisissant  $P_\phi = p_\phi$  et  $P_r = E$ , on obtient

$$\begin{aligned} Q_\phi &= \frac{\partial S}{\partial p_\phi} = \frac{\partial S_r}{\partial p_\phi} + \phi \\ &= \phi \pm \int \frac{p_\phi dr}{r^2 \sqrt{2m(E - V) - \frac{p_\phi^2}{r^2}}} \\ Q_r &= \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S_r}{\partial E} - t \\ &= \pm \int \frac{m dr}{\sqrt{2m(E - V) - \frac{p_\phi^2}{r^2}}} \end{aligned}$$

qui, par inversion, nous fourniront la trajectoire  $r(\phi)$  et la loi horaire  $r(t)$  ( $Q_\phi$  et  $Q_r$  sont des invariants).

(b) La méthode du lagrangien fournit

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} = \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{dS_r}{dr} = \pm \sqrt{2m(E - V) - \frac{p_\phi^2}{r^2}}$$

qui s'intègre par rapport au temps et donnera  $t(r)$  puis  $r(t)$  après inversion. De même, on a

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2 \dot{\phi}$$

et donc un lien  $\phi(r)$ :  $\frac{d\phi}{dr} = \frac{\dot{\phi}}{\dot{r}}$ . On obtient ainsi une intégrale identique à celle pour  $Q_\phi$ .

#### 4.1.6 Le principe de Maupertuis

Nous avons vu que l'action hamiltonienne, définie par

$$S(q, t; P) = \int_{t_1}^t \left( \sum_i p_i \dot{q}_i - H \right) dt$$

permettait de rendre compte de l'équation de Hamilton-Jacobi par un principe variationnel. C'est également la fonction génératrice de la transformation canonique qui produit des variables toutes cycliques. Pour un système fermé ( $H$  ne dépendant pas explicitement du temps),  $H$  est un invariant, de telle sorte que

$$S(q, t; P) = \int_{t_1}^t \sum_i p_i dq_i - H(t - t_1)$$

Par ailleurs, l'action s'écrit aussi dans le cas conservatif

$$S(q, t; P) = S_0(q; P) - Et$$

A une constante sans importance près, ces deux expressions sont égales et on obtient comme expression générale de la fonction caractéristique de Hamilton

$$S_0(q; P) = \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} \sum_i p_i dq_i \quad (4.14)$$



appelée plus couramment "action réduite". Le paramètre temps a évidemment disparu, l'intégration se faisant le long d'une trajectoire définie par les points  $\vec{q}_1$  et  $\vec{q}$  dans l'espace des configurations.

**Principe de Maupertuis:** La trajectoire d'un système conservatif est déterminée par l'extrémisation de l'action réduite  $S_0$ .

En pratique, on peut calculer la trajectoire suivie par un système dynamique conservatif en utilisant l'action réduite. Il suffit en effet d'exprimer les impulsions en fonction des coordonnées ( $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ ) puis d'utiliser les techniques de calcul variationnel pour l'expression  $S_0$ . Prenons un système soumis à un potentiel  $V(q)$ . Dans ce cas,  $H = T + V = E$  et on a

$$\begin{aligned} \sum_i p_i dq_i &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dq_i = \sum_i \sum_j m_{ij} \dot{q}_j dq_i = \sum_{i,j} m_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i dt \\ &= 2(E - V)dt \end{aligned}$$

Exprimer l'intégrale de  $S_0$  en fonction du temps n'est pas habile car  $E$  est constant tandis que  $V = V(q)$ . Il vaut mieux exprimer  $dt$  en fonction des  $dq_i$ . Utilisant la conservation de l'énergie, on obtient

$$dt^2 = \sum_{i,j} \frac{m_{ij} dq_i dq_j}{2(E - V)}$$

d'où

$$S_0(\vec{q}) = \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} \sqrt{2(E - V) \sum_{i,j} m_{ij} dq_i dq_j} = \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} \sqrt{2(E - V)} ds \quad (4.15)$$

où le temps a disparu, remplacé par l'énergie  $E$  du système et où l'on a posé

$$ds^2 = \sum_{i,j} m_{ij} dq_i dq_j$$

et dont l'interprétation est le carré de l'élément de distance infinitésimale entre deux points de l'espace des configurations (variété différentiable). Ainsi, pour un système à 1 degré de liberté  $ds^2 = m dl^2$  où  $dl$  est l'élément infinitésimal de longueur le long de la trajectoire.

**Remarque:** Il faut comprendre que l'intégrale est définie sur l'espace des configurations, c'est à dire d'un point  $\vec{q}_1 = \vec{q}(t_1)$  vers un point  $\vec{q}(t)$ . L'action réduite dans un cas à  $n$  degrés de liberté est

$$S_0(\vec{q}) = \int_{t_1}^t \sum_i p_i \dot{q}_i dt = \int_{t_1}^t p_1 \dot{q}_1 dt + \dots + \int_{t_1}^t p_n \dot{q}_n dt = \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} p_1 dq_1 + \dots + \int_{\vec{q}_1}^{\vec{q}} p_n dq_n$$

#### 4.1.7 Mécanique ondulatoire de Louis de Brooglie

Les exemples précédents montrent que, bien qu'offrant en elle-même une méthode de résolution des problèmes mécaniques, l'utilisation de l'équation de Hamilton-Jacobi n'est pas des plus pratiques. En général, il vaut mieux utiliser les équations de Lagrange ou les équations canoniques de Hamilton.

Concrètement, on peut néanmoins utiliser cette méthode pour construire une transformation canonique de fonction génératrice  $G(q, t; P)$ . En effet, il suffit de la choisir de telle façon que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} &= -H(q, p, t) \\ \frac{\partial G}{\partial q_k} &= p_k \end{aligned}$$

avec  $P_k$  et  $\frac{\partial G}{\partial P_k}$  constants.

En fait, l'importance de cette équation réside surtout dans la compréhension profonde qu'elle a apporté de la mécanique et dans le rôle qu'elle a joué dans l'élaboration de la mécanique quantique.

### Analogie avec la construction de Huygens

Nous avons vu que pour un système conservatif, l'action s'écrit

$$S(q, t) = S_0(q) - Et$$

où l'action réduite  $S_0(q)$  est indépendante du temps. En conséquence, les surfaces d'action réduite  $S_0(q)$  constante ont des positions fixes dans l'espace des configurations. Inversement, les surfaces d'égale action  $S$  obéissent à l'équation suivante

$$S_0(q) = S(q, t) + Et$$

Ainsi, prenons la surface  $S(q, t) = a$  où  $a$  est une constante. A  $t = 0$  cette surface coïncide avec la surface  $S_0(q) = a$ , définissant ainsi un lieu dans l'espace des configurations. Un instant  $dt$  plus tard, la surface  $S(q, t + dt) = a$  coïncide avec une autre surface, celle définie par  $S_0(q) = a + Edt$ . Autrement dit, les surfaces d'égale action se déplacent dans l'espace des configurations. *Ces surfaces peuvent être considérées comme des fronts d'ondes se propageant dans l'espace des configurations.*

Par ailleurs, nous avons déjà rencontré une propriété curieuse de l'équation de Hamilton-Jacobi que nous n'avons pas expliqué. En effet, elle provient bien d'un principe variationnel mais avec l'action hamiltonienne  $S(q, t)$ : le point d'arrivée est laissé libre. En fait, ce point d'arrivée dépend des conditions initiales, en particulier des valeurs des  $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ . Ceci peut s'écrire vectoriellement

$$\vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{q}} = \nabla S_0 \quad (4.16)$$

Or, rien n'a été imposé aux  $p_i$  au niveau du point de départ. Tout se passerait donc comme si le point d'arrivée (autrement dit la trajectoire réelle suivie par le système) dépendait de la direction initiale choisie. Et cette direction est orthogonale à la surface  $S(q, t) = a$ .

Ces deux éléments, propagation de surfaces d'ondes et trajectoires orthogonales, ressemblent à s'y méprendre à la construction de Huygens pour l'optique géométrique. Quelles seraient alors les propriétés des rayons lumineux que l'on pourrait rapprocher des propriétés des systèmes mécaniques?

- Les surfaces d'ondes lumineuses sont décrites par une phase constante  $\varphi(\vec{r}, t) = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$ ,  $\vec{k}$  étant le vecteur d'onde ( $k = 2\pi/\lambda$ ) et  $\omega$  sa pulsation.
- Dans un milieu d'indice de réfraction  $n(\vec{r})$  inhomogène, la vitesse de phase  $u = \frac{c}{n}$  des ondes lumineuses dépend de la position,  $c$  étant la vitesse de la lumière dans le vide. En conséquence les surfaces d'ondes sont déformées lorsqu'elles se propagent dans un milieu inhomogène.
- En optique géométrique, la trajectoire des rayons lumineux est orthogonale aux surfaces d'onde. Elle obéit au principe de Fermat

$$\delta \int c dt = \delta \int n ds = 0 \quad (4.17)$$

où  $u = \frac{ds}{dt}$  est la vitesse de phase de l'onde,  $ds$  étant une distance infinitésimale dans la direction normale aux surfaces d'ondes.

Pour suivre l'analogie jusqu'au bout, regardons ce qui se passe pour une particule de masse  $m$  dans un potentiel  $V(q)$ . Nous avons vu que les surfaces  $S(q, t) = \text{Constante}$  seraient l'équivalent des surfaces d'onde. Cela signifie une analogie entre action et phase. On y reviendra plus loin, pour l'instant abordons des questions simples:

#### A quelle vitesse de phase $u$ se déplace la surface $S = Cste$ ?

La variation  $dS_0$  due à un déplacement  $ds$  dans la direction orthogonale à cette surface est donnée par son gradient

$$dS_0 = \nabla S_0 \cdot M \vec{M}' = |\nabla S_0| ds$$

Or, le gradient est fourni par l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\frac{1}{2m}(\nabla S_0)^2 + V = E \quad (4.18)$$

tandis que  $dS_0 = E dt$ . On obtient donc une vitesse de déplacement de la surface

$$u = \frac{ds}{dt} = \frac{E}{|\nabla S_0|} = \frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}} \quad (4.19)$$

Puisque cette vitesse dépend de  $V(q)$  donc de la position, cela signifie que la surface va se déformer. En mécanique, l'espace des configurations (milieu de propagation de l'onde) est inhomogène...

