

Eléments d'algèbre et d'analyse tensorielle à l'usage des
mécaniciens

Jean GARRIGUES
Jean.Garrigues@esm2.imt-mrs.fr

Septembre 2001

Avertissement

Ce cours d'algèbre et d'analyse tensorielle est spécialement conçu à l'usage des mécaniciens. Il ne prétend pas exposer la théorie des tenseurs dans toute sa généralité. On se limite à ce qui est strictement nécessaire au cours de mécanique des milieux continus.

L'espace dans lequel les tenseurs sont définis est l'espace Euclidien habituel, c'est à dire un espace de points muni d'une origine, associé à un espace vectoriel muni de son produit scalaire habituel. Lorsque l'espace est de dimension 3, il est muni de son produit mixte habituel.

Convention typographique

Les quantités vectorielles et tensorielles sont notées en caractères gras. Leurs composantes sont en caractères ordinaires.

Chapitre 1

Algèbre tensorielle

1.1 Convention d'Einstein

Soit \mathcal{E} un espace vectoriel de dimension n , soit $\{\mathbf{e}_i\} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base quelconque de cet espace, et soit \mathbf{V} un vecteur de \mathcal{E} .

On convient de numéroter avec un indice en haut les composantes du vecteur, et avec un indice en bas les vecteurs de base.

Le vecteur \mathbf{V} s'écrit donc:

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^n V^i \mathbf{e}_i$$

La convention d'Einstein consiste à omettre d'écrire le $\sum_{i=1}^n$. On écrira donc:

$$\mathbf{V} = V^i \mathbf{e}_i$$

On convient qu'il s'agit d'une sommation par le fait que le même indice se répète deux fois, une fois en haut et une fois en bas.

Par exemple, pour $n = 3$, on a:

$$\mathbf{V} = V^i \mathbf{e}_i = V^1 \mathbf{e}_1 + V^2 \mathbf{e}_2 + V^3 \mathbf{e}_3$$

1.1.1 Règles et définitions

Pour des raisons qui seront justifiées plus loin, les calculs utilisant la convention d'Einstein doivent impérativement suivre les règles suivantes:

1. Un indice de sommation est appelé *indice muet*. Dans un monôme, il doit apparaître exactement deux fois: une fois en haut et une fois en bas.
2. Le nom d'un indice muet est sans importance et peut donc être changé:

$$\mathbf{V} = V^i \mathbf{e}_i = V^j \mathbf{e}_j$$

3. Un indice non muet est appelé *indice réel*. Dans un monôme, il ne peut apparaître qu'une fois (en haut ou en bas).

4. Dans une égalité ou une somme de monômes, les indices réels de chaque terme doivent être les mêmes et doivent être placés à la même hauteur.

Si une expression indicielle utilisant la convention d'Einstein ne respecte pas toutes ces règles, elle est incorrecte et résulte d'une erreur de calcul.

1.1.2 Notation des dérivées partielles

Dans la suite on aura souvent à utiliser des dérivées partielles. Chaque fois qu'il n'y aura pas d'ambiguïté, le symbole $\frac{\partial}{\partial x^i}$ s'écrira ∂_i . Par exemple, la différentielle d'une fonction $f(x^1, x^2, \dots, x^n)$ s'écrira :

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \partial_i f dx^i$$

Il existe une autre convention: elle consiste à écrire après une virgule tous les indices de dérivation: En reprenant l'exemple précédent, on peut écrire:

$$df = f_{,i} dx^i$$

On trouvera encore dans la littérature d'autres conventions. Bien que la notation ∂_i présente quelques inconvénients¹, on l'utilisera dans ce cours pour des raisons de lisibilité.

1.1.3 Symbole de Kronecker

Le symbole δ_j^i a la signification suivante:

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Si on range les δ_j^i dans une matrice, δ_j^i est le terme général de la matrice unité.

Propriété

Lorsque l'un des indices de δ est sommé dans un monôme, on peut simplifier le monôme. Par exemple :

$$T^i_j \delta_i^k = T^k_j ; e_j = \delta_j^i e_i$$

1.2 Représentation matricielle de certaines sommations

Les sommations d'un monôme dont les termes ont un ou deux indices réels peuvent être représentées sous forme de produits matriciels.

Pour ranger des quantités à un ou deux indices dans des matrices, on adopte les conventions suivantes:

- Les matrices sont représentées entre crochets.

1. Voir plus loin l'ordre des indices des tenseurs gradients.

- Les quantités à un seul indice sont rangées dans des matrices colonnes. L'indice unique (en haut ou en bas) est donc un indice de ligne. Par exemple, les composantes d'un vecteur sur une base sont rangées dans une matrice colonne notée:

$$[V^\bullet] = \begin{bmatrix} V^1 \\ V^2 \\ \vdots \\ V^n \end{bmatrix}$$

- Les quantités à deux indices sont rangées dans des matrices carrées suivant la convention suivante:
l'indice de gauche est l'indice de ligne,
l'indice de droite est l'indice de colonne.

Par exemple, les termes T^i_j sont rangés dans la matrice carrée notée:

$$[T^{\bullet\bullet}] = \begin{bmatrix} T^1_1 & T^1_2 & \dots & T^1_n \\ T^2_1 & T^2_2 & \dots & T^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T^m_1 & T^m_2 & \dots & T^m_n \end{bmatrix}$$

Les points rappellent la position des indices des termes de la matrice.

Si les quantités comportent plus de deux indices, on n'utilise pas cette représentation (pour trois indices il faudrait une "matrice cubique").

A l'aide de ces conventions, on peut représenter matriciellement des sommations. Les n quantités c_j définies ci-dessous

$$c_j = A_j^i b_i = b_i A_j^i$$

peuvent être calculées par les produits matriciels

$$[c_\bullet] = [A_\bullet^\bullet] [b_\bullet] \quad ; \quad [c_\bullet]^T = [b_\bullet]^T [A_\bullet^\bullet]^T$$

De même, les n^2 quantités C_i^j définies ci-dessous

$$C_i^j = A_i^k B_k^j = B_k^j A_i^k$$

peuvent être calculées par les produits matriciels

$$[C_\bullet^\bullet] = [A_\bullet^\bullet] [B_\bullet^\bullet] \quad ; \quad [C_\bullet^\bullet]^T = [B_\bullet^\bullet]^T [A_\bullet^\bullet]^T$$

ATTENTION: Le produit matriciel n'est pas commutatif, alors que les sommes de produits $B_k^j A_i^k$ et $A_i^k B_k^j$ sont égales. Il convient donc de bien repérer la place des indices muets (ici en gras) pour écrire le bon produit matriciel! Pour que les termes du monôme apparaissent dans le même ordre que dans le produit matriciel, il faut que les indices de sommation soient contigus. Au besoin, il peut être nécessaire de transposer quelques matrices. Par exemple, les neuf termes C_i^j

$$C_i^j = A_{ki} B^{kj}$$

sont calculés par le produit matriciel

$$[C_\bullet^\bullet] = [A_\bullet^\bullet]^T [B^{\bullet\bullet}]$$

1.3 Composantes contravariantes d'un vecteur

Soient \mathcal{E} un espace vectoriel, soit $\{e_i\}$ une base de \mathcal{E} , et soit \mathbf{V} un vecteur de \mathcal{E} . On a donc $\mathbf{V} = V^i e_i$.

Les nombres V^i sont appelés *composantes contravariantes* du vecteur \mathbf{V} sur la base $\{e_i\}$. Ce sont donc les composantes habituelles d'un vecteur sur une base. La dénomination *contravariante* est justifiée par ce qui suit.

Soit $\{e'_j\}$ une autre base de \mathcal{E} . La nouvelle base $\{e'_j\}$ se définit sur l'ancienne base $\{e_i\}$ par les n relations:

$$\boxed{e'_j = A_j^i e_i}$$

où A_j^i est la i -ème composante du vecteur e'_j sur la base e_i . De même, l'ancienne base s'exprime sur la nouvelle par:

$$\boxed{e_i = B_i^k e'_k}$$

On peut ranger les nombres A_j^i et B_i^k dans des matrices carrées $n \times n$, avec la convention précédente, la matrice $[A_\bullet, \bullet]$ est appelée *matrice de passage*² de la base $\{e_i\}$ à la base $\{e'_i\}$, et la matrice $[B_\bullet, \bullet]$ est appelée matrice de passage de la base $\{e'_i\}$ à la base $\{e_i\}$.

La ligne j de la matrice $[A_\bullet, \bullet]$ contient les composantes contravariantes de e'_j dans la base $\{e_i\}$.

En combinant les égalités précédentes, il vient:

$$e'_j = A_j^i B_i^k e'_k$$

Les vecteurs d'une base étant indépendants, on en déduit

$$A_j^i B_i^k = \delta_j^k \iff [A_\bullet, \bullet][B_\bullet, \bullet] = [I_\bullet, \bullet] \text{ où } [I_\bullet, \bullet] \text{ est la matrice unité}$$

On a donc la relation entre les matrices $[A_\bullet, \bullet]$ et $[B_\bullet, \bullet]$:

$$\boxed{[B_\bullet, \bullet] = [A_\bullet, \bullet]^{-1}}$$

Soit $\mathbf{V} = V^i e_i$ un vecteur défini par ses composantes sur la base $\{e_i\}$. Son expression sur la nouvelle base $\{e'_i\}$ est

$$\mathbf{V} = \underbrace{V^i B_i^k}_{V'^k} e'_k$$

Les composantes contravariantes de \mathbf{V} dans la nouvelle base sont donc:

$$\boxed{V'^k = B_i^k V^i \iff [V', \bullet] = [B_\bullet, \bullet]^T [V, \bullet]}$$

Alors que les vecteurs de la nouvelle base $\{e'_i\}$ se définissent sur l'ancienne base $\{e_i\}$ avec les nombres de la matrice $[A_\bullet, \bullet]$, les composantes contravariantes V'^k du vecteur \mathbf{V} sur la nouvelle base se calculent à partir des composantes contravariantes V^i de \mathbf{V} sur l'ancienne base avec les nombres de la matrice $[B_\bullet, \bullet] = [A_\bullet, \bullet]^{-1}$. C'est pour cela qu'on dit que les V^i sont les composantes *contravariantes* de \mathbf{V} .

2. ATTENTION ! Dans beaucoup de cours d'algèbre, ce qu'on appelle "matrice de passage", souvent notée P , est la transposée de celle qui est définie ici !

Les nombres V^i et V'^i sont différents (ainsi que les matrices $[V^\bullet]$ et $[V'^\bullet]$). Ils représentent les composantes du même vecteur \mathbf{V} dans deux bases différentes³.

Il est facile de voir que changement de base inverse est :

$$\boxed{V^k = A_i{}^k V'^i ; [V^\bullet] = [A_\bullet{}^\bullet]^t [V'^\bullet]}$$

1.4 Base duale

Définissons une autre base $\{e^j\} = \{e^1, e^2, \dots, e^n\}$ par les n^2 relations suivantes:

$$\boxed{e^i \cdot e_j = \delta_j^i}$$

La base $\{e^i\}$ est appelée *base duale* de $\{e_i\}$. Par convention, les vecteurs de la base duale ont leur indice en haut.

On peut interpréter géométriquement cette définition: un vecteur e^i de la base duale est orthogonal à tous les vecteurs de la base ordinaire d'indice différent et est tel que son produit scalaire avec celui de même indice soit égal à 1.

Il est facile de voir que la base duale de $\{e^i\}$ est la base ordinaire $\{e_i\}$

1.5 Composantes covariantes d'un vecteur

Soit \mathbf{V} un vecteur de \mathcal{E} . Ses expressions sur la base ordinaire et sur la base duale sont:

$$\mathbf{V} = V^i e_i = V_i e^i$$

Il faut bien noter que les nombres V^i et V_i sont des nombres différents, puisque ce sont des composantes d'un même vecteur sur des bases différentes. Les V_i sont appelés *composantes covariantes* de \mathbf{V} . En considérant les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot e^k &= V^i e_i \cdot e^k = V^i \delta_i^k = V^k \\ \mathbf{V} \cdot e_k &= V_i e^i \cdot e_k = V_i \delta_k^i = V_k \end{aligned}$$

on voit que les composantes covariantes d'un vecteur \mathbf{V} sont les produits scalaires du vecteur \mathbf{V} avec les vecteurs de la base ordinaire. De même, les composantes contravariantes de \mathbf{V} sont les produits scalaires de \mathbf{V} avec les vecteurs de la base duale. On peut donc écrire:

$$\boxed{\mathbf{V} = V^i e_i = V_i e^i = (\mathbf{V} \cdot e^i) e_i = (\mathbf{V} \cdot e_i) e^i}$$

En effectuant le même changement de base que précédemment, on en déduit les formules de changement de base des composantes covariantes d'un vecteur :

Soit un vecteur

$$\mathbf{V} = V^i e_i = V_i e^i = V'^i e'_i = V'_i e'^i$$

3. Il faut donc se méfier de la confusion souvent faite entre matrice colonne et vecteur: une colonne de nombres ne représente un vecteur que si on lui associe une base!