Cette vitesse ne correspond pas à la vitesse  $v$  de la particule. En effet, celle-ci serait  $v = \sqrt{2T/m} = \sqrt{2(E-V)/m}$ , ce qui donne une relation

$$uv = \frac{E}{m} \quad (4.20)$$

analogue à celle reliant vitesse de phase  $u$  et vitesse de groupe  $v$  pour une onde. Si on pousse l'analogie à terme, c'est à dire si on exige que la mécanique se comporte comme l'électromagnétisme, on obtient

$$E = mc^2 \quad (4.21)$$

### Quel est l'indice de réfraction du "milieu" mécanique?

Nous venons de voir que la vitesse de phase  $u$  de la surface d'onde  $S = Cste$  dépend de la position. Cela implique un indice de réfraction inhomogène. En optique géométrique, une onde se propageant dans un milieu d'indice de réfraction  $n$  est caractérisée par une longueur de chemin optique  $L$  vérifiant l'équation iconale (de icône, du grec image)

$$(\nabla L)^2 = n^2 \quad (4.22)$$

Ici, l'équation maitresse est évidemment l'équation de Hamilton-Jacobi, qui peut se mettre sous la forme

$$(\nabla S_0)^2 = 2m(E - V) \quad (4.23)$$

Puisqu'elle possède la même structure formelle, on peut associer

$$L \longleftrightarrow S_0 \quad (4.24)$$

$$n \longleftrightarrow \sqrt{2m(E - V)} \quad (4.25)$$

Du coup, on "comprend" enfin l'analogie entre le principe de Fermat et le principe de Hamilton. Ils sont en effet équivalents dans le cas qui nous intéresse ici puisque ce dernier se ramène au principe de Maupertuis

$$\delta \int n ds = 0 \longleftrightarrow \delta S_0 = \delta \int \sqrt{2m(E - V)} ds = 0 \quad (4.26)$$

### Quelle est la fréquence $\nu$ de l'onde associée à la particule?

Pour que l'analogie soit complète il nous faut trouver l'expression de la fréquence  $\nu$  de l'onde associée à une particule. Les fronts d'onde étant définis par  $S = S_0 - Et = Cste$  correspondent à des phases constantes. On peut donc faire l'analogie

$$\varphi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = 2\pi \left( \frac{L(r)}{\lambda_0} - \nu t \right) \longleftrightarrow S = S_0(q) - Et$$

où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide. Cela signifie, puisque  $S_0$  joue le rôle du chemin optique à une constante multiplicative près, que l'énergie mécanique  $E$  doit être proportionnelle à la fréquence  $\nu$  de l'onde associée. On peut donc poser

$$E = h\nu \quad (4.27)$$

où la constante  $h$  est appelée maintenant la constante de Planck<sup>2</sup>. La longueur d'onde étant  $\lambda = u/\nu = (E/mv)(h/E)$ , on obtient

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \quad (4.28)$$

puisque  $p = mv$  pour une particule. Cette dernière relation est connue sous le nom de relation de De Brooglie.

### Vers une mécanique ondulatoire ?

Nous avons vu, grâce à l'équation de Hamilton-Jacobi, l'analogie profonde de la mécanique avec l'optique géométrique. Mais il se trouve que l'optique géométrique n'est qu'une approximation des ondes électromagnétiques, décrites par les équations de Maxwell<sup>3</sup>. En particulier, tous les phénomènes ondulatoires, tels que la diffraction ou les interférences, ne peuvent être décrits dans le cadre de l'optique géométrique. *Cela impliquerait-il alors que la mécanique classique ne soit qu'une approximation (du type optique géométrique) d'une réalité plus vaste (du type ondulatoire)?*

L'équation d'onde générale, issue des équations de Maxwell, s'écrit

$$\left( \Delta^2 - \frac{n^2}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \right) \Phi = 0 \quad (4.29)$$

et devient pour des ondes planes de la forme  $\Phi = \Phi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$

$$\left( \Delta^2 + \frac{\omega^2}{u^2} \right) \Phi = 0$$

Si l'on suppose (comme nous l'avons déjà fait) que l'équation ondulatoire (donc fondamentale) de la mécanique est équivalente à celle de l'électromagnétisme, alors on obtient qu'une fonction  $\Psi$  en mécanique devrait vérifier

$$\begin{aligned} \left( \Delta^2 + \frac{\omega^2}{u^2} \right) \Psi &= 0 \\ \Delta^2 \Psi + \frac{p^2}{\hbar^2} \Psi &= 0 \\ \frac{\hbar^2}{2m} \Delta^2 \Psi + (E - V) \Psi &= 0 \\ \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta^2 + V \right) \Psi &= E \Psi \\ H \Psi &= E \Psi \end{aligned}$$

<sup>2</sup>En conséquence, l'action normalisée  $S/\hbar$  où  $\hbar = h/2\pi$  a la dimension d'une phase.

<sup>3</sup>Dans les milieux inhomogènes, une onde plane n'est pas une solution car le front d'onde se déforme. En posant  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  où  $\lambda_0$  est la longueur d'onde dans le vide, on recherche des solutions de la forme

$$\Phi = \Phi'_0 e^{A(r)} e^{ik_0(L(r) - ct)}$$

pour des ondes se propageant dans une direction donnée,  $A(r)$  étant une mesure de l'amplitude de l'onde (constante pour une onde plane) et  $L(r)$  du chemin optique (égal à  $nr$  pour un indice  $n$  constant). L'équation d'onde se ramène alors à un système de deux équations

$$\begin{aligned} \nabla^2 A + (\nabla A)^2 + k_0^2 [n^2 - (\nabla L)^2] &= 0 \\ \nabla^2 L + 2\nabla A \cdot \nabla L &= 0 \end{aligned}$$

Soit  $l$  l'échelle spatiale de variation de l'amplitude  $A$ , donc celle de l'indice  $n$  (puisque il en est la cause). La deuxième équation montre que le chemin optique varie alors sur la même échelle. L'approximation de l'optique géométrique consiste à supposer que  $l \gg \lambda_0$ . Cela signifie alors que le 3ème terme de la première équation est dominant, ce qui implique

$$(\nabla L)^2 = n^2$$

et qui est l'équation iconale. L'analogie en mécanique serait une longueur d'onde beaucoup plus petite que l'échelle de variation du potentiel.

où l'on reconnaît la version stationnaire de l'équation de Schrödinger de la mécanique quantique. . .

L'équivalence de l'équation de Hamilton-Jacobi et de l'équation iconale fut établie par Hamilton lui-même en 1834. Mais il n'y avait à cette époque aucune preuve expérimentale de l'existence de phénomènes ondulatoires en rapport avec la matière. L'équation d'onde correspondante fut découverte par De Broglie et Schrödinger presque un siècle plus tard, en 1926.

Le fait que l'on ne trouve, par ces analogies, que la forme stationnaire de la mécanique quantique est assez compréhensible. Tout se passe en effet comme si nous ne traitions, en mécanique classique, que de grandeurs moyennées sur le temps et donc stationnaires du point de vue de la mécanique quantique. Il s'avère que la mécanique classique est effectivement une approximation de la mécanique quantique, obtenue dans la limite  $\hbar \rightarrow 0$  ( $\hbar = (E/c)\lambda$ ). Remarquer cependant que, dans notre approche classique, il n'y a aucune nécessité d'introduire la moindre quantification. Autant l'énergie que l'action peuvent prendre des valeurs continues. Tout ce qui a été dit ici, c'est que la matière pourrait en fait obéir à une équation ondulatoire et donc posséder des propriétés en rapport (interférences, diffraction). La notion de quantification est une notion supplémentaire qui sera abordée en mécanique quantique. Il suffit ici de savoir que cette quantification se traduit (entre autres) par une discrétisation des valeurs prises par l'action  $S$  et l'énergie  $E$  d'une particule.

## 4.2 Variables canoniques angles-actions

Dans de nombreux cas de systèmes intégrables, le mouvement sera périodique ou quasi-périodique. Nous allons voir qu'il existe dans ce cas là un nouveau jeu de variables particulièrement adapté, les variables canoniques. Ce sont également les variables privilégiées pour l'étude des mouvements perturbés.

### 4.2.1 Systèmes fermés périodiques

Pour un système à 1 degré de liberté, il existe deux types de mouvements périodiques possibles, déjà rencontrés avec le pendule:

- la libration:  $q(t)$  et  $p(t)$  sont des fonctions périodiques de même fréquence. La trajectoire dans l'espace des phases décrit une courbe fermée. On rencontre ce type de mouvement autour d'un minimum de potentiel par exemple.
- la rotation (ou circulation):  $q(t)$  n'est pas périodique mais  $q + q_0$  laisse le système invariant, tandis que  $p(t)$  reste bornée. La trajectoire dans l'espace des phases est ouverte mais  $q_0$ -périodique.

Pour un système à  $n$  degrés de liberté, le point représentatif du système va décrire une trajectoire compliquée dans l'espace des phases, notre représentation se limitant à une projection dans un plan  $(q_i, p_i)$  par exemple.

**Définition 1:** Le mouvement d'un système à  $n$  degrés de liberté sera dit périodique si la projection de la trajectoire sur chaque plan  $(q_i, p_i)$  est périodique dans le sens défini pour un mouvement à 1 degré de liberté.

**Définition 2:** Si la période  $T_i$  associée à un degré de liberté  $q_i$  est la même pour tous les  $q_i$ , le mouvement du système sera dit simplement périodique. Si ce n'est pas le cas, le mouvement sera dit multiplement périodique ou quasi-périodique.

La conséquence essentielle ici, c'est que de tels systèmes ont un espace des phases borné. Par ailleurs, le mouvement étant périodique, cela signifie que le système est invariant par translation dans le temps et donc que l'hamiltonien  $H$  est une intégrale première.

Dans la suite, on ne considère que des systèmes de ce type.

## 4.2.2 Variables angulaires

### Motivation

La méthode de Hamilton-Jacobi (à ne pas confondre avec l'équation du même nom), consiste à rechercher une "bonne" transformation canonique. D'après le théorème de Arnold-Liouville, un système intégrable à  $n$  degrés de liberté possède  $n$  invariants  $I_k$  indépendants. Il nous suffit alors de choisir pour nouveaux moments  $P_i = P_i(I_k)$ , c'est à dire des fonctions quelconques des invariants, pour avoir

$$\begin{aligned}\dot{P}_i &= -\frac{\partial H'}{\partial Q_i} = 0 \\ \dot{Q}_i &= \frac{\partial H'}{\partial P_i} = \omega_i(P_i) \\ H' &= H(P_i)\end{aligned}$$

où  $\omega_i$  sont également des invariants, puisque toutes les  $Q_i$  seront alors cycliques et que  $H$  ne dépend pas explicitement du temps. La dépendance temporelle des  $Q_i$  est alors excessivement simple

$$Q_i(t) = \omega_i t + Q_{i0}$$

La question qui se pose est alors la suivante: Comment choisir les nouveaux moments  $P_i(I_k)$  (on suppose évidemment connues les  $n$  intégrales  $I_k$ ) ? Dit autrement, existe-t-il un choix plus naturel que d'autres ?