On a :

$$\begin{aligned} V'_k &= \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}'_k = \mathbf{V} \cdot (A_k^i \mathbf{e}_i) = A_k^i (\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_i) = A_k^i V_i \\ V_k &= \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{V} \cdot (B_k^i \mathbf{e}'_i) = B_k^i (\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}'_i) = B_k^i V'_i \end{aligned}$$

Les formules de changement de base des composantes covariantes d'un vecteur sont donc :

$$\boxed{\begin{aligned} V'_k &= A_k^i V_i & \Leftrightarrow & [V'_\bullet] = [A_\bullet^\bullet] [V_\bullet] \\ V_k &= B_k^i V'_i & \Leftrightarrow & [V_\bullet] = [B_\bullet^\bullet] [V'_\bullet] \end{aligned}}$$

Contrairement aux composantes contravariantes, les formules de changement de base des composantes covariantes d'un vecteur utilisent la matrice $[A_\bullet^\bullet]$, ce qui justifie l'appellation de *covariante*.

On en déduit les relations entre la nouvelle base duale $\{\mathbf{e}'^i\}$ et l'ancienne base duale $\{\mathbf{e}^i\}$:

$$\mathbf{V} = V'_k \mathbf{e}'^k = A_k^i V_i \mathbf{e}'^k = V_i (A_k^i \mathbf{e}'^k) = V_i \mathbf{e}^i$$

et donc :

$$\boxed{\mathbf{e}^i = A_k^i \mathbf{e}'^k}$$

De même,

$$\mathbf{V} = V_k \mathbf{e}^k = B_k^i V'_i \mathbf{e}^k = V'_i (B_k^i \mathbf{e}^k) = V'_i \mathbf{e}'^i$$

et donc :

$$\boxed{\mathbf{e}'^i = B_k^i \mathbf{e}^k}$$

Remarque importante:

Si la base $\{\mathbf{e}_i\}$ est orthonormée, on trouve facilement qu'elle est confondue avec sa base duale $\{\mathbf{e}^i\}$. On a donc $[V^\bullet] = [V_\bullet]$.

Dans ce cas, puisqu'il est inutile de distinguer les variances, on peut convenir de mettre tous les indices à la même hauteur (généralement en bas), violant ainsi la règle 1 de la convention d'Einstein.

On retrouve un résultat bien connu: *Dans une base orthonormée*, les composantes d'un vecteur sont aussi les produits scalaires avec les vecteurs de base. Soit $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}$ une base *orthonormée* et soient \tilde{V}_i les composantes de \mathbf{V} sur cette base. On pourra écrire :

$$\mathbf{V} = V_i \tilde{\mathbf{e}}_i = (\mathbf{V} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_i) \tilde{\mathbf{e}}_i$$

(avec sommation sur l'indice i)

Bien noter que cette écriture n'a de sens que dans une base orthonormée!

1.6 Tenseurs euclidiens

1.6.1 Définition

Soit \mathcal{E} un espace euclidien de dimension n . Un tenseur \mathbf{T} d'ordre p est une application p -linéaire de $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \dots \times \mathcal{E}$ (p fois) dans \mathbb{R} .

Par exemple, soient \mathbf{X} , \mathbf{Y} et \mathbf{Z} trois vecteurs quelconques de \mathcal{E} . Un tenseur du troisième ordre \mathbf{T} est l'application trilinéaire définie par

$$\mathbf{T} : \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\} \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \in \mathbb{R}$$

Si on choisit d'écrire les vecteurs \mathbf{X} , \mathbf{Y} et \mathbf{Z} sur une base $\{e_i\}$ de \mathcal{E} , par leurs composantes contravariantes,

$$\mathbf{X} = X^i e_i; \mathbf{Y} = Y^j e_j; \mathbf{Z} = Z^k e_k$$

la linéarité de \mathbf{T} entraîne :

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \mathbf{T}(e_i, e_j, e_k) X^i Y^j Z^k$$

On note

$$T_{ijk} = \mathbf{T}(e_i, e_j, e_k)$$

et donc, l'application (trilinéaire) du tenseur du troisième ordre \mathbf{T} aux trois vecteurs \mathbf{X} , \mathbf{Y} , et \mathbf{Z} s'écrit :

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = T_{ijk} X^i Y^j Z^k$$

Les T_{ijk} sont appelés *composantes 123-covariantes de \mathbf{T}* ⁴. On laisse le soin au lecteur de justifier la dénomination de covariance en effectuant un changement de base.

On peut aussi choisir d'utiliser la base duale $\{e^i\}$ pour exprimer certains ou tous les vecteurs \mathbf{X} , \mathbf{Y} et \mathbf{Z} . Par exemple

$$\mathbf{X} = X^i e_i; \mathbf{Y} = Y_j e^j; \mathbf{Z} = Z_k e^k$$

On obtient

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = \mathbf{T}(e_i, e^j, e^k) X^i Y_j Z_k = T_i{}^{jk} X^i Y_j Z_k$$

Les $T_i{}^{jk}$ sont appelés *composantes 1-covariantes 23-contravariantes de \mathbf{T}* .

Toutes les combinaisons sont possibles. Suivant le choix qu'on fait d'exprimer les arguments de \mathbf{T} sur la base ordinaire ou sur la base duale, on obtient différentes sortes de composantes de \mathbf{T} , repérées par des hauteurs d'indices différentes. Le nombre d'indices est égal à l'ordre du tenseur.

Le lecteur établira facilement que les formules de changement de base pour ces composantes sont:

$$T_i{}^{jk} = A_i{}^m B_n{}^j B_p{}^k T_m{}^{np}$$

RÈGLE (à démontrer à titre d'exercice) :

Pour changer de base les composantes d'un tenseur,

- on somme les indices covariants avec les termes de la matrice $[A, \bullet]$
- on somme les indices contravariants avec les termes de la matrice $[B, \bullet]$

Chaque indice du tenseur est donc sommé avec une matrice A ou B suivant sa variance. Dans un changement de base d'un tenseur d'ordre p , il faut donc utiliser p sommations.

Exemple de tenseur d'ordre 3 : le tenseur d'orientation

Soit \mathcal{E} un espace Euclidien de dimension 3. L'opérateur

$$\mathbf{E} : \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\} \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \in \mathbb{R}$$

où $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ est le produit mixte des trois vecteurs, est un tenseur du troisième ordre. Ce tenseur nommé *tenseur d'orientation* sera étudié en détail plus loin⁵.

4. Le terme de *composante* sera justifié plus loin.

5. Il existe une généralisation à l'ordre n . Elle implique l'introduction de la notion d'*alterneur* qui sort du cadre de ce cours. La dimension 3 est suffisante en mécanique classique.

Exemple de tenseur d'ordre 2 : le tenseur métrique

Soit \mathcal{E} un espace Euclidien de dimension n . L'opérateur

$$\mathbf{G} : \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\} \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} \in \mathbb{R}$$

où $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$ est le produit scalaire des deux vecteurs, est un tenseur du second ordre. Ce tenseur nommé *tenseur métrique* sera étudié en détail plus loin.

Les tenseurs d'ordre 1

Soit \mathcal{E} un espace Euclidien de dimension n et soit \mathbf{V} un vecteur donné de \mathcal{E} . L'opérateur

$$\mathcal{V} : \mathbf{X} \in \mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{V} \cdot \mathbf{X} \in \mathbb{R}$$

où $\mathbf{V} \cdot \mathbf{X}$ est le produit scalaire des deux vecteurs, est un tenseur du premier ordre⁶.

$$\mathcal{V}(\mathbf{X}) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{X}$$

Si on choisit d'exprimer \mathbf{X} dans la base $\{\mathbf{e}_i\}$

$$\mathbf{X} = X^i \mathbf{e}_i$$

on obtient

$$\mathcal{V}(\mathbf{X}) = \mathbf{V} \cdot (X^i \mathbf{e}_i) = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_i) X^i = V_i X^i$$

Les composantes covariantes du tenseur du premier ordre \mathcal{V} ne sont autres que les composantes covariantes du vecteur \mathbf{V} .

En exprimant \mathbf{X} dans la base duale, on déduit un résultat identique: les composantes contravariantes du tenseur du premier ordre \mathcal{V} ne sont autres que les composantes contravariantes du vecteur \mathbf{V} .

On en déduit que *les vecteurs de \mathcal{E} peuvent toujours être considérés comme des tenseurs du premier ordre, et inversement*. Les tenseurs du premier ordre sont aussi appelés *formes linéaires*. En vertu de l'isomorphisme entre les tenseurs du premier ordre et les vecteurs, on ne les distinguera plus dans la suite, et on peut écrire

$$\mathcal{V}(\mathbf{X}) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{X}$$

Les tenseurs d'ordre zéro

Par convention, les tenseurs d'ordre zéro sont les *scalaires*. Ces scalaires sont invariants dans les changement de base de \mathcal{E} . Tous les nombres ne sont pas des scalaires! Dans une expression respectent les conventions d'Einstein, on reconnaît les scalaires par le fait qu'ils n'ont pas d'indice réel.

Exemple de scalaire: Le réel $\alpha = \mathbf{V} \cdot \mathbf{W} = V_i W^i = V^i W_i$ est un scalaire, car le produit scalaire de deux vecteurs est indépendant de la base dans laquelle on le calcule. Il suffit pour s'en convaincre de faire un changement de base:

$$\alpha = V_i' W'^i = A_i^m V_m B_n^i W^n = B_n^i A_i^m V_m W^n = \delta_n^m V_m W^n = V_n W^n$$

Par contre, la composante d'un vecteur est un nombre réel, mais pas un scalaire:

$$V'^i = B^i_j V^j \neq V^j$$

⁶. Dans les cours d'algèbre élémentaire, les tenseurs d'ordre 1 (applications linéaires sur \mathcal{E} sont aussi appelées *formes linéaires*).

1.6.2 L'espace vectoriel des tenseurs d'ordre p

Opérations élémentaires sur les tenseurs

On définit deux opérations dans l'ensemble des tenseurs d'ordre p .

- Addition de deux tenseurs du même ordre:
Soient \mathbf{T}_1 et \mathbf{T}_2 deux tenseurs d'ordre p . On appelle somme de \mathbf{T}_1 et \mathbf{T}_2 le tenseur d'ordre p défini par:

$$(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2)(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_p) = \mathbf{T}_1(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_p) + \mathbf{T}_2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_p) \\ \forall \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_p\} \in \mathcal{E}^p$$

L'addition de deux tenseurs d'ordres différents n'a aucun sens.

- Multiplication d'un tenseur par un scalaire:
Soit λ un scalaire et \mathbf{T} un tenseur d'ordre p . On appelle produit de \mathbf{T} par λ le tenseur d'ordre p défini par:

$$(\lambda \mathbf{T})(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_p) = \lambda \mathbf{T}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_p) \quad \forall \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_p\}$$

Muni de ces deux opérations, l'ensemble des tenseurs d'ordre p est un espace vectoriel.

Produit tensoriel de deux vecteurs

Considérons deux vecteurs (ou tenseurs d'ordre 1) \mathbf{V} et \mathbf{W} . On appelle produit tensoriel des deux vecteurs \mathbf{V} et \mathbf{W} le tenseur du second ordre noté $\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}$ défini par:

$$\mathbf{V} \otimes \mathbf{W} : \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\} \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow (\mathbf{V} \otimes \mathbf{W})(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{X})(\mathbf{W} \cdot \mathbf{Y}) \in \mathbb{R}$$

$\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}$ est évidemment bilinéaire, c'est donc un tenseur du second ordre.

En exprimant \mathbf{X} et \mathbf{Y} sur la base ordinaire, on obtient les composantes covariantes du tenseur $\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{V} \otimes \mathbf{W})(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= [\mathbf{V} \cdot (X^i \mathbf{e}_i)] [\mathbf{W} \cdot (Y^j \mathbf{e}_j)] \\ &= (\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_j) X^i Y^j \\ &= (V_i W_j) X^i Y^j \end{aligned}$$

Les composantes covariantes du tenseur du second ordre $\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}$ sont donc les nombres

$$(\mathbf{V} \otimes \mathbf{W})_{ij} = V_i W_j$$

On généralise sans difficulté: le produit tensoriel de p vecteurs est un tenseur d'ordre p .

Bien noter que le produit tensoriel n'est pas commutatif: on laisse le soin au lecteur de vérifier que les tenseurs $\mathbf{V} \otimes \mathbf{W}$ et $\mathbf{W} \otimes \mathbf{V}$ sont des applications bilinéaires différentes:

$$(\mathbf{V} \otimes \mathbf{W})(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}) \neq (\mathbf{W} \otimes \mathbf{V})(\mathbf{X} \otimes \mathbf{Y})$$

Une base pour l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre p

Pour simplifier les notations, on considère $p = 3$ (le lecteur généralisera sans difficulté). Considérons tous les produits tensoriels de 3 vecteurs⁷ de la base $\{\mathbf{e}^i\}$:

$$(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = X^i Y^j Z^k$$

7. Les indices peuvent être égaux, $\mathbf{V} \otimes \mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$ est bien un tenseur du troisième ordre!

Ces produits tensoriels sont au nombre de n^p (ici n^3).

Considérons maintenant un tenseur \mathbf{T} d'ordre 3:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) &= T_{ijk} X^i Y^j Z^k \\ &= T_{ijk} (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \\ &\quad \forall \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\} \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E} \end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie $\forall \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\}$, on en déduit l'égalité *tensorielle* suivante:

$$\boxed{\mathbf{T} = T_{ijk} (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k)}$$

Tout tenseur \mathbf{T} d'ordre 3 peut donc être décomposé sur la base tensorielle $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k\}$ suivant la formule ci-dessus.