### Un espace des phases borné

Puisque les intégrales premières restent constantes tout au long du mouvement, celui-ci a lieu dans un sous-espace de l'espace des phases, de dimension  $n$ , noté  $\mathbf{T}^n$ , et qui est l'intersection des surfaces  $I_k(q_i, p_i) = Cste$ .

Nous avons vu que les  $Q_i$  varient linéairement avec le temps. Si ces nouvelles coordonnées sont du type "distance", alors elles peuvent prendre des valeurs qui croissent indéfiniment jusqu'à l'infini. C'est ce qui se passerait si  $\mathbf{T}^n$  était un hyperplan. Mais nous ne traitons ici que le cas de systèmes (quasi-)périodiques, c'est à dire n'explorant qu'une partie finie (bornée) de l'espace des phases. Cela implique donc que les  $Q_i$  sont du type "angle", variant de 0 à  $2\pi$ .

Topologiquement, cela implique que  $\mathbf{T}^n$  est un hypertore de dimension  $n$ , plongé dans un espace de dimension  $2n$ . Un hypertore de dimension  $n$  est le produit tensoriel de  $n$  cercles. Soit un point  $M \in \mathbf{T}^n$ , alors  $M$  est caractérisé par  $n$  angles  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , où  $\alpha_i$  est l'angle sur le  $i$ -ième cercle<sup>4</sup>.

Sans faire de la topologie, peut-on comprendre "intuitivement" pourquoi est-ce un tore et non une sphère?

Dans un problème à 1 dimension comme celui du pendule par exemple,  $H = E$  est un invariant et un mouvement de libration du pendule fournit une ellipse. Nous avons vu qu'il était possible de se ramener à un cercle de rayon  $R$ , directement relié à la valeur de  $E$ . On peut alors changer de coordonnées  $(q, p) \rightarrow (\alpha, R)$  et se placer en coordonnées polaires: le rayon  $R(E)$  est un invariant et la deuxième coordonnée est un angle  $\alpha$ .

Si le problème est à 2 dimensions, nous aurons 2 invariants, chacun assimilable à un rayon, les 2 autres coordonnées assimilables à des angles. La position d'un point  $M(\alpha_1, \alpha_2)$  de l'espace des phases peut s'appréhender de la manière suivante. Sur le premier cercle de rayon  $R_1$  se trouve, située en un angle  $\alpha_1$ , l'intersection du deuxième cercle de rayon  $R_2$ . Le point  $M$  se trouve alors en un angle  $\alpha_2$  sur ce deuxième cercle. La trajectoire décrite par  $M$  est ainsi une hélice qui s'enroule autour du tore  $\mathbf{T}^2$ .

La position d'un point  $M$  sur une sphère serait également décrite par deux angles (latitude et longitude). Mais il n'y a qu'un seul invariant associé dans ce cas là, le rayon de la sphère, et pas deux.

<sup>4</sup>Ce cercle correspond à un lacet irréductible sur le tore, c'est à dire à un contour fermé non assimilable par déformation continue à un point.

### 4.2.3 Variables d'actions

Nous venons donc de montrer que pour les systèmes périodiques les nouvelles variables  $Q_i$  doivent être des angles  $\alpha_i$ , variant entre 0 et  $2\pi$ . Cela contraint alors automatiquement le choix des nouvelles variables  $P_i$  puisque

$$\omega_i(P_i) = \frac{\partial H}{\partial P_i}$$

doivent être des pulsations.

Les nouvelles  $P_i$  doivent donc avoir la dimension d'une énergie divisée par une pulsation, c'est à dire la dimension d'un moment cinétique. Or, c'est précisément la dimension de l'action. Dans la suite, on notera  $J_i$  ces variables d'actions.

#### Cas d'un système à 1 degré de liberté

L'espace des phases est de dimension 2 et l'on cherche la transformation canonique telle que les nouvelles variables vérifient

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \omega t + \alpha_0 \\ J(t) &= J\end{aligned}$$

c'est à dire, soient respectivement un angle  $\alpha$  variant linéairement dans le temps et une action  $J$  constante. L'hamiltonien d'un tel système s'écrit toujours

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

Puisque nous ne nous intéressons qu'à des systèmes périodiques, cela signifie que l'espace des phases est borné et donc, que le portrait de phase engendré par l'ensemble des contours

$$p(q) = \pm \sqrt{2m(E - V(q))}$$

dessine une aire  $A(E)$  pour une énergie  $E$  donnée du système. Or, cette aire est précisément un invariant canonique de Poincaré, pour lequel on a

$$\begin{aligned}\int \int_A dq dp &= \int \int_A dQ dP \\ \int \int_A dq dp &= \oint_{\Gamma} p dq\end{aligned}$$

où  $\Gamma$  est un contour fermé de l'espace des phases, orienté dans le sens gauche ou indirect (important)<sup>5</sup>. Utilisant ces propriétés et le fait que  $\alpha$  est un angle variant entre 0 et  $2\pi$  tandis que  $J$  doit être un invariant,

<sup>5</sup>La deuxième propriété peut se démontrer comme cas particulier de la formule de Stokes:

$$\int \int_{\Sigma} (\nabla \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

où  $\Sigma$  est une surface délimitée par un contour fermé  $\Gamma$  orienté dans le sens direct. Prenons le cas 2D où  $d\vec{S} = dx dy \vec{k}$ ,  $d\vec{l} = dx \vec{i} + dy \vec{j}$  et  $\vec{A} = (-y; x; 0)/2$ . Alors  $\nabla \wedge \vec{A} = (0; 0; 1)$  et on obtient

$$\begin{aligned}\int \int_{\Sigma} (\nabla \wedge \vec{A}) \cdot d\vec{S} &= \int \int_{\Sigma} dx dy \\ &= \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} \frac{xdy - ydx}{2}\end{aligned}$$

Par ailleurs, sur un contour fermé, c'est à dire partant d'un point M pour y revenir, on a

$$\oint_{\Gamma} d(xy) = [xy]_M^M = 0$$

on obtient

$$A(E) = \oint_{\Gamma} pdq = \oint_{\Gamma} Jd\alpha = J \int_0^{2\pi} d\alpha = J2\pi$$

c'est à dire l'expression suivante pour la variable action

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} pdq \quad (4.30)$$

### Cas d'un système séparable à $n$ degrés de liberté

Nous avons vu que l'action hamiltonienne d'un système conservatif à  $n$  degrés de liberté peut s'écrire

$$S(q, t; P) = S_0(q) - Et$$

où  $S_0(q)$  est l'action réduite ou fonction caractéristique de Hamilton. Etant parfaitement séparable, elle vérifie

$$S_0(q; P) = \int \sum_i p_i dq_i = \sum_i S_i(q_i; I_k)$$

les  $n$   $I_k$  étant nos  $n$  intégrales premières indépendantes. Or, chaque moment conjugué  $p_i$  est obtenu par

$$p_i = \frac{\partial S_i}{\partial q_i} = p_i(q_i; I_k)$$

et donc ne dépend que de la variable conjuguée  $q_i$  (et des  $n$  invariants). Cela signifie que chaque paire de variables canoniquement conjuguées  $(q_i, p_i)$  est indépendante des autres, l'action réduite étant la somme de  $n$  termes indépendants.

Dans chaque plan  $(q_i, p_i)$ , le mouvement est borné (système périodique) et l'aire  $A_i(I_k)$  formée par la projection du mouvement sur ce plan est conservée. Il est donc naturel d'introduire la grandeur définie par

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_i} p_i dq_i \quad (4.31)$$

où l'intégration s'effectue sur un contour fermé de ce plan, parcouru dans le sens gauche. On aura ainsi  $J_i = J_i(I_k)$  uniquement, puisque la variable  $q_i$  n'intervient que comme variable d'intégration. Cela signifie donc que  $J_i$  est un invariant du mouvement. Et comme chaque paire  $(q_i, p_i)$  est indépendante des autres, les  $n$   $J_i$  forment également  $n$  invariants indépendants.

La transformation canonique complète est alors

$$\begin{aligned} \dot{J}_i &= -\frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = 0 \\ \dot{\alpha}_i &= \frac{\partial H}{\partial J_i} = \omega_i(J_i) \end{aligned}$$

ce qui est la transformation recherchée, les  $\omega_i(J_i)$  étant bien de la dimension d'une pulsation.

---


$$= \oint_{\Gamma} (xdy + ydx)$$

d'où  $\oint_{\Gamma} xdy = -\oint_{\Gamma} ydx$  et on obtient finalement

$$\int \int_{\Sigma} dx dy = -\oint_{\Gamma} ydx = \oint_{\Gamma} xdy$$

En général, on associe  $x$  à la variable  $q$  et  $y$  à  $p$ , le hamiltonien permettant d'exprimer facilement  $p = p(q)$ . Cela signifie qu'il faut utiliser l'expression du milieu. Le signe "-" disparaît si l'on décide d'orienter le contour  $\Gamma$  dans le sens gauche (c'est à dire indirect, contraire à celui donné par la règle du bonhomme d'Ampère, dans le sens des aiguilles d'une montre).



**Cas général (non démontré)**

Le mouvement du système a lieu dans un hypertore  $\mathbf{T}^n$ , sous-espace de l'espace des phases de dimension  $n$ . Sur ce tore, on admettra que l'on peut y trouver  $n$  contours irréductibles (non réduisibles à un point)  $\Gamma_i$  différents, c'est à dire ne pouvant être transformés l'un en l'autre par une déformation continue.

Les variables actions, définies par

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_i} \sum_k p_k dq_k \quad (4.32)$$

forment ainsi  $n$  intégrales premières du mouvement (puisque fonctions uniquement des  $n$   $I_k$ ), indépendantes. Le fait qu'elles soient indépendantes n'est pas évident, c'est lié à l'indépendance des  $n$  contours  $\Gamma_i$ . C'est assuré par la condition d'involution invoquée dans le théorème de Arnold-Liouville.

**4.2.4 Fonction génératrice des variables angles-actions**

Le choix particulier des variables canoniques angles-actions correspond à prendre pour fonction génératrice l'action hamiltonienne réduite

$$S_0(q; P_k) = \int \sum_i p_i(q_k; P_k) dq_i$$

En effet, c'est une fonction génératrice du type  $G_2(q, P, t)$  donnant les relations générales suivantes

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S_0}{\partial q_i} \\ Q_i &= \frac{\partial S_0}{\partial P_i} \\ H' &= H + \frac{\partial S_0}{\partial t} \end{aligned}$$

Dans notre cas le système est conservatif,  $Q_i \equiv \alpha_i$  et  $P_i \equiv J_i$ . On a donc bien  $H' = H$  et les  $n$   $J_i$  étant  $n$  invariants indépendants, on peut exprimer  $p_i = p_i(q_k, J_k)$ . Avec ces notations on obtient

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial S_0}{\partial q_i} \\ \alpha_i &= \frac{\partial S_0}{\partial J_i} \end{aligned}$$

Si on montre que, les  $\alpha_i$  étant des angles, les  $J_i$  sont alors des variables d'action, alors on aura montré que  $S_0$  est bien la bonne fonction génératrice.