En exprimant les vecteurs \mathbf{X} , \mathbf{Y} et \mathbf{Z} par leurs composantes de variance différente, on construit d'autres bases :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{T} &= T_{ijk} (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^k) \\ &= T_{ijk} (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \\ &= \dots \end{aligned}}$$

Le raisonnement peut être généralisé: une base des tenseurs d'ordre p est par exemple l'ensemble des produits tensoriels $\{\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p}\}$. Dans cette base, les composantes du tenseur sont les composantes complètement contravariantes.

Conclusion

L'espace des tenseurs d'ordre p est un espace vectoriel de dimension n^p . On peut construire des bases de cet espace en formant tous les p -produits tensoriels des vecteurs de base (duale ou non) de \mathcal{E} .

Par exemple, une base des tenseurs d'ordre 2 dans un espace \mathcal{E} de dimension 3 est l'ensemble des 9 tenseurs du second ordre suivant :

$$(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1), (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2), (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3), (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1), (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2), (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3), (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1), (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2), (\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)$$

Dans cette base, les composantes d'un tenseur du second ordre $\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ sont contravariantes.

1.6.3 Produit tensoriel de deux tenseurs

Soient \mathbf{P} un tenseur d'ordre p et \mathbf{Q} un tenseur d'ordre q . On appelle produit tensoriel de \mathbf{P} et \mathbf{Q} , noté $\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}$, le tenseur d'ordre $p+q$ défini par:

$$(\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q})(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_{p+q}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_p) \mathbf{Q}(\mathbf{X}_{p+1}, \mathbf{X}_{p+2}, \dots, \mathbf{X}_{p+q})$$

Par exemple, pour $p=2$ et $q=3$, on a:

$$\begin{aligned} (\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q})(\mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) &= \mathbf{P}(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \mathbf{Q}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \\ &= P_{ij} Q_{kmn} V^i W^j X^k Y^m Z^n \\ &= P_i^j Q_k^m V^i W_j X^k Y_m Z^n \\ &\dots \\ &\quad \forall \{\mathbf{V}, \mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\} \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E} \end{aligned}$$

et les égalité tensorielles:

$$\begin{aligned} (\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}) &= P_{ij} Q_{kmn} (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^n) \\ &= P_i^j Q_k^m{}_n (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^n) \\ &\dots \end{aligned}$$

Soit encore en termes de composantes (chaque égalité représente n^5 égalités):

$$\begin{aligned} (\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q})_{ijkmn} &= P_{ij} Q_{kmn} \\ (\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q})_i{}^j{}_k{}^m{}_n &= P_i^j Q_k^m{}_n \\ &\dots \end{aligned}$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que le produit tensoriel est associatif, non commutatif et distributif par rapport à l'addition des tenseurs.

1.6.4 Produit tensoriel contracté

Soit \mathbf{P} un tenseur d'ordre $p \geq 1$ et soit \mathbf{Q} un tenseur d'ordre $q \geq 1$. On appelle $\mathbf{P} \overline{\otimes} \mathbf{Q}$ ⁸ *produit tensoriel contracté* des tenseurs \mathbf{P} et \mathbf{Q} le tenseur d'ordre $p + q - 2$ dont les composantes sont obtenues par sommation du dernier indice de \mathbf{P} avec le premier indice de \mathbf{Q} .

Par exemple, si $p = 3$ et $q = 2$ on a

$$\mathbf{P} \overline{\otimes} \mathbf{Q} = P^{ijk} Q_k^m (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_m)$$

ou si on préfère:

$$(\mathbf{P} \overline{\otimes} \mathbf{Q})^{ijm} = P^{ijk} Q_k^m$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier l'opération ainsi définie est bien une opération tensorielle, c'est à dire que si on fait la même opération sur les composantes dans une autre base, on obtient bien le même tenseur:

$$\mathbf{P} \overline{\otimes} \mathbf{Q} = P^{ijk} Q_k^m (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_m) = P'^{ijk} Q_k'^m (\mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}'_j \otimes \mathbf{e}'_m)$$

et que le produit tensoriel contracté est associatif, non commutatif en général⁹ et distributif par rapport à l'addition des tenseurs.

Exemple 1:

Le produit contracté de deux vecteurs \mathbf{U} et \mathbf{V} est un tenseur d'ordre 0.

$$\mathbf{U} \overline{\otimes} \mathbf{V} = U_i V^i = U^i V_i = \mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$$

(C'est une autre manière d'écrire le produit scalaire $\mathbf{U} \cdot \mathbf{V}$)

Exemple 2:

La contraction d'un tenseur \mathbf{T} d'ordre 2 et d'un tenseur \mathbf{V} d'ordre 1 (un vecteur) donne un tenseur $\mathbf{W} = \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{V}$ d'ordre 1 (un vecteur):

$$\mathbf{W} = \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{V} = T^i{}_j V^j \mathbf{e}_i = T^{ij} V_j \mathbf{e}_i = T_i{}^j V_j \mathbf{e}^i = T_{ij} V^j \mathbf{e}^i$$

8. Certains auteurs notent le produit contracté $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$, ou encore simplement \mathbf{PQ} . Ces notations sont dangereuses, car elles invitent à la commutativité. Le produit tensoriel non contracté est aussi parfois écrit \mathbf{PQ} .

9. L'exemple qui suit donne un exemple de commutativité.

ou en termes de composantes :

$$W^i = T^i_j V^j = T^{ij} V_j ; W_i = T^j_i V_j = T_{ij} V^j$$

On peut remarquer que les composantes de \mathbf{W} peuvent se calculer matriciellement :

$$|W^\bullet| = [T^\bullet, \bullet] |V^\bullet| = [T^{\bullet\bullet}] |V_\bullet| ; |W_\bullet| = [T_\bullet, \bullet] |V_\bullet| = [T_{\bullet\bullet}] |V^\bullet|$$

Remarque : Le lecteur est invité à vérifier que les vecteurs $\mathbf{V} \overline{\otimes} \mathbf{T}$ et $\mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{V}$ sont différents en général.

Exemple 3 :

Le produit contracté d'un tenseur \mathbf{T} d'ordre 2 et d'un tenseur \mathbf{U} d'ordre 2 donne un tenseur $\mathbf{W} = \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{U}$ d'ordre 2 :

$$\mathbf{W} = \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{U} = T^i_j U^j_k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^k$$

ou en termes de composantes :

$$W^i_k = T^i_j U^j_k$$

Le produit contracté de deux tenseurs d'ordre 2 est donc un *produit interne* de l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre 2.

On peut remarquer que les composantes de \mathbf{W} peuvent se calculer avec des produits matriciels

$$[W^\bullet, \bullet] = [T^\bullet, \bullet] [U^\bullet, \bullet] = [T^{\bullet\bullet}] [U_{\bullet\bullet}] ; [W_\bullet, \bullet] = [T_\bullet, \bullet] [U_\bullet, \bullet] = [T_{\bullet\bullet}] [U^{\bullet\bullet}] ; \dots$$

Exemple 4 :

Soit \mathbf{T} un tenseur du second ordre. L'opération $\mathbf{T}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ peut s'écrire avec des produits tensoriels contractés :

$$\mathbf{T}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = T_{ij} U^i V^j = U^i T_{ij} V^j = (\mathbf{U} \overline{\otimes} \mathbf{T}) \overline{\otimes} \mathbf{V} = \mathbf{U} \overline{\otimes} (\mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{V}) = \mathbf{U} \overline{\otimes} \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{V}$$

1.6.5 Produit tensoriel doublement contracté de deux tenseurs

Soit \mathbf{P} un tenseur d'ordre $p \geq 2$ et soit \mathbf{Q} un tenseur d'ordre $q \geq 2$. On appelle *produit tensoriel doublement contracté* des tenseurs \mathbf{P} et \mathbf{Q} le tenseur d'ordre $p + q - 4$ dont les composantes sont obtenues par sommation des deux derniers indices de \mathbf{P} avec les deux premiers indices de \mathbf{Q} .

Par exemple, si $p = 3$ et $q = 3$ on a

$$\mathbf{P} \overline{\otimes} \mathbf{Q} = P^{ijk} Q_{jk}{}^m (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m)$$

ou si on préfère, on a les n^2 égalités :

$$\left(\mathbf{P} \overline{\otimes} \mathbf{Q} \right)^{im} = P^{ijk} Q_{jk}{}^m$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier l'opération ainsi définie est bien une opération tensorielle, c'est à dire que si on fait la même opération sur les composantes dans une autre base, on obtient bien le même tenseur :

$$\mathbf{P} \overline{\otimes} \mathbf{Q} = P^{ijk} Q_{jk}{}^m (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m) = P'^{ijk} Q'_{jk}{}^m (\mathbf{e}'_i \otimes \mathbf{e}'_m)$$

et que le produit tensoriel doublement contracté n'est en général ni associatif ni commutatif, et qu'il est distributif par rapport à l'addition des tenseurs.

Cas particulier important :

Le produit doublement contracté de deux tenseurs du second ordre est un scalaire. Soient P et Q deux tenseurs du second ordre,

$$P \overline{\otimes} Q = P^{ij} Q_{ij} = P^i_j Q_i^j = P_i^j Q^i_j = P_{ij} Q^{ij}$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que le produit doublement contracté de deux tenseurs du second ordre est bien un *produit scalaire* dans l'espace vectoriel des tenseurs du second ordre.

On peut donc définir une norme dans l'espace des tenseurs du second ordre:

$$\|T\| = \sqrt{T \overline{\otimes} T} = \sqrt{[T \bullet \bullet] [T \bullet \bullet]^t}$$

Si les composantes des deux tenseurs sont rangées dans des matrices, le lecteur verra facilement que

$$P \overline{\otimes} Q = \text{Trace} \left([P \bullet \bullet] [Q \bullet \bullet]^T \right) = \text{Trace} \left([P \bullet \bullet] [Q \bullet \bullet]^T \right) = \dots$$

1.6.6 Produit n fois contracté

On généralise facilement au produit n fois contracté de deux tenseurs d'ordre $p \geq n$ et $q \geq n$:

$$P \overline{\otimes} Q = P^{k_1 \dots k_{p-n} i_1 \dots i_n} Q_{i_1 \dots i_n j_1 \dots j_{q-n}} e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_{p-n}} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_{q-n}}$$

Le résultat est un tenseur d'ordre $p + q - 2n$.

En particulier, l'application p -linéaire peut s'écrire

$$P(X_1, \dots, X_p) = P \overline{\otimes} (X_1 \otimes \dots \otimes X_p)$$

Si $n < p$ le produit n -contracté

$$P \overline{\otimes} (X_1 \otimes \dots \otimes X_n) = P^{i_1 \dots i_{p-n} j_1 \dots j_n} (X_1)_{j_1} \dots (X_n)_{j_n} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{p-n}}$$

définit un tenseur d'ordre $p - n$.

1.7 Etude du tenseur métrique

1.7.1 Calcul des composantes

Le tenseur métrique est un tenseur d'ordre 2 qui a déjà été défini par:

$$G : \{X, Y\} \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow X \cdot Y \in \mathbb{R}$$

dont les composantes de différentes variances sont:

$$G = g_{ij} e^i \otimes e^j = g^{ij} e_i \otimes e_j = g_i^j e^i \otimes e_j = g^i_j e_i \otimes e^j$$

Calculons ses différentes sortes de composantes;

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \mathbf{G}(e_i, e_j) = e_i \cdot e_j \\ g^{ij} &= \mathbf{G}(e^i, e^j) = e^i \cdot e^j \\ g_i^j &= \mathbf{G}(e_i, e^j) = e_i \cdot e^j = \delta_i^j \\ g^i_j &= \mathbf{G}(e^i, e_j) = e^i \cdot e_j = \delta_j^i \end{aligned}$$

Remarquer que la matrice des composantes $[g_{\bullet\bullet}]$ et la matrice des composantes $[g^{\bullet\bullet}]$ sont symétriques car le produit scalaire de deux vecteurs est symétrique.

Remarquer aussi que les composantes mixtes de \mathbf{G} sont indépendantes des vecteurs de base $\{e_i\}$.

1.7.2 Le tenseur métrique vu comme un "ascenseur d'indice"

Soit un vecteur \mathbf{V} et considérons le produit contracté $\mathbf{W} = \mathbf{G} \overline{\otimes} \mathbf{V}$ (c'est un tenseur du premier ordre). En utilisant les composantes mixtes de \mathbf{G} , on calcule les composantes de \mathbf{W} sur la base $\{e_i\}$ par :

$$W^i = g^i_j V^j = \delta_j^i V^j = V^i$$

Les vecteurs \mathbf{W} et \mathbf{V} ont mêmes composantes sur la base $\{e_i\}$, ils sont donc égaux. Ainsi :

$$\boxed{\mathbf{V} = \mathbf{G} \overline{\otimes} \mathbf{V}}$$

En utilisant les autres composantes de \mathbf{G} , on obtient les formules de changement de variance:

$$\boxed{V_i = g_{ij} V^j \text{ et } V^i = g^{ij} V_j}$$

Les composantes $g_{\bullet\bullet}$ du tenseur métrique permettent donc de calculer les composantes covariantes d'un vecteur à partir de ses composantes contravariantes. Les composantes $g^{\bullet\bullet}$ font l'opération inverse.

Matriciellement, ces relations s'écrivent:

$$[V_\bullet] = [g_{\bullet\bullet}] [V^\bullet] \text{ et } [V^\bullet] = [g^{\bullet\bullet}] [V_\bullet]$$

Elles montrent que les matrices $[g_{\bullet\bullet}]$ et $[g^{\bullet\bullet}]$ sont inverses:

$$\boxed{[g^{\bullet\bullet}] = [g_{\bullet\bullet}]^{-1}}$$

On pose

$$g = \det [g_{\bullet\bullet}]$$

Cette quantité interviendra dans la suite. On a évidemment

$$\boxed{\det [g^{\bullet\bullet}] = \frac{1}{g}}$$

Le lecteur montrera facilement que le tenseur métrique sert aussi à changer la variance des indices d'un tenseur d'ordre p . Par exemple:

$$\begin{aligned} T_i^{jk} &= g^{jm} g^{kn} T_{imn} \\ U_{ij} &= g_{im} U^m_j \end{aligned}$$

Le tenseur métrique possède d'autres propriétés importantes qu'on verra plus loin en analyse et qui justifient son qualificatif de métrique.

1.7.3 Calcul des produits scalaires

De par sa définition, le tenseur métrique sert à calculer le produit scalaire de deux vecteurs. Les différentes manières d'écrire un produit scalaire sont donc :

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = \mathbf{G}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X} \otimes \mathbf{G} \otimes \mathbf{Y} = g_{ij} X^i Y^j = g^{ij} X_i Y_j = X^i Y_i = X_i Y^i = \mathbf{X} \otimes \mathbf{Y}$$

1.8 Etude du tenseur d'orientation dans \mathcal{E}_3

1.8.1 Calcul des composantes

Le tenseur d'orientation *dans* \mathcal{E}_3 est un tenseur d'ordre 3 qui a déjà été défini par :

$$\mathbf{E} : \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\} \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \in \mathbb{R}$$

où $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ est le produit mixte des trois vecteurs.

Ici, les indices i, j et k varient de 1 à 3. Nous supposons de plus que *la base* $\{\mathbf{e}_i\}$ *est directe*.

Les composantes complètement covariantes de \mathbf{E} sont :

$$e_{ijk} = \mathbf{E}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$$

Les propriétés du produit mixte entraînent que :

- Les composantes qui ont deux indices égaux sont nulles.
- Les composantes dont les indices sont en permutation circulaire directe sont égales.
- Les composantes dont les indices sont en permutation circulaire inverse sont égales et opposées aux précédentes.

Il suffit donc de calculer $e_{123} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Or,

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3)$$

Par définition de la base duale, le vecteur $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$ est colinéaire à \mathbf{e}^1 . De plus, la base $\{\mathbf{e}_i\}$ étant directe, ils sont de même sens. Pour caractériser complètement $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$, il suffit donc de calculer son module.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3\|^2 &= (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \cdot (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \\ &= (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \\ &= ((\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \wedge \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 \\ &= [(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_3 - (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_2] \cdot \mathbf{e}_3 \\ &= (g_{22} \mathbf{e}_3 - g_{23} \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 \\ &= (g_{22} g_{33} - g_{23} g_{23}) \\ \|\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3\| &= \sqrt{g_{22} g_{33} - g_{23} g_{23}} \\ \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 &= \frac{\sqrt{g_{22} g_{33} - g_{23} g_{23}}}{\|\mathbf{e}^1\|} \mathbf{e}^1 \\ &= \frac{\sqrt{g_{22} g_{33} - g_{23} g_{23}}}{\sqrt{g^{11}}} \mathbf{e}^1 \quad \text{car } g^{11} = \|\mathbf{e}^1\|^2 \end{aligned}$$

Or, on a $[g^{\bullet\bullet}] = [g_{\bullet\bullet}]^{-1}$, et donc en particulier :

$$g^{11} = \frac{g_{22} g_{33} - g_{23} g_{32}}{g}$$

Il reste donc

$$e_{123} = \sqrt{g} e_1 \cdot e^1$$

$$\boxed{e_{123} = \sqrt{g}}$$

Les composantes complètement contravariantes e^{ijk} de \mathbf{E} ont les mêmes propriétés d'indices que e_{ijk} puisque

$$e^{ijk} = (e^i, e^j, e^k)$$

On montre de même que

$$\boxed{e^{123} = \frac{1}{\sqrt{g}}}$$

Les composantes mixtes de \mathbf{E} ont des expressions compliquées qu'on évite d'utiliser. On peut toujours les calculer avec "l'ascenseur d'indices".

1.8.2 Application : produits vectoriels dans \mathcal{E}_3

Soient deux vecteurs \mathbf{X} et \mathbf{Y} de \mathcal{E}_3 et soit $\mathbf{Z} = \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{Z} &= (X^i e_i) \wedge (Y^j e_j) \\ &= X^i Y^j e_i \wedge e_j \\ \mathbf{Z} \cdot e_k &= X^i Y^j (e_i, e_j, e_k) \\ Z_k &= e_{ijk} X^i Y^j \\ &= Y^j e_{jki} X^i \end{aligned}$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs s'écrit donc avec le tenseur d'orientation :

$$\boxed{\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} = e_{ijk} X^i Y^j e^k = \mathbf{Y} \otimes \mathbf{E} \otimes \mathbf{X}}$$

En utilisant les composantes contravariantes de \mathbf{E} , on montrerait de même que

$$\boxed{\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} = e^{ijk} X_i Y_j e_k}$$

On laisse le soin au lecteur de montrer les deux résultats suivants¹⁰;

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E})^{ij}{}_{mn} &= e^{ijk} e_{kmn} = \delta_m^i \delta_n^j - \delta_n^i \delta_m^j \\ \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} &= 2\mathbf{G} \end{aligned}$$

1.9 Propriétés des tenseurs du second ordre

Les tenseurs du second ordre jouent un rôle très important en mécanique et jouissent de propriétés particulières que nous allons développer¹¹.

10. La première se montre à partir de la formule du double produit vectoriel appliqué aux vecteurs de base. La seconde peut se déduire de la première.

11. Cet exposé est le strict minimum indispensable pour la suite. Le lecteur curieux pourra trouver des compléments dans <http://esm2.imt-mrs.fr/gar/gd4.pdf>

1.9.1 Tenseurs du second ordre symétriques

On dit qu'un tenseur du second ordre est symétrique si

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{T}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \quad \forall \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\} \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$$

soit encore:

$$\mathbf{X} \otimes \mathbf{T} \otimes \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \otimes \mathbf{T} \otimes \mathbf{X} \quad \forall \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} T_{ij} X^i Y^j &= T_{ij} Y^i X^j \\ &= T_{ji} Y^j X^i \\ &= T_{ji} X^i Y^j \quad \forall \{X^i, Y^j\} \end{aligned}$$

et donc

$$T_{ij} = T_{ji}$$

La matrice $[T_{\bullet\bullet}]$ est symétrique. On montre de même que la matrice $[T^{\bullet\bullet}]$ l'est aussi. Par contre, les matrices $[T_{\bullet\cdot}]$ et $[T^{\cdot\bullet}]$ ne sont pas symétriques en général, mais le lecteur montrera facilement qu'on a la relation :

$$[T_{\bullet\cdot}] = [T^{\cdot\bullet}]^T$$

1.9.2 Tenseurs du second ordre antisymétriques

On dit qu'un tenseur du second ordre est antisymétrique si

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -\mathbf{T}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \quad \forall \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\} \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$$

soit encore:

$$\mathbf{X} \otimes \mathbf{T} \otimes \mathbf{Y} = -\mathbf{Y} \otimes \mathbf{T} \otimes \mathbf{X} \quad \forall \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} T_{ij} X^i Y^j &= -T_{ij} Y^i X^j \\ &= -T_{ji} Y^j X^i \\ &= -T_{ji} X^i Y^j \quad \forall \{X^i, Y^j\} \end{aligned}$$

et donc

$$T_{ij} = -T_{ji}$$

La matrice $[T_{\bullet\bullet}]$ est antisymétrique. On montre de même que la matrice $[T^{\bullet\bullet}]$ l'est aussi. Par contre, les matrices $[T_{\bullet\cdot}]$ et $[T^{\cdot\bullet}]$ ne sont pas antisymétriques en général, mais le lecteur montrera facilement qu'on a la relation :

$$[T_{\bullet\cdot}] = -[T^{\cdot\bullet}]^T$$

1.9.3 Transposé d'un tenseur du second ordre

On dit que le tenseur U est le transposé du tenseur T si

$$U(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = T(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \quad \forall \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\} \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$$

soit encore:

$$\mathbf{X} \otimes U \otimes \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \otimes T \otimes \mathbf{X} \quad \forall \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\}$$

On écrit

$$U = T^T$$

Il est facile de voir qu'on a les relations suivantes:

$$\begin{aligned} U_{ij} &= T_{ji} & [U_{\bullet\bullet}] &= [T_{\bullet\bullet}]^T \\ U^{ij} &= T^{ji} & [U^{\bullet\bullet}] &= [T^{\bullet\bullet}]^T \\ U^i_j &= T^j_i & [U^{\bullet\cdot}] &= [T^{\cdot\bullet}]^T \\ U_i^j &= T^j_i & [U_{\cdot\bullet}] &= [T^{\bullet\cdot}]^T \end{aligned}$$

On montre facilement que:

- Si un tenseur du second ordre S est symétrique, $S = S^T$
- Si un tenseur du second ordre A est antisymétrique, $A = -A^T$

1.9.4 Endomorphisme associé à un tenseur du second ordre

Soit T un tenseur du second ordre. Son produit contracté avec un vecteur V donne un vecteur W :

$$W = T \otimes V$$

L'opération $(T \otimes)$ peut donc être considérée comme une application linéaire de \mathcal{E} dans \mathcal{E} . On la note provisoirement \tilde{T} . Ainsi, à tout tenseur du second ordre on peut associer un endomorphisme \tilde{T} tel que :

$$\tilde{T} : V \in \mathcal{E} \longrightarrow W = \tilde{T}(V) = T \otimes V \in \mathcal{E}$$

En termes de composantes on a :

$$W_i = t_i^j V_j = t_{ij} V^j ; W^i = t^{ij} V_j = t^i_j V^j$$

En termes de matrices, on a :

$$[W_{\bullet}] = [T_{\bullet\cdot}] [V_{\cdot}] = \dots$$

On trouve parfois, pour l'endomorphisme associé la notation $T(V)$ ou $T(\bullet, V)$ (pour rappeler que V est contracté avec le second indice de T).

Inversement, si on se donne un endomorphisme \tilde{T} , on peut lui associer un tenseur du second ordre T défini par

$$T : \{U, V\} \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow T(U, V) = U \cdot \tilde{T}(V) = U \otimes T \otimes V$$

En termes de composantes on a :

$$\mathbf{T}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = t_{ij}U^iV^j = t^{ij}U_iV_j = t^i_jU_iV^j = t_i^jU^iV_j$$

Ainsi, tout tenseur du second ordre peut être considéré soit comme une application de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ dans \mathbb{R} , soit comme un endomorphisme de \mathcal{E} , selon qu'on contracte ses composantes avec deux ou un vecteur.

Dans la suite, on ne distinguera plus les notations \mathbf{T} et $\tilde{\mathbf{T}}$: Si \mathbf{T} est appliqué à deux vecteurs, il est vu comme un tenseur du second ordre (le résultat est un réel), s'il est appliqué à un seul vecteur, il est vu comme un endomorphisme de \mathcal{E} (le résultat est un vecteur).