On suppose donc que  $\alpha_i$  est un angle recevant un accroissement  $\Delta\alpha_i = 2\pi$  entre  $t$  et  $t + T_i$  où  $T_i = 2\pi/\omega_i(J_k)$  est l'une des périodes du système. On a alors

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_i &= \alpha_i(t + T_i) - \alpha_i(t) = \frac{\partial S_0}{\partial J_i}(t + T_i) - \frac{\partial S_0}{\partial J_i}(t) = \frac{\partial \Delta S_0}{\partial J_i} = 2\pi \\ &= \frac{\partial}{\partial J_i} \left( \int_0^{t+T_i} \sum_k p_k dq_k - \int_0^t \sum_k p_k dq_k \right) = \frac{\partial}{\partial J_i} \left( \int_0^{T_i} \sum_k p_k dq_k \right) = \frac{\partial}{\partial J_i} \left( \oint_{\Gamma_i} \sum_k p_k dq_k \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial J_i} (2\pi J_i) \end{aligned}$$

ce qui démontre que  $S_0$  est bien la fonction génératrice de notre transformation canonique.

Si l'on veut exprimer les variables angles-actions en fonction des anciennes variables  $(q_i, p_i)$ , il "suffit" de remplacer les invariants par leur expression en fonction des  $(q_i, p_i)$ .

Regardons le cas à 1 degré de liberté. On remplace  $E$  par  $H(q, p)$  ce qui fournit

$$\begin{aligned} J &= J(E) = J(H(q, p)) = J(q, p) \\ \alpha &= \omega(J)t + \alpha_0 = \omega(q, p)t + \alpha_0 \end{aligned}$$

Exprimer  $(q, p)$  en fonction des  $(\alpha, J)$  est plus laborieux et plusieurs méthodes sont disponibles. On peut tout d'abord essayer d'inverser les relations ci-dessus. Si ce n'est pas facile, il suffit de rechercher  $q = q(\alpha, J)$  puisque nous avons déjà exprimé  $p = p(q, E)$  à partir de l'hamiltonien. Deux méthodes s'offrent à nous:

(1) Si l'on connaît  $S_0(q; E)$ , on l'exprime en fonction de  $S_0(q; J)$  et on peut ainsi calculer  $\frac{\partial S_0}{\partial J}$ . Cela nous fournit une relation  $\alpha = \alpha(q; J)$  qui, après inversion, nous donnera  $q = q(\alpha; J)$ .

(2) Sans calculer la fonction génératrice, on peut utiliser les équations canoniques, cela donne

$$\begin{aligned} \alpha - \alpha_0 &= \omega t = \omega \int_0^t dt = \omega \int_{q_0}^q \frac{dq}{\dot{q}} \\ &= \omega(J) \int_{q_0}^q \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}} \end{aligned}$$

qui, par inversion, nous fournira  $q = q(\alpha; J)$ .

## 4.2.5 Applications

### Méthode

La méthode est assez simple, une fois que l'on connaît  $n$  invariants  $I_j$  satisfaisant les conditions du théorème de Arnold-Liouville (indépendance, involution):

- (1) On exprime les  $p_i$  en fonction des  $q_i$  et des invariants;
- (2) On choisit  $n$  contours irréductibles  $\Gamma_i$ , puis on calcule les variables actions  $J_i$ ;
- (3) On exprime  $H = H(J_i)$ ;
- (4) On calcule ensuite les variables angles par

$$\alpha_i(t) = \omega_i t + \alpha_{i0} \quad \text{avec} \quad \omega_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} \quad (4.33)$$

On a donc ainsi accès aux  $n$  pulsations propres  $\omega_i$  d'un système périodique à  $n$  degrés de liberté sans même avoir eu recours à la résolution d'équations différentielles. Nous avons fait des inversions de formules (étapes 1 et 3), des intégrations (étape 2) et des dérivations (étape 4). On appelle cela résoudre les équations du mouvement par quadratures.

### Exemple 1: Chute libre 1D

Soit une particule de masse  $m$  en chute libre dans un champ de gravitation  $g$ , rebondissant sur le sol de façon élastique. Le hamiltonien s'écrit

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgq$$

et le portrait de phase est décrit par les courbes

$$p(q; E) = \pm \sqrt{2m(E - mgq)}$$

La solution négative correspond à la chute depuis une altitude  $q_0 = E/mg$ , la solution positive au rebond depuis  $q = 0$  jusqu'à  $q_0$ , formant ainsi un contour fermé  $\Gamma$  parcouru dans le sens gauche. La variable action est alors

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} p(q) dq = \frac{2}{2\pi} \int_0^{q_0} \sqrt{2m(E - mgq)} dq \\ &= \frac{2}{3\pi g} \sqrt{\frac{2}{m}} E^{3/2} \end{aligned}$$

La variable angle est  $\alpha(t) = \omega t + \alpha_0$ , où la pulsation est donnée par  $\omega = \frac{\partial H}{\partial J}$ . Il faut donc exprimer d'abord  $H(J)$ . Par inversion de l'expression de  $J$ , on obtient

$$H(J) = \left( \frac{9\pi^2 m g^2}{8} \right)^{1/3} J^{2/3}$$

d'où une pulsation

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial J} = \pi g \sqrt{\frac{m}{2E}}$$

Si l'on veut  $\alpha(q, p)$  et  $J(q, p)$  il suffit de remplacer  $E$  par  $H(q, p)$  dans leurs expressions. Inversement, pour revenir aux variables  $(q, p)$ , il suffit de connaître  $q(\alpha, J)$  puisqu'on a déjà  $p(q; E)$  et  $E(J)$ . L'équation canonique de Hamilton  $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ , peut se réécrire

$$\alpha - \alpha_0 = \int_0^t \omega dt = \omega \int_{q=0}^q \frac{dq}{\dot{q}} = \omega \int_{q=0}^q \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}} = \frac{\pi}{2} \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-u}} = \pi(\sqrt{1-u} - 1)$$

avec  $u = mgq/E = q/q_0$ . On obtient ainsi la relation recherchée

$$q(\alpha, J) = \frac{E(J)}{mg} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\alpha - \alpha_0}{\pi} \right)^2 \right]$$

Plus usuellement, cette expression est équivalente à  $q(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b$ ,  $a$  et  $b$  devant être déterminées par les conditions initiales (ici on a arbitrairement choisi  $q(t=0) = 0$ ).

### Exemple 2: Oscillateur harmonique 1D

Le portrait de phase est décrit par les courbes d'équation

$$p(q; E) = \pm \sqrt{2m(E - \frac{k}{2}q^2)}$$

c'est à dire une ellipse, de valeur maximale  $a = \sqrt{\frac{2E}{k}}$  sur  $q$  et  $b = \sqrt{2mE}$  sur  $p$ . Cette ellipse est parcourue dans le sens gauche. La variable action est

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} p(q) dq = \frac{A(E)}{2\pi} = \frac{\pi ab}{2\pi} = E \sqrt{\frac{m}{k}}$$

On en déduit immédiatement  $H(J) = J \sqrt{\frac{k}{m}}$  et une pulsation

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial J} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

L'expression  $J(q, p)$  est immédiate puisqu'il suffit de remplacer  $E$  par  $H(q, p)$ . On peut obtenir  $\alpha(q, p)$  en procédant comme suit:

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega \int \frac{dq}{\dot{q}} = \omega \int \frac{dq}{\frac{\partial H}{\partial p}} = m\omega \int \frac{dq}{p} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin(q\omega \sqrt{\frac{m}{2E}}) \\ &= \arcsin \frac{q\omega}{\sqrt{\frac{p^2}{m^2} + \omega^2 q^2}} \end{aligned}$$

On a ainsi à la fois  $\alpha(q, p)$  mais aussi  $q(\alpha; E) = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin(\omega t + \alpha_0)$ .

### Systèmes quasi-périodiques

Prenons l'exemple simple de l'oscillateur harmonique 3D. Dans ce type de problème, on considère généralement que les trois directions sont découplées et qu'on a donc affaire à un système complètement séparable. La projection du mouvement dans chaque plan  $(q_i, p_i)$  de l'espace des phases est donnée par

$$I_i = \frac{p_i^2}{2m} + \frac{k_i}{2} q_i^2$$

où  $k_i$  est la constante de raideur dans cette direction et  $I_i$  une constante du mouvement telle que  $E = \sum_{i=1}^3 I_i$ . La variable action est alors

$$J_i = I_i \sqrt{\frac{m}{k_i}}$$

tandis que la variable angulaire s'écrit

$$\alpha_i(t) = \omega_i t + \alpha_{i0} = \arcsin\left(q_i \sqrt{\frac{k_i}{2I_i}}\right)$$

avec une pulsation  $\omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{m}}$ . Chaque coordonnée  $q_i$  est donc une fonction périodique de  $\alpha_i$  et, dans ce cas simple, également une fonction périodique du temps, de période  $T_i = 2\pi/\omega_i$ .

Considérons maintenant une fonction  $F$  quelconque de l'état dynamique du système. Cette fonction s'exprimera en fonction des coordonnées généralisées, d'une façon qui peut être non triviale. Ce sera une fonction périodique des  $\alpha_i$ , puisqu'à chaque période  $T_i$  la coordonnée  $q_i$  reprend sa valeur initiale (dans le cas d'une libration, sinon modulo  $q_{i0}$  dans le cas d'une rotation). Mais il n'est pas dit que ce soit une fonction périodique du temps. Peut-on en effet encore trouver un temps  $T$  tel que  $F(t+T) = F(t)$ ? Si l'oscillateur est isotrope, les trois périodes  $T_i$  sont identiques et on assiste à des trajectoires fermées. Par exemple à 2D, les trajectoires dessineraient des courbes de Lissajou fermées. Mais si l'oscillateur est anisotrope les trajectoires ne sont plus des courbes fermées (à moins peut-être d'attendre très longtemps...).

Reprenons le cas d'un système à  $n$  degrés de liberté pour lequel on a trouvé  $n$  variables angulaires  $\alpha_i$ . Soit  $F(q, p)$  une fonction quelconque d'état du système. C'est une fonction périodique des  $\alpha_i$  de période  $2\pi$  pour chacune d'elles ( $\Delta\alpha_i = 2\pi$ ). On peut donc faire un développement multiple en séries de Fourier<sup>6</sup>

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{k_1} \dots \sum_{k_n} C_{k_1 \dots k_n} e^{i(k_1 \alpha_1 + \dots + k_n \alpha_n)}$$

où les  $C_{k_1 \dots k_n}$  sont des nombres complexes. Exprimée en fonction du temps, cette expression devient

$$F(t) = \sum_{k_1} \dots \sum_{k_n} A_{k_1 \dots k_n} e^{it(k_1 \omega_1 + \dots + k_n \omega_n)}$$

<sup>6</sup>Une fonction  $f(t)$   $T$ -périodique peut se décomposer en série de Fourier de la forme

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \end{aligned}$$

où les coefficients vérifient

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t dt \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t dt \\ c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt \end{aligned}$$

Le terme en argument dans l'exponentielle peut s'écrire symboliquement  $\vec{\omega} \cdot \vec{k}$  où  $\vec{k}$  est un vecteur dont les  $n$  composantes sont des nombres entiers relatifs indépendants. On ne verra apparaître de la périodicité que si toutes ou partie des pulsations  $\omega_i$  sont commensurables entre elles.

**Définition 1:** Deux pulsations sont commensurables si leur rapport est égal à un nombre rationnel, c'est à dire si  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{m}$  où  $n$  et  $m$  sont des nombres entiers<sup>7</sup>.

**Définition 2:** Un système à  $n$  degrés de liberté est dit partiellement dégénéré si 2 ou plus de ses pulsations propres sont commensurables. Il est dit complètement dégénéré si elles sont toutes commensurables.

**Définition 3:** Un système quasi-périodique est un système partiellement dégénéré.

D'après ces définitions, un système complètement dégénéré est un système pour lequel on a  $n - 1$  relations du type

$$\vec{\omega} \cdot \vec{k} = 0$$

puisqu'on pourra alors exprimer les  $n - 1$   $\omega_i$  en fonction d'une seule pulsation. Si l'on n'a que  $m < n - 1$  relations de ce type, alors on a affaire à un système partiellement dégénéré ou  $m$  fois dégénéré.

Prenons le cas de deux pulsations commensurables  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . On a alors l'égalité suivante

$$\Delta t = \frac{2\pi}{k_1\omega_1} = \frac{2\pi}{k_2\omega_2} \quad \text{c'est à dire} \quad k_1k_2\Delta t = k_2T_1 = k_1T_2$$

La vraie période  $T$  commune à ces deux mouvements est obtenue en divisant  $k_1k_2\Delta t$  par le PPCM de  $k_1$  et  $k_2$ .

---

<sup>7</sup>Cette condition est équivalente à  $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$ , où  $k_1$  et  $k_2$  sont des nombres entiers relatifs.



## Chapter 5

# Description lagrangienne des milieux continus

### 5.1 Exemple d'un passage à la limite continue

#### 5.1.1 Corde élastique 1D

Considérons une corde continue de longueur  $l$  tendue à ses deux extrémités. Nous connaissons sa forme à l'équilibre mais que devient-elle lorsqu'on tire légèrement sur la corde ? Pour traiter ce problème, utilisons les méthodes vues précédemment.

On va ainsi modéliser la corde comme une succession de  $N$  masses  $m$  reliées entre elles par des ressorts de raideur  $k$ . Cette modélisation est légitime puisque nous nous plaçons au voisinage de la position d'équilibre: tout potentiel d'interaction est en effet assimilable à un potentiel harmonique (voir chapitre I). Soit  $i$  l'indice décrivant une masse particulière,  $i = 0$  et  $i = N + 1$  correspondant aux deux extrémités. La coordonnée généralisée, notée  $\eta_i(t)$ , décrit le déplacement de la masse  $i$  par rapport à sa position d'équilibre. Enfin, notons que, à l'équilibre, la distance entre deux masses est  $a = l/(N + 1)$ .

Ceci étant posé, le lagrangien de la corde s'écrit

$$L = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} m \dot{\eta}_i^2 - \frac{1}{2} k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2 \right)$$

On obtient ainsi  $N$  équations de Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_k} &= m \ddot{\eta}_k \\ &= \frac{\partial L}{\partial \eta_k} = -k(\eta_k - \eta_{k-1} - \eta_{k+1} + \eta_k) \\ \ddot{\eta}_k &= \frac{k}{m} [(\eta_{k+1} - \eta_k) - (\eta_k - \eta_{k-1})] \end{aligned}$$

Maintenant, il est évident que si l'on pouvait s'éviter de résoudre  $N$  équations,  $N$  étant grand, on le ferait. Or justement,  $N$  est amené à tendre vers l'infini dans notre modèle d'un système mécanique continu. Que se passe-t-il d'ailleurs lorsque  $N \rightarrow \infty$  ? On a  $a \rightarrow 0$  et  $m/a \rightarrow \mu$ ,  $\mu$  étant la masse linéique de la corde. Tout se passe donc comme si l'on s'éloignait de la corde et que l'on ne pouvait plus séparer deux masses l'une de l'autre. Continuer à utiliser l'indice  $k$  n'a donc plus de sens: il faut le remplacer par la position  $x$  de la masse  $m$ ,  $x$  étant maintenant une variable continue. Ainsi, on a  $\eta_k(t) = \eta(x_k, t) \rightarrow \eta(x, t)$  lorsque  $a \rightarrow 0$ . Par ailleurs,

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\eta_{k+1} - \eta_k}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\eta(x_{k+1}, t) - \eta(x_k, t)}{x_{k+1} - x_k} = \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{k+1/2}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\eta_k - \eta_{k-1}}{a} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\eta(x_k, t) - \eta(x_{k-1}, t)}{x_k - x_{k-1}} = \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{k-1/2}$$

En reprenant l'équation de Lagrange pour la masse  $k$  et en faisant  $a \rightarrow 0$ , on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \ddot{\eta}_k = \frac{\partial^2 \eta(x)}{\partial t^2} &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2 k}{ma} \left[ \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{k+1/2} - \left. \frac{\partial \eta}{\partial x} \right|_{k-1/2} \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{ak}{\mu} \frac{\partial^2 \eta(x_k)}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Comment varie le terme  $ak$  lorsque  $a \rightarrow 0$ ? La description du potentiel créé par un ressort provient de la loi expérimentale de Hooke. Celle-ci stipule que "l'allongement d'un ressort est proportionnel à la force appliquée par unité de longueur". Mathématiquement, si  $\eta$  est un allongement (en mètres) et  $F$  la force appliquée (en Newtons), cela s'écrit

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{F}{a} = E\eta$$

où  $E$ , appelé le module d'Young, caractérise la dureté du matériau. Si l'on revient à la corde, on obtient  $\lim_{a \rightarrow 0} ak = E$ , ce qui fournit l'équation suivante pour la corde 1D,

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{E}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \eta(x, t) = 0 \quad (5.1)$$

Cette équation montre que la corde 1D va subir des déplacements longitudinaux oscillants, c'est à dire qu'elle va être parcourue par une onde longitudinale de vitesse de phase  $c = \sqrt{E/\mu}$ : plus la corde est rigide ( $E$  élevé) et/ou plus elle est légère ( $\mu$  faible) et plus  $c$  sera élevée.

Nous voyons apparaître sur cet exemple un trait caractéristique du passage à la limite continue. Nous sommes en effet passés d'un nombre  $N$  élevé (en fait  $N \rightarrow \infty$ ) d'équations aux dérivées ordinaires (EDO) à une seule équation aux dérivées partielles (EDP). Mais celle-ci contient la même information que l'infinité d'EDO ! C'est dû au fait que la solution de (5.1) est le déplacement  $\eta(x, t)$ , défini en tout  $x$ , variable continue.

### 5.1.2 Retour au lagrangien

Ce que l'on voudrait avoir, c'est une nouvelle façon d'écrire le lagrangien d'un système continu de telle sorte que l'on puisse trouver une équation analogue à (5.1) sans avoir à refaire, à chaque fois, explicitement le passage à la limite. Reprenons le cas de la corde pour laquelle le lagrangien s'écrit

$$L = \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} m \dot{\eta}_i^2 - \frac{1}{2} k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2 \right)$$

Au vu de la méthode employée plus haut, on est tentés de mettre le lagrangien du système continu sous la forme suivante

$$\begin{aligned} L &= \lim_{a \rightarrow 0} \sum_i a \left[ \frac{1}{2} \frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2 - \frac{1}{2} ak \left( \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 \right] \\ &= \int dx \left[ \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - \frac{E}{2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (5.2)$$

c'est à dire  $L = \int dx \mathcal{L}(\eta_t, \eta_x)$ <sup>1</sup>. Si cette conjecture est correcte, alors nous devrions pouvoir retrouver l'équation (5.1) directement, à partir des équations d'Euler-Lagrange. Mais ces dernières ne s'appliquent qu'à des systèmes discrets. Il nous faut donc trouver leur équivalent pour des systèmes continus.

<sup>1</sup>Pour des raisons de commodité d'écriture, on note  $\eta_t = \frac{\partial \eta}{\partial t}$  et  $\eta_x = \frac{\partial \eta}{\partial x}$ . Des dérivées d'ordre supérieur seraient notées similairement,  $\eta_{xx} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ ,  $\eta_{xy} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$ .



Dans l'expression du lagrangien  $L$  de la corde interviennent les dérivées de  $\eta(x, t)$ . Il faut bien réaliser qu'ici  $x$  n'est pas une coordonnée associée à la corde elle-même:  $x$  décrit une position sur la corde relative à notre mode de mesure (c'est un indice dans le cas discret), au même titre que le temps  $t$  est relatif à notre horloge. Ainsi,  $x$  et  $t$  sont deux "paramètres" continus relatifs à notre description de l'espace-temps et non des "variables" décrivant la corde. La variable décrivant la corde, autrement dit la vraie coordonnée généralisée, reste  $\eta(x, t)$ . Par définition, on appelle "champ" toute grandeur définie sur l'espace-temps. Ainsi,  $\eta(x, t)$  est le champ (scalaire) de déplacement de la corde 1D. Pour cette raison, les équations de Lagrange continues sont appelées les équations du champ.

Si l'on avait permis des déplacements de la corde dans les trois directions d'espace, on aurait tout simplement un champ  $\eta(x, y, z, t)$  ainsi qu'une généralisation de l'équation (5.1), c'est à dire

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{E}{\mu} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right] \eta(x_i, t) = 0 \quad (5.3)$$

où  $x_i$  vaut pour  $x, y, z$ .

## 5.2 Formulation lagrangienne des milieux continus

### 5.2.1 Conjectures

On suppose que tout système continu, c'est à dire ayant une infinité de degrés de liberté, peut être décrit par un lagrangien se mettant sous la forme

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \mathcal{L} \, dx dy dz \quad (5.4)$$

où  $\mathcal{L}$  est appelée la densité de lagrangien. Le volume d'intégration est arbitraire: il doit contenir le système étudié mais peut être étendu à l'infini (il suffit de faire tendre  $\mathcal{L}$  vers zero en dehors du système).