Remarque:

Certains auteurs considèrent un second endomorphisme associé au tenseur \mathbf{T} , noté $\mathbf{T}(\mathbf{V}, \bullet)$, qui résulte de la contraction de \mathbf{V} avec le *premier indice* de \mathbf{T} .

$$\mathbf{X} = \mathbf{T}(\mathbf{V}, \bullet) = \mathbf{V} \overline{\otimes} \mathbf{T}$$

Cet endomorphisme est différent du précédent, mais le lecteur verra facilement qu'il ne s'agit que de l'endomorphisme associé au transposé de \mathbf{T} :

$$\mathbf{V} \overline{\otimes} \mathbf{T} = \mathbf{T}^T \overline{\otimes} \mathbf{V}$$

Si \mathbf{T} est symétrique, les deux endomorphismes sont identiques. C'est le cas de presque tous les tenseurs utilisés en mécanique, ce qui justifie la notation $\mathbf{T}(\mathbf{V})$ souvent utilisée en mécanique. Lorsque \mathbf{T} n'est pas symétrique, on conviendra des notations suivantes:

$$\mathbf{T}(\mathbf{V}) = \mathbf{T}(\bullet, \mathbf{V}) = \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{V} = T^i_j V^j \mathbf{e}_i = T_{ij} V^j \mathbf{e}^i = \dots$$

$$\mathbf{T}^T(\mathbf{V}) = \mathbf{T}(\mathbf{V}, \bullet) = \mathbf{V} \overline{\otimes} \mathbf{T} = V^i T_i^j \mathbf{e}_j = V^i T_{ij} \mathbf{e}^j = \dots$$

Dans ce cours on utilisera préférentiellement les notations $\mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{V}$ et $\mathbf{V} \overline{\otimes} \mathbf{T}$. ■

On laisse le soin au lecteur de démontrer l'identité suivante (elle sera utilisée en mécanique des milieux continus):

Soient \mathbf{U} et \mathbf{V} deux vecteurs et soit \mathbf{T} un tenseur du second ordre,

$$\mathbf{T}(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{V}) = \mathbf{T}(\mathbf{U}) \overline{\otimes} \mathbf{T}(\mathbf{V}) = \left(\mathbf{T}^T \overline{\otimes} \mathbf{T} \right) (\mathbf{U}, \mathbf{V}) \quad \forall \{ \mathbf{U}, \mathbf{V} \} \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$$

Le lecteur montrera facilement les résultats suivants:

- L'endomorphisme associé au tenseur métrique est l'opération *Identité*:

$$\mathbf{G} \overline{\otimes} \mathbf{V} = \mathbf{V} \overline{\otimes} \mathbf{G} = \mathbf{V}$$

- La composition de deux endomorphismes est un endomorphisme: Si \mathbf{T} et \mathbf{U} sont deux endomorphismes, on a:

$$\mathbf{T} \circ \mathbf{U} = \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{U}$$

En particulier, si \mathbf{T} est un tenseur du second ordre, on a :

$$\mathbf{G} \overline{\otimes} \mathbf{T} = \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{G} = \mathbf{T}$$

Cette relation se généralise aux tenseurs \mathbf{T} de tout ordre.

1.9.5 Tenseurs sphériques

On dit qu'un tenseur du second ordre est sphérique si

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X} \overline{\otimes} \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{Y} = \alpha \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} \quad \forall \{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\} \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}; \alpha \in \mathbb{R}$$

L'endomorphisme associé est

$$\mathbf{T} : \mathbf{X} \in \mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{T}(\mathbf{X}) = \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{X} = \alpha \mathbf{X} \in \mathcal{E}$$

Le tenseur métrique est un tenseur sphérique particulier (avec $\alpha = 1$). Tous les tenseurs sphériques sont des produits de \mathbf{G} par un scalaire.

1.9.6 Invariants des tenseurs du second ordre

On appelle *invariant* une quantité scalaire calculée à partir des composantes du tenseur et qui reste invariante par changement de base. Les invariants sont très utilisés en mécanique des milieux continus.

Trace d'un tenseur du second ordre

La trace d'un tenseur du second ordre \mathbf{T} est le *scalaire* défini par

$$\boxed{\text{Tr}(\mathbf{T}) = \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{G}}$$

où

$$\text{Tr}(\mathbf{T}) = g^{ij} T_{ij} = g_{ij} T^{ij} = T_i^i = T^i_i$$

La trace d'un tenseur du second ordre est égale à la trace des matrices de ses composantes *mixtes*:

$$\text{Tr}(\mathbf{T}) = \text{Tr}[T^{\bullet\bullet}] = \text{Tr}[T_{\bullet\bullet}] \neq \text{Tr}[T_{\bullet\bullet}] \neq \text{Tr}[T^{\bullet\bullet}]$$

L'invariance de la trace est évidente, puisque sa définition résulte d'une opération tensorielle.

En particulier, dans \mathcal{E}_n , la trace du tenseur métrique \mathbf{G} est n .

Déterminant d'un tenseur du second ordre

Le déterminant d'un tenseur du second ordre \mathbf{T} est le *scalaire* défini par

$$\boxed{\det(\mathbf{T}) = \det[T^{\bullet\bullet}]}$$

On laisse le soin au lecteur, en effectuant un changement de base, de montrer que le déterminant d'un tenseur du second ordre est bien un invariant¹² et que

$$\det(\mathbf{T}) = \det[T^{\bullet\bullet}] = \det[T_{\bullet\bullet}] \neq \det[T_{\bullet\bullet}] \neq \det[T^{\bullet\bullet}]$$

En particulier, le déterminant du tenseur métrique est 1.

¹² Ici, la démonstration de l'invariance est indispensable, car la définition du déterminant d'un tenseur a été donnée à partir de ses composantes.

Autres invariants

On note quelquefois $\Theta_1 = \text{Tr}(\mathbf{T})$ et on l'appelle *1^{er} invariant*. De même, $\Theta_n = \det(\mathbf{T})$ et on l'appelle *n^{ème} invariant*.

On peut aussi définir les invariants intermédiaires. On se limite ici au seul utile en mécanique des milieux continus, lorsque $\mathcal{E} = \mathcal{E}_3$:

$$\Theta_2 = (T^1_1 T^2_2 - T^2_1 T^1_2) + (T^2_2 T^3_3 - T^3_2 T^2_3) + (T^1_1 T^3_3 - T^1_3 T^3_1)$$

(somme des déterminants diagonaux d'ordre 2 de la matrice $[T^{\bullet}_{\bullet}]$)

Le lecteur pourra montrer que Θ_2 est bien un invariant, et qu'il peut être aussi calculé avec la matrice $[T^{\bullet}_{\bullet}]$

Dans le cas particulier des tenseurs du second ordre dans \mathcal{E}_3 , on peut donner une définition tensorielle des trois invariants¹³:

Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ trois vecteurs indépendants, et soit \mathbf{T} un tenseur du second ordre. On a

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \frac{\mathbf{E}(\mathbf{T} \otimes \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathbf{E}(\mathbf{u}, \mathbf{T} \otimes \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathbf{E}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{T} \otimes \mathbf{w})}{E(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})} \\ \Theta_2 &= \frac{\mathbf{E}(\mathbf{T} \otimes \mathbf{u}, \mathbf{T} \otimes \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathbf{E}(\mathbf{u}, \mathbf{T} \otimes \mathbf{v}, \mathbf{T} \otimes \mathbf{w}) + \mathbf{E}(\mathbf{T} \otimes \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{T} \otimes \mathbf{w})}{E(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})} \\ \Theta_3 &= \frac{\mathbf{E}(\mathbf{T} \otimes \mathbf{u}, \mathbf{T} \otimes \mathbf{v}, \mathbf{T} \otimes \mathbf{w})}{E(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})} \end{aligned}$$

On laisse le soin au lecteur de montrer que ces trois définitions sont bien équivalentes aux définitions précédentes.

1.9.7 Décompositions d'un tenseur du second ordre

Décomposition en parties symétrique et antisymétrique

Soit \mathbf{T} un tenseur du second ordre et soit \mathbf{T}^t son transposé. On peut toujours écrire:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^t) + \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^t)$$

Posons

$$\text{Sym}(\mathbf{T}) = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^t) \quad \text{et} \quad \text{Antisym}(\mathbf{T}) = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^t)$$

On les appelle respectivement *partie symétrique* de \mathbf{T} et *partie antisymétrique* de \mathbf{T} .

Tout tenseur \mathbf{T} peut donc être écrit sous la forme d'une somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique. On montre facilement que cette décomposition est unique.

Décomposition en parties sphérique et déviateur

Soit \mathbf{T} un tenseur du second ordre. On appelle *partie sphérique* de \mathbf{T} le tenseur

$$\text{Sph}(\mathbf{T}) = \frac{1}{n} \text{Tr}(\mathbf{T}) \mathbf{G}$$

¹³. qui dispense donc de la démonstration d'invariance

On appelle *déviateur* de \mathbf{T} le tenseur

$$\text{Dev}(\mathbf{T}) = \mathbf{T} - \text{Sph}(\mathbf{T})$$

Il est facile de voir que le déviateur est de trace nulle.

1.9.8 Valeurs propres et vecteurs propres

Les tenseurs du second ordre étant vus comme des endomorphismes, ils en ont toutes les propriétés, qu'on rappelle brièvement ici:

\mathbf{V} est un vecteur propre de \mathbf{T} et λ la valeur propre associée à \mathbf{V} s'il existe un vecteur \mathbf{V} et un nombre λ tels que

$$\mathbf{T} \otimes \mathbf{V} = \mathbf{T}(\mathbf{V}) = \lambda \mathbf{V}$$

Si \mathbf{V} est un vecteur propre, le vecteur $k\mathbf{V} \quad \forall k \in \mathbb{R}$ est aussi vecteur propre. On devrait donc parler plutôt de direction propre. Sur cette direction propre, on peut choisir 2 vecteurs propres unitaires.

Les valeurs propres sont les solutions de l'équation tensorielle

$$\det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{G}) = 0$$

ce qui s'écrit sous forme matricielle:

$$\begin{aligned} \det [[T^{\bullet, \bullet}] - \lambda [I]] &= 0 \\ \text{ou} \\ \det [[T_{\bullet, \bullet}] - \lambda [I]] &= 0 \\ \text{ou} \\ \det [[T_{\bullet, \bullet}] - \lambda [G_{\bullet, \bullet}]] &= 0 \\ \text{ou} \\ \det [[T^{\bullet\bullet}] - \lambda [G^{\bullet\bullet}]] &= 0 \end{aligned}$$

Ces expressions montrent que les valeurs propres du tenseur \mathbf{T} sont les valeurs propres des matrices $[T^{\bullet, \bullet}]$ ou $[T_{\bullet, \bullet}]$ mais pas celles des matrices $[T^{\bullet\bullet}]$ ou $[T_{\bullet\bullet}]$.

On obtient les composantes *contravariantes* des vecteurs propres de \mathbf{T} en cherchant les colonnes propres de la matrice $[T^{\bullet, \bullet}]$.

On obtient les composantes *covariantes* des vecteurs propres de \mathbf{T} en cherchant les colonnes propres de la matrice $[T_{\bullet, \bullet}]$.

Les colonnes propres des matrices $[T_{\bullet, \bullet}]$ et $[T^{\bullet\bullet}]$ n'ont pas de signification particulière !

Toutes ces propriétés qui suivent se déduisent directement des résultats de l'algèbre matricielle:

- Les tenseurs *symétriques* réels dans \mathcal{E}_n ont toujours n valeurs propres réelles (distinctes ou non). A chaque valeur propre est associé un *espace propre* dont la dimension est égale à la multiplicité de la valeur propre.
- Les espaces propres d'un tenseur symétrique sont orthogonaux entre eux.
- Dans une base construite sur les espaces propres¹⁴, les matrices des composantes mixtes sur une base propre sont diagonales et les valeurs de la diagonale sont les valeurs propres.

14. Pour les tenseurs symétriques on peut toujours construire une base orthonormée.

Nouvelle expression des invariants

Dans \mathcal{E}_3 , si on note T_1 , T_2 et T_3 les 3 valeurs propres¹⁵ du tenseur du second ordre symétrique \mathbf{T} , la matrice des composantes de \mathbf{T} dans toute base propre orthonormée est¹⁶:

$$\begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix}$$

Les expressions des 3 invariants de \mathbf{T} en fonction des valeurs propres sont donc:

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= T_1 + T_2 + T_3 \\ \Theta_2 &= T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_3 T_1 \\ \Theta_3 &= T_1 T_2 T_3 \end{aligned}$$

15. pas nécessairement distinctes

16. l'ordre des valeurs propres peut être différent: en effet, il n'y a aucune raison pour classer les vecteurs propres. En général, on ordonne les vecteurs propres pour que le base propre soit directe.

Chapitre 2

Analyse tensorielle dans \mathcal{E}_3

L'objet de ce chapitre est l'étude des *champs de tenseurs* dans \mathcal{E}_3 , c'est à dire qu'à chaque point M de \mathcal{E}_3 (ou d'un domaine de \mathcal{E}_3) on associe un tenseur. Beaucoup des notions qui suivent sont généralisables à \mathcal{E}_n , mais puisque ce cours est destiné aux mécaniciens, on se limite à \mathcal{E}_3 .

Si le champ de tenseurs est d'ordre 0, on dit qu'on a *un champ scalaire*. Si le champ de tenseurs est d'ordre 1, on dit qu'on a *un champ vectoriel*. Si le champ de tenseurs est d'ordre > 1 , on dit qu'on a *un champ tensoriel*.

2.1 Système de coordonnées et sa base naturelle

2.1.1 Les systèmes de coordonnées

Les points de \mathcal{E}_3 sont repérés par 3 nombres appelés *coordonnées*. Il existe une infinité de systèmes de coordonnées; les plus couramment utilisés sont:

- *Les coordonnées cartésiennes*. On choisit dans \mathcal{E}_3 un point O appelé *origine* et une base

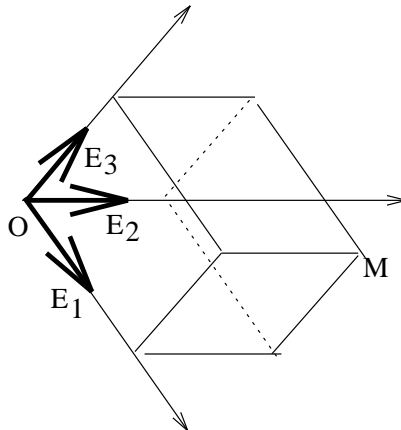


FIG. 2.1 – *Système de coordonnées cartésien*

quelconque de l'espace vectoriel associé $\{\mathbf{E}_i\}$. L'ensemble $\{O, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3\}$ est appelé *repère de \mathcal{E}_3* (non nécessairement orthonormé).