Il faut (de nouveau) bien réaliser que les variables  $x, y$  et  $z$  ne sont que des paramètres permettant d'identifier une région de l'espace et non des variables décrivant le système lui-même. Celui-ci est donc vu comme étant "plongé" dans un continuum (l'espace-temps).

Le système physique est supposé entièrement décrit par un nombre fini  $n$  de champs  $\eta_i(\vec{r}, t)$  ( $i = 1, \dots, n$ ). On suppose que la densité de lagrangien peut s'écrire comme

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left( \eta, \frac{\partial \eta}{\partial x}, \frac{\partial \eta}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial z}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, x, y, z, t \right) \quad (5.5)$$

et non en fonction des dérivées d'ordre supérieur de  $\eta$ . Cette hypothèse est très importante car elle a de profondes conséquences. Concrètement, elle impose directement la forme des équations du champ (voir ci-dessous), "philosophiquement" elle signifie que les champs interagissent seulement localement: en effet, pour calculer une dérivée d'ordre deux, par exemple, il faut aller chercher deux points de part et d'autre du point où l'on veut la calculer alors qu'il n'en faut qu'un seul pour une dérivée d'ordre un. Cette hypothèse ne peut se justifier par elle-même: il faut vérifier expérimentalement que les équations ainsi obtenues fournissent bien une description correcte des phénomènes.

Le fait que les coordonnées  $x, y, z$  et  $t$  ne jouent que le rôle d'indexation de l'espace-temps et non celui de description du système lui-même introduit une subtilité. Soit  $x_\mu$  une coordonnée quelconque de l'espace-temps, si par exemple  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\eta, x_\mu)$  alors on a

$$\frac{d\mathcal{L}}{dx_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \quad (5.6)$$

Autrement dit, il faut faire attention à la notion de dérivée droite ou de dérivée partielle. La variation de  $\mathcal{L}$  entre  $x_\mu$  et  $x_\mu + dx_\mu$  met en effet en jeu la variation liée uniquement au changement de position (terme  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu}$ ) mais également celle introduite par la dépendance de  $\eta$  (terme  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta}$ ).

### 5.2.2 Equations de Lagrange du champ

On part du principe de Hamilton, principe fondamental de la physique. Il stipule que les champs réalisés dans la nature sont ceux qui rendent extrémale l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \mathcal{L} dx dy dz dt \quad (5.7)$$

c'est à dire tels que  $\delta S = 0$ . Ici,  $\delta S$  est la variation fonctionnelle de l'action n'affectant pas les bornes (ni le temps, ni le volume) et obtenue en faisant une variation  $\delta\eta_i$  de tous les champs indépendants  $\eta_i$  telle que  $\delta\eta_i = 0$  aux bornes d'intégration<sup>2</sup>. Afin d'alléger l'écriture, on fait ici la démonstration pour  $i = 1$ , la généralisation à  $n$  champs indépendants étant ensuite immédiate.

La variation fonctionnelle de  $S$  s'écrit donc

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \mathcal{L} dx dy dz dt = \int \int \delta \mathcal{L} dt d^3v$$

où l'on a  $\int dt \int d^3v \delta \mathcal{L} = \int d^3v \int dt \delta \mathcal{L}$  puisque les "coordonnées"  $x, y, z$  et  $t$  sont indépendantes. Par ailleurs, on a

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\eta_t)} \delta \eta_t + \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\eta_{x_\mu})} \delta \eta_{x_\mu}$$

avec  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ . Regardons ce que donne l'intégration de chacun de ces termes sur le (quadri)volume d'espace-temps. Ainsi, le deuxième terme s'écrit

$$\begin{aligned} \int dt \int d^3v \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\eta_t)} \delta \eta_t &= \int d^3v \int dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\eta_t)} \delta \frac{\partial \eta}{\partial t} = \int d^3v \int dt \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\eta_t)} \frac{\partial (\delta \eta)}{\partial t} \\ &= \int d^3v \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\eta_t)} \delta \eta \right]_{t_1}^{t_2} - \int dt \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\eta_t)} \right) \delta \eta \right\} \end{aligned}$$

où l'on a intégré par parties à la deuxième ligne. Le premier terme de droite est nul car  $\delta \eta = 0$  aux bornes. Remarquer l'utilisation de la dérivée droite  $d/dt$ : lors de l'intégration par parties, on prend en compte *toutes* les variations (explicites et implicites) lors d'une modification  $t \rightarrow t + dt$ . Faisant le même travail sur la variable  $x$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int dt \int d^3v \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\eta_x)} \delta \eta_x &= \int dt \int dy \int dz \int dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\eta_x)} \frac{\partial (\delta \eta)}{\partial x} \\ &= \int dt \int dy \int dz \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\eta_x)} \delta \eta \right]_{x_1}^{x_2} - \int dx \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\eta_x)} \right) \delta \eta \right\} \end{aligned}$$

où le premier terme du membre de droite est nul et on utilise la dérivée droite  $d/dx$  pour les mêmes raisons que précédemment. Le calcul est identique pour les variables  $y$  et  $z$ . Rassemblant ces résultats on obtient

$$\delta S = \int dt \int d^3v \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\eta_t)} - \sum_{\mu=1}^3 \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\eta_{x_\mu})} \right\} \delta \eta = 0$$

Ceci devant être vérifié quelle que soit la variation  $\delta \eta$ , cela implique

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\eta_t)} + \sum_{\mu=1}^3 \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\eta_{x_\mu})} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \quad (5.8)$$

<sup>2</sup>Dans le cas discret, on dit que tous les chemins possibles doivent partir de  $t_1$  et arriver en  $t_2$ , autrement dit  $\delta q_i = 0$  en ces deux bornes. Dans le cas continu, on dit que tous les champs possibles doivent se comporter de la même manière aux bornes.

Cette équation est l'équation de Lagrange pour un système décrit par un champ continu  $\eta$ . Il est remarquable que le rôle du temps apparaisse exactement sous la même forme que celle pour une variable spatiale quelconque. La raison profonde réside tout bêtement dans le fait que les "coordonnées" de temps et d'espace ne font que décrire le continuum espace-temps sur lequel "évolue" le système physique. On peut donc écrire cette équation sous forme plus compacte en étendant le nombre de coordonnées à 4 (espace + temps). Pour un nombre  $n$  de champs indépendants  $\eta_i(\vec{r}, t)$ , on obtient alors les  $n$  équations du champ

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta_i)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} \quad (5.9)$$

où l'on a utilisé cette fois-ci la notation  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ . Noter qu'il n'y a pas d'ambiguïté entre  $\frac{d\eta}{dx}$  et  $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ : c'est la même chose puisque  $\eta = \eta(x, y, z, t)$  et que les 4 coordonnées d'espace-temps sont indépendantes.

**Exemple:** Reprenons la corde élastique 1D et supposons qu'elle soit décrite par la densité de lagrangien suivante

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - \frac{E}{2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2$$

Les diverses dérivées s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\eta_t)} &= \frac{d}{dt} (\mu \eta_t) = \mu \eta_{tt} \\ \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\eta_x)} &= \frac{d}{dx} (-E \eta_x) = -E \eta_{xx} \end{aligned}$$

ce qui fournit l'équation  $\mu \eta_{tt} - E \eta_{xx} = 0$  pour le champ  $\eta$  qui est bien identique à l'équation (5.1). Cette équivalence (ainsi que pour bien d'autres exemples) justifie, d'une part, nos conjectures initiales et, d'autre part, notre confiance dans l'utilisation de la densité de lagrangien choisie pour décrire la corde.

**Densités de lagrangiens équivalentes:** Nous avons vu que dans le cas discret deux lagrangiens  $L$  et  $L'$  décrivent en fait le même système s'ils ne diffèrent que par la dérivée totale par rapport au temps d'une fonction  $f$  dépendant des coordonnées généralisées  $q_i$  et du temps. Dans le cas continu, deux densités de lagrangiens  $\mathcal{L}'$  et  $\mathcal{L}$  correspondent au même système si

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_\mu} f_\mu(\eta_i, \vec{r}, t) \quad (5.10)$$

où  $f_\mu$  pour  $\mu = 0, \dots, 3$  sont quatre fonctions scalaires quelconques, définies sur l'espace-temps et dépendant des champs (mais pas de leurs dérivées). Le terme supplémentaire est en fait la 4-divergence d'un quadrivecteur, que l'on peut écrire de façon parfaitement équivalente

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{\partial f_0}{\partial t} + \text{div } \vec{F} \quad (5.11)$$

où l'on a construit un vecteur  $\vec{F}$  tel que chaque composante vérifie  $F_k = f_k(\eta_i, \vec{r}, t)$  pour  $k = 1, 2, 3$ .

La démonstration s'appuie sur le principe de Hamilton puisque l'on doit avoir  $\delta S' = \delta S = 0$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \delta S' &= \delta \int \int \int \int \mathcal{L}' dx dy dz dt \\ &= \delta S + \delta \int d^3v \int dt \frac{\partial f_0}{\partial t} + \delta \int dt \int d^3v \text{div } \vec{F} \\ &= 0 + \int d^3v [\delta f_0]_{t_1}^{t_2} + \int dt \delta \int d^3v \text{div } \vec{F} \end{aligned}$$

Le dernier terme de droite met en jeu une intégrale sur le volume de la divergence de  $\vec{F}$ . D'après le théorème de Gauss-Ostrogradski, cette intégrale est équivalente au flux de  $\vec{F}$  à travers la surface  $A$  englobant le volume d'intégration (qui peut être infini). On a ainsi

$$\delta S' = \int d^3v \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_0}{\partial \eta_i} \delta \eta_i \right]_{t_1}^{t_2} + \int dt \oint_A \delta \vec{F} \cdot \vec{d}A$$

Le premier terme est manifestement nul de même que le second (moyennant la précaution supplémentaire d'exiger que les  $f_k$  tendent suffisamment rapidement vers zéro en  $A$ ). Remarquer que si les  $f_\mu$  dépendaient aussi des dérivées des  $\eta_i$ , ceci ne serait plus vrai en toute généralité comme c'est le cas ici.

## 5.3 Théorie classique des champs

### 5.3.1 Cadre général

Jusqu'à présent, notre démarche a été d'utiliser le formalisme lagrangien pour décrire un système *mécanique* continu (ie. avec un nombre infini de degrés de liberté). Mais on peut tout aussi bien utiliser la même formulation pour décrire n'importe quel objet physique pourvu qu'il soit décrit en termes d'un ou plusieurs champs. Par champ, on entend toute grandeur  $\varphi_i(\vec{r}, t)$  définie sur l'espace-temps. Ceci n'est pas une surprise puisque même notre exemple de la corde 1D est en fait ramenée à la connaissance du champ de déplacement  $\eta(x, t)$ .

Pour un système mécanique bien défini, nous avons vu qu'en mécanique non-relativiste on avait  $L = T - V$ . Dans le cas d'un système continu on aurait donc

$$L = \int \mathcal{L} d^3v = \int (\mathcal{T} - \mathcal{V}) d^3v$$

où  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{V}$  sont respectivement la densité d'énergie cinétique et potentielle. C'est effectivement ce que l'on a dans le cas de la corde 1D

$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2} \eta_t^2 - \frac{E}{2} \eta_x^2$$

Mais pour un système physique non associé à un système mécanique,  $L \neq T - V$  et l'on peut donc utiliser *toute* expression conduisant aux équations recherchées. Ainsi, on peut trouver des densités de lagrangiens  $\mathcal{L}$  telles que les équations du champ (équations de Lagrange correspondantes) fournissent les équations de Maxwell (électrodynamique), l'équation d'Euler (hydrodynamique), l'équation d'Einstein (relativité générale) ou même l'équation de Schrödinger (mécanique quantique).

En mécanique non-relativiste, il y a parfaite équivalence entre force et potentiel (qui n'est rien d'autre qu'un champ). L'utilisation d'un potentiel est dans ce cas une simple commodité de description mais ce n'est plus le cas en relativité. En effet, la valeur finie de la vitesse de la lumière (et de toute autre vitesse) introduit un délai de propagation entre toute cause (ex: présence d'une particule chargée en un point) et son effet (champ électromagnétique "vu" en un autre point). Ce délai est celui pris par la propagation de cette information, propagation qui se traduit par la déformation du champ d'interaction. Celui-ci acquiert donc une réalité intrinsèque dans le contexte de la relativité et c'est pourquoi la théorie classique des champs a une si grande importance dans la description des interactions fondamentales.

Une autre conséquence importante de la relativité est que toute particule fondamentale est nécessairement ponctuelle. En effet, considérons une particule spatialement étendue et faisons-la se mouvoir sous l'effet d'une force appliquée en l'un de ses points. A l'instant même où elle reçoit cette impulsion et y réagit en se déplaçant, le coté opposé de cette particule n'a pas encore pris connaissance de cette action et ne peut donc se déplacer. Cela signifie que cette particule se déforme d'abord avant d'être capable de se déplacer de façon rigide. Si elle se déforme, c'est qu'elle-même possède une constitution: une particule étendue ne peut donc être considérée comme fondamentale.

Parmi les quatre interactions fondamentales reconnues actuellement, seules deux peuvent être décrites par la théorie classique des champs: l'électrodynamique et la gravitation (relativité générale). Les deux autres

(interactions faible et forte) nécessitent de prendre en compte des aspects quantiques. La théorie quantique des champs est le cadre théorique à l'intérieur duquel les physiciens cherchent à unifier les 4 interactions. Ils ont ainsi réussi à produire une description quantique des champs électromagnétique, nucléaires fort et faible. A l'heure actuelle, seule la gravitation se dérobe à la quantification...

En résumé, la formulation lagrangienne a plusieurs avantages:

- La possibilité d'inventer de nouveaux types de champs  $\mathcal{L}$  dès lors qu'ils sont des invariants de Lorentz.
- Toutes les analyses concernant les invariants, y compris le théorème de Noether, peuvent être étendus dans le cadre de la théorie des champs. Cela offre souvent des résultats généraux importants.
- La formulation lagrangienne est le passage obligé vers la quantification.

### 5.3.2 Exemple: électrodynamique classique

Proposée en 1903 par Schwarzschild, la formulation lagrangienne de l'électrodynamique permet (entre autres) de ramener toute l'information contenue dans l'ensemble des quatre équations de Maxwell à la seule donnée de la densité de lagrangien  $\mathcal{L}$ .

Les quatre équations de Maxwell s'écrivent (dans le vide):

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (5.12)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.13)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (5.14)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.15)$$

Les deux premières équations sont automatiquement satisfaites si l'on pose

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad (5.16)$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (5.17)$$

où  $\phi$  et  $\vec{A}$  sont appelés respectivement les potentiels scalaire et vecteur. On voit donc qu'il suffit de se donner 4 grandeurs (champs) indépendants  $A_\mu$  (tels que  $A_0$  soit relié à  $\phi$ , les 3 autres étant les composantes de  $\vec{A}$ ) pour décrire complètement  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ . Les deux autres équations de Maxwell (5.14) et (5.15) relient les champs aux sources (densité locale de charges  $\rho$  et courants  $\vec{j}$ ). Ce sont donc ces deux dernières équations qu'il faut retrouver comme équations du champ.

La densité de lagrangien permettant de le faire s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_0}{2}(E^2 - c^2 B^2) - \rho\phi + \vec{j} \cdot \vec{A} \quad (5.18)$$

Les équations (5.16) et (5.17) s'écrivent tensoriellement

$$\begin{aligned} B_i &= \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \\ E_i &= -\partial_i \phi - \partial_t A_i \end{aligned}$$

où l'on a introduit, par commodité d'écriture, le tenseur d'ordre 3 de Levi-Civita<sup>3</sup>  $\epsilon_{ijk}$ . L'équation de Lagrange du champ  $\phi$  est obtenue en calculant les dérivées suivantes:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\rho$$

<sup>3</sup>Ce tenseur est tel que  $\epsilon_{123} = 1$ ,  $\epsilon_{ijj} = 0 \quad \forall i, j$ ,  $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = \epsilon_{jki} \quad \forall i, j, k$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \phi)} &= \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial E^2}{\partial(\partial_i \phi)} = \varepsilon_0 E_j \frac{\partial E_j}{\partial(\partial_i \phi)} = -\varepsilon_0 E_i\end{aligned}$$

L'équation de Lagrange pour le champ  $\phi$  est alors

$$-\sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx_i} (\varepsilon_0 E_i) = -\rho$$

et n'est autre que l'équation (5.14). Calculons maintenant les dérivées associées au champ  $A_i$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} &= j_i \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t A_i)} &= \varepsilon_0 E_j \frac{\partial E_j}{\partial(\partial_t A_i)} = -\varepsilon_0 E_i \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j A_i)} &= -\frac{\varepsilon_0 c^2}{2} \frac{\partial B^2}{\partial(\partial_j A_i)} = -\varepsilon_0 c^2 B_k \frac{\partial B_k}{\partial(\partial_j A_i)} = -\varepsilon_0 c^2 B_k \epsilon_{klm} \frac{\partial \left( \frac{\partial A_m}{\partial x_l} \right)}{\partial \left( \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right)} \\ &= -\varepsilon_0 c^2 B_k \epsilon_{klm} \delta_{im} \delta_{lj} = -\varepsilon_0 c^2 \epsilon_{kji} B_k = \frac{1}{\mu_0} \epsilon_{ijk} B_k\end{aligned}$$

L'équation de Lagrange pour le champ  $A_i$  est alors

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=0}^3 \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_i)} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} \\ -\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 E_i) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\mu_0} \epsilon_{ijk} B_k &= j_i \\ \epsilon_{ijk} \partial_j B_k &= \mu_0 j_i + \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t E_i\end{aligned}$$

qui n'est autre que la  $i$ -ème composante de l'équation (5.15). On vient ainsi de prouver que l'expression (5.18) de  $\mathcal{L}$  proposée porte bien en elle toute l'information contenue dans les équations de Maxwell. On voit d'ailleurs que cette expression comporte deux termes. Le premier met en jeu uniquement les champs en l'absence de toute source. Le deuxième met en jeu  $\rho$  et  $\vec{j}$  et décrit donc l'interaction du champ avec la matière.

En présence d'un grand nombre de particules (ponctuelles) de densités de charge  $\rho_\alpha$  et vitesses  $\vec{v}_\alpha = \dot{\vec{r}}_\alpha$  différentes, on a naturellement

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_\alpha \rho_\alpha \\ \vec{j} &= \sum_\alpha \rho_\alpha \vec{v}_\alpha\end{aligned}$$

Le lagrangien du champ s'écrit alors

$$L_{champ} = \int \mathcal{L} d^3v = \int \left\{ \frac{\varepsilon_0}{2} (E^2 - c^2 B^2) - \sum_\alpha \rho_\alpha (\phi - \vec{v}_\alpha \cdot \vec{A}) \right\} d^3v$$

Cette expression est à rapprocher de celle, déjà connue, d'un système de particules ponctuelles de charges  $q_\alpha$  soumises à un champ électromagnétique extérieur

$$L_{mat} = T - V = \sum_\alpha \left\{ \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 - q_\alpha (\phi - \vec{v}_\alpha \cdot \vec{A}) \right\}$$

Dans cette expression, le deuxième terme décrit l'interaction du champ sur la matière. En vertu du principe d'action et de réaction, ce doit être le même terme que dans l'expression de la densité de lagrangien pour le champ. Pour concilier les deux expressions il suffit de réaliser que, pour une particule ponctuelle  $\alpha$  située en  $\vec{r}_\alpha$ , la densité de charge associée est simplement

$$\rho_\alpha = q_\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha) \quad (5.19)$$

où  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha)$  est la distribution de Dirac, généralisation dans le cas continu du symbole de Kronecker. La condition de normalisation est tout simplement  $\int \rho_\alpha d^3v = q_\alpha$ .

Ainsi, moyennant cette précaution liée à l'aspect ponctuel des charges, on peut construire un seul lagrangien décrivant à la fois le comportement de particules chargées et celui du champ électromagnétique total (incluant celui créé par les charges):

$$L_{tot} = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 + \int \frac{\varepsilon_0}{2} (E^2 - c^2 B^2) d^3v - \int \sum_\alpha q_\alpha \delta(\vec{r} - \vec{r}_\alpha) (\phi - \vec{v}_\alpha \cdot \vec{A}) d^3v \quad (5.20)$$

Le premier terme est le lagrangien de particules isolées, le second décrit un champ électromagnétique en l'absence de sources et le troisième décrit l'interaction matière-rayonnement. Ce lagrangien est une fonction  $L = L(\phi, A_i, \partial_\mu \phi, \partial_\mu A_i, \vec{r}_\alpha, \vec{v}_\alpha, x, y, z, t)$ , la dépendance éventuelle dans les coordonnées  $x, y, z, t$  intervenant ici uniquement via le volume d'intégration. Noter également que si l'on désire une expression relativiste pour les particules (ce qui est souhaitable pour une description correcte),  $L_{mat} \neq T - V$  mais plutôt

$$L_{mat} = - \sum_\alpha m_\alpha c^2 \sqrt{1 - \frac{v_\alpha^2}{c^2}} - V$$

### 5.3.3 Tenseur énergie-impulsion d'un champ

Nous avons donc la possibilité de décrire tout système physique continu en utilisant une densité de lagrangien  $\mathcal{L}$  (si on la connaît). Connaître la "dynamique" d'un tel système consiste alors à obtenir les  $n$  champs  $\eta_i$  en tout point de l'espace-temps et ceci, grâce à la résolution des  $n$  équations du champ associées

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \eta_i)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_i} \quad (5.21)$$

Mais, comme on l'a vu dans le cas des systèmes discrets, certaines propriétés de symétrie peuvent considérablement simplifier la résolution, voire même suffire à faire émerger des comportements remarquables. On va donc suivre la même démarche que dans le chapitre I.