Le point courant M s'exprime en fonction des coordonnées par la relation

$$\mathbf{OM} = x^i \mathbf{E}_i$$

– Les coordonnées cylindriques (ou polaires). On choisit dans \mathcal{E}_3 un point O appelé *origine*,

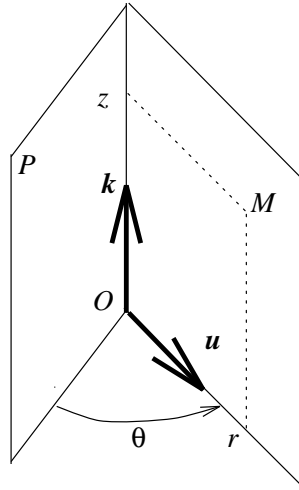


FIG. 2.2 – *Système de coordonnées cylindrique*

une direction donnée par un vecteur unitaire \mathbf{k} et un plan de référence angulaire P passant par O et contenant \mathbf{k} .

Soit M le point à repérer. On appelle *plan méridien* le plan passant par M , O et \mathbf{k} . Le plan méridien est repéré par son angle θ avec le plan de référence P , le point M est repéré dans le plan méridien par ses coordonnées cartésiennes sur le repère orthonormé $\{O, \mathbf{u}, \mathbf{k}\}$.

Le point M s'exprime en fonction des coordonnées par la relation

$$\mathbf{OM} = r\mathbf{u}(\theta) + z\mathbf{k}$$

Pour les sommations, on établit la correspondance $\{x^1, x^2, x^3\} = \{r, \theta, z\}$ dans cet ordre¹.

– Les coordonnées sphériques.

On choisit dans \mathcal{E}_3 un point O appelé *origine*, une direction donnée par un vecteur unitaire \mathbf{k} et un plan de référence angulaire P passant par O et contenant \mathbf{k} .

Soit M le point à repérer. On appelle *plan méridien* le plan passant par M , O et \mathbf{k} .

Le plan méridien est repéré par son angle θ avec le plan de référence P , le point M est repéré dans le plan méridien par ses coordonnées polaires $\{r, \varphi\}$ où

$$r = \|\mathbf{OM}\| \text{ et } \varphi = \text{angle}(\mathbf{k}, \mathbf{OM}) \in [0, \pi]$$

Si on appelle \mathbf{w} le vecteur unitaire $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{OM}}{\|\mathbf{OM}\|}$, le point M s'exprime en fonction des coordonnées par la relation

$$\mathbf{OM} = r\mathbf{w}(\theta, \varphi)$$

Pour les sommations, on établit la correspondance $\{x^1, x^2, x^3\} = \{r, \varphi, \theta\}$ dans cet ordre².

1. pour que la base naturelle associée à ce système de coordonnées soit directe (voir plus loin).
2. voir note 1.

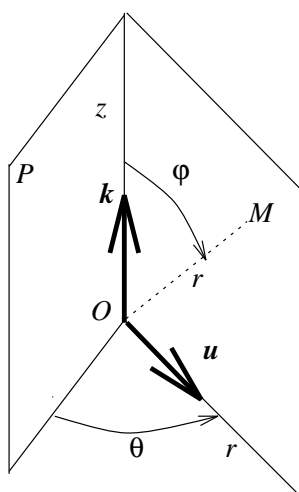


FIG. 2.3 – Système de coordonnées sphérique

- *Les coordonnées géographiques.* Elles ressemblent aux coordonnées sphériques, mais l'angle φ est mesuré à partir de \mathbf{u} au lieu de \mathbf{k} . φ varie de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Pour les sommations, on établit la correspondance $\{x^1, x^2, x^3\} = \{r, \theta, \varphi\}$ dans cet ordre³.

- *Autres systèmes de coordonnées*

On peut en inventer bien d'autres: Par exemple, on peut choisir une surface particulière de \mathcal{E}_3 , repérer la projection m de M sur la surface par deux coordonnées, la troisième coordonnée étant la distance mM . Un tel système de coordonnées est utilisé en théorie des coques.

Le choix d'un système de coordonnées est souvent suggéré par la forme du domaine de \mathcal{E}_3 dans lequel on travaille: par exemple, si on étudie le comportement mécanique d'un corps cylindrique, les limites de variation des coordonnées des points du corps sont plus simples à exprimer avec les coordonnées cylindriques qu'avec les coordonnées cartésiennes ou sphériques.

Dans ce chapitre, on se propose de faire de l'analyse dans un système de coordonnées quelconque: un point M de l'espace est repéré par trois réels $\{x^1, x^2, x^3\}$ sous la forme d'une fonction vectorielle

$$\mathbf{OM} = \mathbf{f}(x^1, x^2, x^3)$$

Aucune hypothèse n'est faite sur la signification géométrique de ces trois réels. La seule condition est que cette application soit bien une bijection entre \mathbb{R}^3 et \mathcal{E} au moins dans une certaine région de l'espace.

2.1.2 Base naturelle d'un système de coordonnées

Soit un point M de coordonnées $\{x^1, x^2, x^3\}$.

Il convient de bien noter que cette notation ne présume absolument pas du système de coordonnées choisi. Par exemple:

- En coordonnées cartésiennes, $\{x^1, x^2, x^3\}$ sont les composantes de \mathbf{OM} sur la base $\{\mathbf{E}_i\}$;
- En coordonnées cylindriques, $\{x^1, x^2, x^3\}$ correspondent à $\{r, \theta, z\}$;
- En coordonnées sphériques, $\{x^1, x^2, x^3\}$ correspondent à $\{r, \varphi, \theta\}$;

³. voir note 1.

- En coordonnées géographiques, $\{x^1, x^2, x^3\}$ correspondent à $\{r, \theta, \varphi\}$;
- etc.

Définition

On appelle *base naturelle en M* le système de vecteurs:

$$\boxed{e_i = \frac{\partial OM}{\partial x^i}}$$

L'ordre des vecteurs de la base naturelle est induit par l'ordre dans lequel on a classé les trois coordonnées $\{x^i\}$.

En général, il faut choisir l'ordre des coordonnées tel que la base naturelle soit directe.

Exemples:

Le lecteur est invité à montrer les résultats suivants:

- En coordonnées cartésiennes on a $e_i = \mathbf{E}_i$
La base naturelle est donc invariante en fonction du point M .
- En coordonnées cylindriques on a $e_r = \mathbf{u}$; $e_\theta = r\mathbf{v}$; $e_z = \mathbf{k}$
où $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{u}$
- En coordonnées sphériques on a $e_r = \mathbf{w}$; $e_\varphi = r\mathbf{t}$; $e_\theta = r \sin \varphi \mathbf{v}$
où \mathbf{v} est un vecteur unitaire tel que $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{u}$
et \mathbf{t} est un vecteur unitaire tel que $\mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \varphi} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$
- En coordonnées géographiques on a $e_r = \mathbf{w}$; $e_\theta = r \cos \varphi \mathbf{v}$; $e_\varphi = r\mathbf{s}$
où \mathbf{v} est un vecteur unitaire tel que $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{u}$
et \mathbf{s} est un vecteur unitaire tel que $\mathbf{s} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \varphi} = \mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$

Certains systèmes de coordonnées peuvent poser des problèmes pour la définition de la base naturelle en certains points. Par exemple, le lecteur est invité à étudier le cas des coordonnées sphériques pour les points M tels que $\varphi = 0$ ou π et constater que ce système de coordonnées n'est pas biunivoque en ce point.

La base naturelle n'est, en général, ni orthogonale, ni normée.

2.1.3 Base naturelle normée (base physique)

Comme on le verra dans la suite, le principal avantage de la base naturelle est que les formules d'analyse sont les mêmes dans tout système de coordonnées. Mais elle a le défaut de ne pas être normée. Par exemple, si \mathbf{V} est un vecteur vitesse $\mathbf{V} = V^i e_i$ où $\{e_i\}$ est la base naturelle associée au coordonnées cylindriques, V^r a la dimension d'une vitesse, V^θ a la dimension d'une fréquence et V^z a la dimension d'une vitesse.

Pour éviter cet inconvénient, on définit la *base naturelle normée* dite encore *base physique*:

$$\left\{ \tilde{e}_i = \frac{e_i}{\|e_i\|} \right\}$$

qui est la base normée construite sur la base naturelle⁴.

4. Si la base naturelle est orthogonale, alors la base physique est orthonormée.

Même si on effectue des calculs sur une base naturelle, il convient de présenter les résultats sur une base normée, pour que les dimensions des composantes soient en cohérence avec la grandeur physique qu'elles représentent.

2.1.4 Variations de la base naturelle

Une fois fait le choix d'un système de coordonnées, il induit en chaque point M une base naturelle qui varie en général avec M . On étudie ici comment varie la base naturelle lorsque M varie. *A priori*, on peut écrire les dérivées des vecteurs de base sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k$$

Les nombres Γ_{ij}^k sont les composantes contravariantes de $\partial_j \mathbf{e}_i$ sur \mathbf{e}_k . Ils sont appelés *coefficients de Christoffel*.

Pour les calculer, la méthode la plus simple est souvent de calculer directement la dérivée des vecteurs de la base naturelle et d'exprimer cette dérivée sur la base naturelle. Cependant, nous allons montrer que les coefficients de Christoffel peuvent s'exprimer en fonction du tenseur métrique.

Remarque initiale: Le vecteur \mathbf{OM} et ses dérivées étant continus, on a

$$\partial_j \mathbf{e}_i = \partial_{ji} \mathbf{OM} = \partial_{ij} \mathbf{OM} = \partial_i \mathbf{e}_j$$

on en déduit que

$$\boxed{\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k}$$

Les Γ_{ij}^k sont symétriques par rapport aux indices inférieurs.

La dérivée d'un vecteur de base peut donc s'écrire :

$$\partial_j \mathbf{e}_i = \frac{1}{2} (\partial_j \mathbf{e}_i + \partial_i \mathbf{e}_j)$$

Calculons maintenant les Γ_{ij}^k

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} (\partial_i \mathbf{e}_j + \partial_j \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}^k \\ &= \frac{1}{2} g^{k\mu} (\partial_i \mathbf{e}_j + \partial_j \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_\mu \\ &= \frac{1}{2} g^{k\mu} (\partial_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_\mu) + \partial_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_\mu) - \partial_i \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_j - \partial_j \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_i) \\ &= \frac{1}{2} g^{k\mu} (\partial_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_\mu) + \partial_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_\mu) - \partial_\mu \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j - \partial_\mu \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i) \\ &= \frac{1}{2} g^{k\mu} (\partial_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_\mu) + \partial_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_\mu) - \partial_\mu (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)) \end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\mu} (\partial_i g_{j\mu} + \partial_j g_{i\mu} - \partial_\mu g_{ij})}$$

On peut aussi s'intéresser aux variations de la base duale de la base naturelle:

$$\partial_i \mathbf{e}^j = \Gamma_{ik}^j \mathbf{e}^k$$

En remarquant que $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$, et donc que $\partial_k (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j) = 0$, on en déduit que

$$\mathbf{e}_i \cdot \partial_k \mathbf{e}^j + \mathbf{e}^j \cdot \partial_k \mathbf{e}_i = 0$$

et donc que

$$\Gamma_{ik}^j = -\Gamma_{ik}^j$$

On a donc:

$$\boxed{\partial_i \mathbf{e}^j = -\Gamma_{ik}^j \mathbf{e}^k}$$

Il faut bien noter que les Γ_{ij}^k ne sont pas les composantes d'un tenseur. Le lecteur est invité à vérifier que les formules de changement de base des Γ_{ij}^k ne sont pas celles d'un tenseur.

2.2 Rappel: Différentiabilité d'un champ

Définition

Soit $\mathcal{A}(M)$ un champ de tenseurs sur \mathcal{E}_3 . On dit que le champ tensoriel \mathcal{A} est différentiable en M s'il existe un opérateur linéaire noté $\text{grad}\mathcal{A}$ tel que

$$\mathcal{A}(M') - \mathcal{A}(M) = \text{grad}\mathcal{A}(\mathbf{M}\mathbf{M}') + \|\mathbf{M}\mathbf{M}'\|\mathcal{O}(\mathbf{M}\mathbf{M}')$$

où $\mathcal{O}(\mathbf{M}\mathbf{M}')$ est une fonction quelconque qui tend vers 0 quand M' tend vers M .

En d'autres termes, la différentiabilité de \mathcal{A} en M exprime que localement autour de M , la variation exacte de \mathcal{A} peut être approximée par un opérateur linéaire (qu'on appelle aussi *opérateur linéaire tangent*), avec une erreur d'autant plus petite que M' est proche de M .

Lorsque le champ \mathcal{A} est différentiable, on écrit:

$$d\mathcal{A} = \text{grad}\mathcal{A}(d\mathbf{M})$$

L'opérateur linéaire tangent $\text{grad}\mathcal{A}$ est appelé *gradient de \mathcal{A}* .

Expression de $d\mathbf{M}$

L'expression du vecteur \mathbf{OM} en fonction des coordonnées $\{x^1, x^2, x^3\}$ de M dépend du système de coordonnées utilisé:

$$\mathbf{OM} = \mathbf{OM}(x^1, x^2, x^3)$$

Cependant, l'expression du vecteur $d\mathbf{M}$ sur la base naturelle est toujours la même. En effet

$$d\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial x^i} dx^i = dx^i \mathbf{e}_i$$

On perçoit ici l'intérêt de l'utilisation de la base naturelle.

Le carré de l'élément de longueur est

$$ds^2 = d\mathbf{M}^2 = d\mathbf{M} \cdot d\mathbf{M} = \mathbf{G}(d\mathbf{M}, d\mathbf{M}) = g_{ij} dx^i dx^j$$

La métrique de \mathcal{E} se définit avec \mathbf{G} , ce qui justifie sa dénomination de *tenseur métrique*.

Elément de volume pour les intégrales de volume

Considérons les trois variations élémentaires de chacune des coordonnées :

$$d\mathbf{M}_1 = dx^1 \mathbf{e}_1 ; d\mathbf{M}_2 = dx^2 \mathbf{e}_2 ; d\mathbf{M}_3 = dx^3 \mathbf{e}_3$$

L'élément de volume est défini par:

$$dv = \mathbf{E}(d\mathbf{M}_1, d\mathbf{M}_2, d\mathbf{M}_3) = e_{123} dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3$$

Elément de surface pour les intégrales de surface

Une surface \mathcal{S} est une variété de dimension 2 plongée dans \mathcal{E}_3 . Soit N le point courant de \mathcal{S} . La surface est définie par l'application vectorielle:

$$\mathbf{f} : (u^1, u^2) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{ON} = \mathbf{f}(u^1, u^2) \in \mathcal{E}$$

On dit que la surface \mathcal{S} est paramétrée par les deux réels u^1 et u^2 . Les équations paramétriques d'une surface de \mathcal{E} sont donc:

$$x^1 = f^1(u^1, u^2) ; x^2 = f^2(u^1, u^2) ; x^3 = f^3(u^1, u^2)$$

Les vecteurs $\mathbf{a}_1 = \frac{\partial \mathbf{ON}}{\partial u^1}$ et $\mathbf{a}_2 = \frac{\partial \mathbf{ON}}{\partial u^2}$ sont tangents à \mathcal{S} et constituent une base naturelle de \mathcal{S} .

Considérons les deux variations élémentaires

$$d\mathbf{N}_1 = \mathbf{a}_1 du^1 \text{ et } d\mathbf{N}_2 = \mathbf{a}_2 du^2$$

Elles sont tangentes à \mathcal{S}

L'élément de surface de \mathcal{S} est défini par⁵:

$$ds = \|d\mathbf{N}_1 \wedge d\mathbf{N}_2\| = \|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\| du^1 du^2$$

Remarque:

La définition précédente est tout à fait générale. Cependant, il est parfois commode de paramétrer le point N avec deux de ses coordonnées. Par exemple $u^1 = x^1$ et $u^2 = x^2$.

Elément de longueur pour les intégrales curvilignes

Une courbe \mathcal{C} est une variété de dimension 1 plongée dans \mathcal{E}_3 . Soit N le point courant de \mathcal{C} . La courbe est définie par l'application vectorielle:

$$\mathbf{f} : u \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{ON} = \mathbf{f}(u) \in \mathcal{E}$$

On dit que la courbe \mathcal{C} est paramétrée par le réel u . Les équations paramétriques d'une courbe sont donc:

$$x^1 = f^1(u) ; x^2 = f^2(u) ; x^3 = f^3(u)$$

Le vecteur $\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{ON}}{\partial u}$ est tangent à \mathcal{C} et constitue une base naturelle de \mathcal{C} .

Considérons la variation élémentaire

$$d\mathbf{N} = \mathbf{a} du$$

5. En théorie des surfaces, on montre l'existence d'un tenseur métrique de surface \mathbf{A} et d'un tenseur d'orientation de surface \mathbf{E} du second ordre. En posant $a = \det[\mathbf{A}_{\bullet\bullet}]$, on trouve $ds = \sqrt{a} du^1 du^2$.

Elle est tangente à \mathcal{C} .

L'élément de longueur de \mathcal{C} est défini par:

$$dl = \|d\mathbf{N}\| = \|\mathbf{a}\|du$$

Si u est l'abscisse curviligne sur la courbe, \mathbf{a} est unitaire, c'est le premier vecteur (unitaire) du trièdre de Fresnet.

2.3 Etude des champs scalaires

Les champs scalaires sont des champs de tenseurs d'ordre 0. Soit f un champ scalaire:

$$f : M \in \mathcal{E}_3 \longrightarrow f(M) \in \mathbb{R}$$

Si f est différentiable, on a

$$df = \mathbf{grad}f(d\mathbf{M})$$

L'opérateur $\mathbf{grad}f$ est un opérateur linéaire de \mathcal{E}_3 dans \mathbb{R}

$$\mathbf{grad}f : d\mathbf{M} \in \mathcal{E}_3 \longrightarrow df \in \mathbb{R}$$

C'est donc un champ de tenseurs du premier ordre (un vecteur). On écrit donc:

$$df = \mathbf{grad}f \otimes d\mathbf{M}$$

La fonction scalaire $f(M)$ étant une fonction des coordonnées de M , on a

$$f = f(x^1, x^2, x^3)$$

La différentielle de f est :

$$df = \partial_i f dx^i$$

Or, d'après la définition du tenseur $\mathbf{grad}f$, on a

$$df = (\mathbf{grad}f)_i dx^i$$

Ces égalités étant vraies quelque soient les dx^i , on en déduit par identification les composantes covariantes de $\mathbf{grad}f$ sur la base naturelle:

$$\boxed{(\mathbf{grad}f)_i = \partial_i f}$$

soit encore⁶:

$$\boxed{\mathbf{grad}f = \partial_i f e^i}$$

Le lecteur montrera facilement les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}(f_1 + f_2) &= \mathbf{grad}f_1 + \mathbf{grad}f_2 \\ \mathbf{grad}(\lambda f) &= \lambda \mathbf{grad}f \\ \mathbf{grad}(f_1 f_2) &= (\mathbf{grad}f_1) f_2 + f_1 \mathbf{grad}f_2 \end{aligned}$$

6. On trouvera aussi dans la littérature les notations $\frac{df}{d\mathbf{M}}$ ou ∇f pour $\mathbf{grad}f$.

On peut alors écrire: $df = \frac{df}{d\mathbf{M}} \otimes d\mathbf{M} = \nabla f \otimes d\mathbf{M}$

2.4 Etude des champs vectoriels

2.4.1 Gradient d'un champ vectoriel

Définition

Les champs vectoriels sont des champs de tenseurs d'ordre 1. Soit \mathbf{V} un champ vectoriel:

$$\mathbf{V} : M \in \mathcal{E}_3 \longrightarrow \mathbf{V}(M) \in \mathcal{E}_3$$

Si \mathbf{V} est différentiable, on a

$$d\mathbf{V} = \text{grad}\mathbf{V}(dM)$$

L'opérateur $\text{grad}\mathbf{V}$ est un opérateur linéaire de \mathcal{E}_3 dans \mathcal{E}_3

$$\text{grad}\mathbf{V} : dM \in \mathcal{E}_3 \longrightarrow d\mathbf{V} \in \mathcal{E}_3$$

C'est donc un tenseur du second ordre (vu ici comme un endomorphisme). On écrit donc:

$$\boxed{d\mathbf{V} = \text{grad}\mathbf{V} \otimes dM}$$

Calcul des composantes

Si on se donne \mathbf{V} par ses composantes contravariantes sur la base naturelle, $\mathbf{V} = V^i e_i$, Sa différentielle est :

$$\begin{aligned} d\mathbf{V} &= \partial_i \mathbf{V} dx^i \\ &= \partial_i (V^j e_j) dx^i \\ &= [(\partial_i V^j) e_j + V^j \partial_i e_j] dx^i \\ &= [(\partial_i V^j) e_j + V^j \Gamma_{ij}^k e_k] dx^i \\ &= [(\partial_i V^j) e_j + V^k \Gamma_{ik}^j e_j] dx^i \\ &= [\partial_i V^j + V^k \Gamma_{ik}^j] dx^i e_j \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} (d\mathbf{V})^j &= [\partial_i V^j + V^k \Gamma_{ik}^j] dx^i \\ (d\mathbf{V})^j &= [\partial_i V^j + V^k \Gamma_{ik}^j] (dM)^i \end{aligned}$$

On en déduit par identification que les composantes de $\text{grad}\mathbf{V}$ sont⁷ :

$$\boxed{(\text{grad}\mathbf{V})^j{}_i = \partial_i V^j + V^k \Gamma_{ik}^j}$$

c'est à dire

$$\boxed{\text{grad}\mathbf{V} = [\partial_i V^j + V^k \Gamma_{ik}^j] e_j \otimes e^i}$$

On trouvera aussi dans la littérature d'autres notations pour $\text{grad}\mathbf{V}$:

$$- \frac{d\mathbf{V}}{dM} \text{ On peut alors écrire: } d\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{V}}{dM} \otimes dM.$$

⁷. Attention à l'ordre des indices: le dernier indice de $\text{grad}\mathbf{V}$ est l'indice de dérivation. On voit ici un avantage de la notation des dérivées partielles avec une virgule: $\partial_i V^j$ s'écrit $V^j{}_{,i}$ qui donne l'ordre des indices de $\text{grad}\mathbf{V}$.

- $V^j{}_{;i} = (\mathbf{grad}\mathbf{V})^j{}_i = \partial_i V^j + V^k \Gamma_{ik}^j$. Ce terme est alors appelé *dérivée covariante*⁸ de V^j par rapport à x^i .
- $\nabla\mathbf{V}$. Cette notation pose problème : certains auteurs écrivent $d\mathbf{V} = \nabla\mathbf{V} \otimes d\mathbf{M}$, $\nabla\mathbf{V}$ est alors une autre notation de $\mathbf{grad}\mathbf{V}$.
D'autres écrivent les composantes de $\nabla\mathbf{V}$ sous la forme $\nabla_i V^j = \partial_i V^j + V^k \Gamma_{ik}^j$. Dans ce cas, si on respecte l'ordre des indices, le tenseur $\nabla\mathbf{V}$ est le *transposé* de $\mathbf{grad}\mathbf{V}$. On a alors $d\mathbf{V} = d\mathbf{M} \otimes \nabla\mathbf{V}$.
- La matrice des composantes de $\mathbf{grad}\mathbf{V}$ dans la base naturelle d'un *système de coordonnées cartésiennes orthonormés*⁹ est aussi appelée *Jacobien* du champ vectoriel \mathbf{V} .

On laisse le soin au lecteur de démontrer (en se donnant \mathbf{V} par ses composantes covariantes) que les composantes deux fois covariantes de $\mathbf{grad}\mathbf{V}$ sont :

$$(\mathbf{grad}\mathbf{V})_{ij} = \partial_j V_i - V_k \Gamma_{ji}^k.$$

Il est important de noter que le tenseur $\mathbf{grad}\mathbf{V}$ n'est pas symétrique en général.

Le lecteur pourra montrer le résultat suivant :

Soit O l'origine de \mathcal{E}_3 et soit M le point courant. Le champ OM est un champ vectoriel. On a¹⁰ :

$$\boxed{\mathbf{grad}OM = \mathbf{G}}$$

Le lecteur est invité à trouver les expressions de $\mathbf{grad}\mathbf{V}$ dans les systèmes de coordonnées habituels¹¹.

2.4.2 Divergence d'un champ vectoriel

La divergence d'un champ vectoriel est le champ *scalaire* défini par

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{V} = \operatorname{Tr}(\mathbf{grad}\mathbf{V}) = \mathbf{grad}\mathbf{V} \otimes \mathbf{1}}$$

soit encore en fonction des composantes sur la base naturelle :

$$\boxed{\operatorname{div}\mathbf{V} = \partial_i V^i + V^k \Gamma_{ki}^i}$$

Le lecteur est invité à trouver les expressions de $\operatorname{div}\mathbf{V}$ dans les systèmes de coordonnées habituels.

2.4.3 Rotationnel d'un champ vectoriel

Le rotationnel d'un champ vectoriel est le champ *vectorel* défini par

$$\boxed{\operatorname{rot}\mathbf{V} = -\mathbf{grad}\mathbf{V} \otimes \mathbf{E}}$$

8. Quelquefois, on emploie " , " à la place de " ; ". Il faut alors noter les dérivées partielles autrement.

9. la variance des composantes est donc indifférente.

10. Avec la notation sous forme de fraction, on écrit $\frac{d\mathbf{M}}{d\mathbf{M}} = \mathbf{G}$

11. ATTENTION : on peut établir différentes formules : \mathbf{V} peut être donné par ses composantes dans la base naturelle ou par ses composantes dans la base physique. De même, $\mathbf{grad}\mathbf{V}$ peut être exprimé par ses composantes dans la base naturelle ou dans la base physique. Pour retrouver les formules qu'on trouve habituellement dans les formulaires, il faut se donner le vecteur par ses composantes dans la base physique et donner les composantes du gradient dans la base physique.

soit encore en fonction des composantes sur la base naturelle:

$$\mathbf{rot}\mathbf{V} = (\mathbf{grad}\mathbf{V})_{ij} e^{jik} e_k$$

En remplaçant les composantes par leur valeur et en simplifiant¹², on obtient:

$$\mathbf{rot}\mathbf{V} = (\partial_j V_i e^{jik}) e_k$$

Le lecteur est invité à trouver les composantes de $\mathbf{rot}\mathbf{V}$ dans les bases naturelle et physique des systèmes de coordonnées usuels.