Tout d'abord, si  $\eta_k$  est un champ cyclique, c'est à dire si  $\mathcal{L}$  ne dépend pas explicitement de  $\eta_k$ , alors

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \eta_k)} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta_k)} + \sum_{\mu=1}^3 \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \eta_k)} = 0 \quad (5.22)$$

qui peut s'interpréter comme la nullité d'une quadri-divergence dans l'espace-temps, donc la conservation d'un quadrivecteur (évidemment associé au champ  $\eta_k$ ).

On peut également rechercher l'équivalent de l'intégrale première de Jacobi  $H$  associée à un système continu. Pour un système discret de lagrangien  $L$  on avait

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L \right) &= - \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Pour un système continu  $\mathcal{L}$ , l'espace joue le même rôle que le temps et il faut rechercher une grandeur invariante selon toute variation selon une coordonnée  $x_\mu$ . Il nous faut donc calculer

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dx_\mu} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta} \frac{d\eta}{dx_\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_\nu} \frac{d\eta_\nu}{dx_\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu} \\ &= \frac{d}{dx_\nu} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_\nu} \right) \frac{d\eta}{dx_\mu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_\nu} \frac{d^2\eta}{dx_\mu dx_\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu} \\ &= \frac{d}{dx_\nu} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_\nu} \frac{d\eta}{dx_\mu} \right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu} \end{aligned} \quad (5.24)$$

qui peut aussi s'écrire

$$\frac{d}{dx_\nu} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_\nu} \frac{d\eta}{dx_\mu} - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} \right) = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\mu} \quad (5.25)$$

où  $\delta_{\mu\nu}$  est le symbole de Kroneker. On voit donc que si  $\mathcal{L}$  ne dépend pas explicitement de la coordonnée  $x_\mu$ , alors la quantité

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta_\nu} \frac{d\eta}{dx_\mu} - \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} \quad (5.26)$$

est bien conservée, c'est à dire

$$\frac{dT_{\mu\nu}}{dx_\nu} = 0 \quad (5.27)$$

Quelle est la signification de  $T_{\mu\nu}$ ? C'est un tenseur d'ordre deux défini dans l'espace-temps, donc à 16 composantes. Dans le cas général, c'est un tenseur non symétrique  $T_{\mu\nu} \neq T_{\nu\mu}$ . On l'appelle tenseur énergie-impulsion du système car ses composantes décrivent la densité d'énergie et d'impulsion transportées par celui-ci (ex: champ électromagnétique). A ce stade, sans en faire ici la démonstrations, il nous suffit de savoir que ce tenseur peut toujours se décomposer de la façon suivante:

$$\begin{aligned} T_{00} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\eta}}\dot{\eta} - \mathcal{L} = \mathcal{H} \quad \text{densité d'énergie} \\ T_{i0} &\quad \text{composantes du vecteur densité d'impulsion} \\ T_{0j} &\quad \text{composantes du vecteur courant d'énergie} \\ T_{ij} &= T_{ji} \quad \text{tenseur des contraintes} \end{aligned}$$

## 5.4 Compléments

### 5.4.1 Formulation relativiste de la théorie des champs

La théorie classique des champs peut très facilement s'exprimer de façon covariante, c'est à dire satisfaisant au principe de relativité d'Einstein. En fait, une telle description est même presque naturelle, comme l'atteste l'expression de l'action elle-même

$$S = \int \int \int \int \mathcal{L} \, dx dy dz dt \quad (5.28)$$

Dans cette expression, l'élément infinitésimal de volume de l'espace-temps ( $dx dy dz dt$ ) est lui-même un invariant de Lorentz. Il suffit donc d'avoir une densité de lagrangien invariante par transformée de Lorentz pour que toute équation du champ, obtenue via le principe de Hamilton, soit elle-même invariante, donc covariante. Le gain est appréciable: avoir  $\mathcal{L}$  scalaire invariant de Lorentz garantit une description satisfaisant la relativité. Il suffit cependant de faire attention aux bornes d'intégration...



### 5.4.2 Densité d'hamiltonien

Ce qui a été fait pour le lagrangien peut évidemment être fait pour l'hamiltonien. Une telle construction n'a cependant de réel intérêt que pour la quantification des champs. Nous avons vu qu'il y avait une équivalence formelle totale entre l'optique géométrique et la mécanique. C'est de cette équivalence et de l'ensemble des expériences montrant que la matière avait effectivement un caractère ondulatoire et quantifié qu'est née la mécanique quantique. Or, *cette équivalence ne se voit que dans le cadre de la mécanique hamiltonienne*. La quantification de la matière elle-même (mécanique quantique, première quantification) a opéré par correspondance entre des objets propres à cette nouvelle physique et des concepts développés au sein de la mécanique hamiltonienne. C'est certainement la raison pour laquelle nous ne savons pas faire de quantification en dehors de la description hamiltonienne. La quantification des champs ou seconde quantification n'échappe pas à cette règle. . .

Quoi qu'il en soit, et indépendamment de toute utilité pratique, on peut se demander ce que devient le concept de hamiltonien dans le cas d'un système ayant une infinité de degrés de liberté. Dans le cas discret, nous avons introduit le moment conjugué à partir du lagrangien. Dans le cas de la corde 1D par exemple, le moment conjugué de la coordonnée généralisée  $\eta_i$  est

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}_i} = a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i}$$

puisque l'on peut écrire  $L = \sum_{i=1}^N aL_i$ . L'hamiltonien discret est alors

$$\begin{aligned} H &= \sum_i p_i \dot{\eta}_i - L = \sum_i \left( a \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i - aL_i \right) \\ &= \sum_i a \left( \frac{\partial L_i}{\partial \dot{\eta}_i} \dot{\eta}_i - L_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^N aH_i \end{aligned}$$

Notre expérience du passage à la limite continue, c'est à dire lorsque  $a \rightarrow 0$  (donc  $N \rightarrow \infty$ ), pour le lagrangien nous indique que l'on obtient l'hamiltonien

$$\begin{aligned} H &= \lim_{a \rightarrow 0} \sum_i aH_i = \int dx \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_t} \eta_t - \mathcal{L} \right) \\ &= \int dx \mathcal{H} \end{aligned}$$

On définit ainsi  $\mathcal{H}$  comme étant la densité d'hamiltonien et

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_t} \quad (5.29)$$

la densité de moment. Noter que la densité de moment conjuguée du champ  $\eta$  est une grandeur considérée comme ne dépendant que de l'espace-temps,  $\pi = \pi(x_\mu)$  (indépendante de  $\eta$  et de ses dérivées).

Dans le cas général d'un système continu décrit par  $n$  champs  $\eta_i(\vec{r}, t)$  indépendants, on passe donc de la densité de lagrangien  $\mathcal{L}$  à la densité d'hamiltonien  $\mathcal{H}$  en faisant la transformation

$$\mathcal{H} = \sum_i \pi_i \partial_t \eta_i - \mathcal{L} \quad (5.30)$$

les  $\pi_i(\vec{r}, t)$  étant les densités de moments conjugués des champs  $\eta_i(\vec{r}, t)$ . Le hamiltonien complet du système est calculé de la même manière, à savoir

$$H = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} \mathcal{H} \, dx dy dz \quad (5.31)$$

où le volume d'intégration est le même que pour  $\mathcal{L}$  (ie. arbitraire). La transformation (5.30) correspond à une transformation de Legendre qui, à partir d'une fonction  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\eta, \eta_x, \eta_y, \eta_z, \eta_t, x, y, z, t)$  construit une fonction

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\eta, \eta_x, \eta_y, \eta_z, \pi, x, y, z, t) \quad (5.32)$$

Pour s'en convaincre, il suffit de calculer la différentielle totale de  $\mathcal{H}$  et de voir qu'effectivement elle ne met plus en jeu  $\eta_t$ . Pour un système décrit par un seul champ  $\eta$  (commodité) on a ainsi

$$\begin{aligned} d(\pi\eta_t - \mathcal{L}) &= \eta_t d\pi + \pi d\eta_t - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} d\eta - \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{x_\mu}} d\eta_{x_\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_t} d\eta_t - \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} dx_\mu \\ &= \eta_t d\pi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} d\eta - \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_{x_\mu}} d\eta_{x_\mu} - \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} dx_\mu \end{aligned}$$

où les  $x_\mu$  correspondent aux coordonnées  $x, y, z, t$ . Or, d'après la définition de la densité d'hamiltonien, cette différentielle est égale à

$$d\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} d\eta + \sum_{\mu=1}^3 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_{x_\mu}} d\eta_{x_\mu} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} d\pi + \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_\mu} dx_\mu$$

Ces deux expressions ne peuvent être égales que si l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_\mu} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} \quad \forall \mu = 0, \dots, 3 \end{aligned}$$

La première de ces équations est l'analogue de l'une des équations canoniques de Hamilton ( $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$ ). La dernière indique que la dépendance explicite de  $\mathcal{H}$  en fonction des coordonnées de l'espace-temps est l'opposée de celle de  $\mathcal{L}$  (généralisation du cas discret où l'on avait  $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$ ). La seconde équation ci-dessus va nous fournir une généralisation de la seconde équation canonique de Hamilton ( $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$ ). En effet, d'après l'équation de Lagrange des champs (5.8), on a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\eta_t)} + \sum_{\mu=1}^3 \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\eta_{x_\mu})}$$

d'où l'on obtient

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} - \sum_{\mu=1}^3 \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\eta_{x_\mu})}$$

En résumé, les équations canoniques pour les champs s'écrivent

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi} \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta} - \sum_{i=1}^3 \frac{d}{dx_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\eta_{x_i})} \quad (5.34)$$

Bien qu'elles aient perdu leur symétrie qui les rendaient si attrayantes dans le cas discret, ces équations conservent les mêmes propriétés. En particulier, on peut les redémontrer directement à partir du principe de Hamilton, comme pour le cas discret.