2.4.4 Propriétés des champs vectoriels

Le lecteur pourra facilement retrouver les identités suivantes:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{rot}\mathbf{V}) &= 0 \\ \mathbf{rot}(\mathbf{grad}f) &= 0 \\ \operatorname{div}(f\mathbf{V}) &= f\operatorname{div}\mathbf{V} + \mathbf{grad}f \cdot \mathbf{V} \\ \mathbf{rot}(f\mathbf{V}) &= f\mathbf{rot}\mathbf{V} + \mathbf{grad}f \wedge \mathbf{V} \\ \operatorname{div}(\mathbf{V} \wedge \mathbf{W}) &= \mathbf{W} \cdot \mathbf{rot}\mathbf{V} - \mathbf{V} \cdot \mathbf{rot}\mathbf{W} \end{aligned}$$

On rappelle ici sans démonstration¹³ deux théorèmes importants:

– **Théorème de Stokes**

Soit \mathbf{V} un champ de vecteurs de \mathcal{E}_3 , et soit \mathcal{S} une surface de normale unitaire \mathbf{n} . Soit $\partial\mathcal{S}$ le contour fermé de \mathcal{S} et soit \mathbf{t} la tangente unitaire à $\partial\mathcal{S}$, orientée positivement autour de \mathbf{n} . Si $\mathbf{rot}\mathbf{V}$ existe en tout point de \mathcal{S} on a

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{rot}\mathbf{V} \, ds = \int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} \, dl$$

Le flux du rotationnel d'un champ de vecteurs \mathbf{V} à travers une surface \mathcal{S} est égal à la circulation de \mathbf{V} le long de la frontière $\partial\mathcal{S}$ de \mathcal{S} .

– **Théorème de la divergence**

Soit \mathbf{V} un champ de vecteurs de \mathcal{E}_3 , et soit \mathcal{D} un volume fermé de frontière $\partial\mathcal{D}$. On note \mathbf{n} la normale unitaire extérieure à $\partial\mathcal{D}$. Si $\operatorname{div}\mathbf{V}$ existe en tout point de \mathcal{D} , on a

$$\int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}\mathbf{V} \, dv = \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

L'intégrale de la divergence d'un champ de vecteurs \mathbf{V} dans un domaine \mathcal{D} est égale au flux de \mathbf{V} à travers la frontière $\partial\mathcal{D}$ de \mathcal{D} .

2.4.5 Laplacien d'un champ scalaire

Soit $f(M)$ un champ scalaire. Le laplacien d'un champ scalaire est le champ *scalaire* défini par

$$\Delta f = \operatorname{div} \mathbf{grad} f$$

Le lecteur est invité à trouver les expressions de Δf dans les systèmes de coordonnées usuels.

12. les produits $\Gamma_{ij}^m e^{ijk}$ sont nuls, car Γ_{ij}^m est symétrique en ij et e^{ijk} est antisymétrique en ij . Les composantes du rotationnel est donc indépendantes de $\Gamma_{ij}^m e^{ijk}$. Leur expression dans la base naturelle est donc la même dans tous les systèmes de coordonnées.

13. Ce sont des résultats classiques de l'analyse vectorielle.

2.5 Etude des champs tensoriels du second ordre

2.5.1 Gradient d'un champ tensoriel du second ordre

Soit \mathbf{T} un champ de tenseurs différentiable du second ordre. Le gradient de \mathbf{T} est l'opérateur linéaire défini par

$$\mathbf{gradT} : dM \longrightarrow d\mathbf{T} = \mathbf{gradT} \overline{\otimes} dM$$

\mathbf{gradT} est donc un tenseur du troisième ordre.

Comme précédemment, les composantes du gradient se déduisent par identification en calculant la différentielle de \mathbf{T} .

Si on exprime \mathbf{T} par ses composantes contravariantes sur la base naturelle:

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

la différentielle de \mathbf{T} est :

$$\begin{aligned} d\mathbf{T} &= dT^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + T^{ij} d\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes d\mathbf{e}_j \\ &= \partial_k T^{ij} dx^k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + T^{ij} (\partial_k \mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_j dx^k + T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes (\partial_k \mathbf{e}_j) dx^k \\ &= [\partial_k T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + T^{ij} (\Gamma_{ki}^m \mathbf{e}_m) \otimes \mathbf{e}_j + T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes (\Gamma_{kj}^m \mathbf{e}_m)] dx^k \\ &= [\partial_k T^{ij} + T^{mj} \Gamma_{km}^i + T^{im} \Gamma_{km}^j] dx^k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

On a donc

$$(d\mathbf{T})^{ij} = [\partial_k T^{ij} + T^{mj} \Gamma_{km}^i + T^{im} \Gamma_{km}^j] (dM)^k$$

Les composantes de \mathbf{gradT} sont donc¹⁴ :

$$\boxed{(\mathbf{gradT})_{\quad k}^{ij} = \partial_k T^{ij} + T^{mj} \Gamma_{km}^i + T^{im} \Gamma_{km}^j}$$

soit encore :

$$\boxed{\mathbf{gradT} = [\partial_k T^{ij} + T^{mj} \Gamma_{km}^i + T^{im} \Gamma_{km}^j] \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^k}$$

On laisse le soin au lecteur de calculer les composantes de \mathbf{gradT} de variance différente:

$$\begin{aligned} (\mathbf{gradT})_{ijk} &= \partial_k T_{ij} - T_{mj} \Gamma_{ki}^m - T_{im} \Gamma_{kj}^m \\ (\mathbf{gradT})_i{}^j{}_k &= \partial_k T_i{}^j - T_m{}^j \Gamma_{ki}^m + T_i{}^m \Gamma_{km}^j \\ (\mathbf{gradT})^i{}_{jk} &= \partial_k T^i{}_j + T^m{}_j \Gamma_{km}^i - T^i{}_m \Gamma_{kj}^m \\ (\mathbf{gradT})^{ij}{}_k &= \partial_k T^{ij} + T^m{}_j \Gamma_{km}^i + T^{im} \Gamma_{mk}^j \end{aligned}$$

et de démontrer la propriété importante suivante:

$$\boxed{\mathbf{gradG} = \mathbf{0}}$$

Comme pour les champs vectoriels, on trouve dans la littérature d'autres notations pour \mathbf{gradT} :

$$- \frac{d\mathbf{T}}{dM} \text{ On peut alors écrire: } d\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{T}}{dM} \overline{\otimes} dM.$$

¹⁴ Là encore, il convient de bien faire attention à l'ordre des indices: le dernier indice de \mathbf{gradT} est l'indice de dérivation, les deux premiers sont les indices de \mathbf{T} .

- $T^{ij}{}_{;k} = (\mathbf{gradV})^{ij}{}_k = \partial_k T^{ij} + T^{mj} \Gamma_{mk}^i + T^{im} \Gamma_{mk}^j$. Ce terme est alors appelé *dérivée covariante*¹⁵ de T^{ij} par rapport à x^k .
- $\nabla \mathbf{T}$. Cette notation pose problème: certains auteurs écrivent $d\mathbf{T} = \nabla \mathbf{T} \otimes d\mathbf{M}$, $\nabla \mathbf{T}$ est alors une autre notation de \mathbf{gradT} .
D'autres écrivent les composantes de $\nabla \mathbf{T}$ sous la forme $\nabla_k T^{ij} = \partial_k T^{ij} + T^{mj} \Gamma_{mk}^i + T^{im} \Gamma_{mk}^j$. Dans ce cas, si on respecte l'ordre des indices, le tenseur $\nabla \mathbf{T}$ est différent de \mathbf{gradT} ¹⁶. On a alors $d\mathbf{T} = d\mathbf{M} \otimes \nabla \mathbf{T}$.

2.5.2 Divergence d'un tenseur du second ordre

La divergence d'un tenseur du second ordre \mathbf{T} est le champ *vectoriel* défini par

$$\mathbf{divT} = \mathbf{gradT} \overline{\otimes} \mathbf{G}$$

Dans la base naturelle, on a par exemple:

$$(\mathbf{divT})^i = (\mathbf{gradT})^{ik}{}_k = \partial_k T^{ik} + T^{mk} \Gamma_{mk}^i + T^{im} \Gamma_{mk}^k$$

soit encore :

$$\mathbf{divT} = (\mathbf{gradT})^{ik}{}_k \mathbf{e}_i = [\partial_k T^{ik} + T^{mk} \Gamma_{mk}^i + T^{im} \Gamma_{mk}^k] \mathbf{e}_i$$

Le lecteur est invité à établir les composantes de \mathbf{divT} dans les bases naturelle et physique des systèmes de coordonnées usuels.

2.5.3 Rotationnel d'un tenseur du second ordre

Le rotationnel d'un tenseur du second ordre est le champ *tensoriel du second ordre* défini par

$$\mathbf{rotT} = -\mathbf{gradT} \overline{\otimes} \mathbf{E}$$

Dans la base naturelle, on a par exemple:

$$(\mathbf{rotT})^{ij} = (\mathbf{gradT})_{imn} e^{nmj}$$

soit encore:

$$\mathbf{rotT} = (\mathbf{gradT})_{imn} e^{nmj} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j$$

Le lecteur est invité à établir les composantes de \mathbf{rotT} dans les bases naturelle et physique des systèmes de coordonnées usuels.

2.5.4 Laplacien d'un champ de vecteurs

Le laplacien $\Delta \mathbf{V}$ d'un champ de vecteurs est le *champ vectoriel* défini par :

$$\Delta \mathbf{V} = \mathbf{div gradV}$$

le lecteur pourra vérifier qu'on a l'identité:

$$\Delta \mathbf{V} = \mathbf{grad divV} - \mathbf{rot rotV}$$

Le lecteur est invité à établir les composantes de $\Delta \mathbf{V}$ dans les bases naturelle et physique des systèmes de coordonnées usuels.

15. Quelquefois, on emploie " ; " à la place de " ; ; ". Il faut alors noter les dérivées partielles autrement.

16. Le dernier indice de \mathbf{gradT} est le premier indice de $\nabla \mathbf{T}$: $(\mathbf{gradT})^{ij}{}_k = \nabla_k T^{ij}$

2.5.5 Formule de la divergence pour les tenseurs du second ordre

Le lecteur pourra démontrer le résultat suivant:

Soit \mathbf{T} un champ de tenseurs du second ordre dans \mathcal{E}_3 , et soit \mathcal{D} un volume fermé de frontière $\partial\mathcal{D}$. On note \mathbf{n} la normale unitaire extérieure à $\partial\mathcal{D}$. Si $\mathbf{div}\mathbf{T}$ existe en tout point de \mathcal{D} , on a l'égalité suivante:

$$\boxed{\int_{\mathcal{D}} \mathbf{div}\mathbf{T} \, dv = \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{n} \, ds}$$

(Indication pour la démonstration: en projetant cette égalité vectorielle sur une base fixe, on peut utiliser le théorème de la divergence pour les vecteurs.)

La quantité $\int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{T} \overline{\otimes} \mathbf{n} \, ds$ peut être interprétée comme le "flux" du tenseur \mathbf{T} à travers la surface frontière $\partial\mathcal{D}$.

2.6 Etude des champs tensoriels du troisième ordre

2.6.1 Gradient d'un champ tensoriel du troisième ordre

Soit \mathbf{U} un champ tensoriel différentiable du troisième ordre. Son gradient est le tenseur du quatrième ordre défini par :

$$d\mathbf{U} = \mathbf{grad}\mathbf{U} \overline{\otimes} d\mathbf{M}$$

Comme précédemment, ses composantes se déduisent par identification en calculant la différentielle de \mathbf{U} .

En faisant le calcul on trouvera par exemple ¹⁷:

$$(\mathbf{grad}\mathbf{U})_{ijkl} = \partial_l U_{ijk} - U_{mjk} \Gamma_{il}^m - U_{imk} \Gamma_{jl}^m - U_{ijm} \Gamma_{kl}^m$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier la propriété importante suivante:

$$\boxed{\mathbf{grad}\mathbf{E} = \mathbf{0}}$$

2.6.2 Divergence d'un tenseur du troisième ordre

La divergence d'un tenseur du troisième ordre \mathbf{U} est le champ *tensoriel du second ordre* défini par

$$\boxed{\mathbf{div}\mathbf{U} = \mathbf{grad}\mathbf{U} \overline{\otimes} \mathbf{G}}$$

Dans la base naturelle, on a:

$$\mathbf{div}\mathbf{U} = (\mathbf{grad}\mathbf{U})_{ij}{}^m{}_m \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$$

Le lecteur est invité à établir les composantes de $\mathbf{div}\mathbf{U}$ dans les bases naturelle et physique des systèmes de coordonnées usuels.

¹⁷. c'est à dire si \mathbf{U} est donné pas ses composantes complètement covariantes

2.6.3 Laplacien d'un champ tensoriel du second ordre

Le laplacien d'un champ tensoriel du second ordre est le *champ de tenseurs du second ordre* défini par:

$$\Delta \mathbf{T} = \text{div grad} \mathbf{T}$$

Le lecteur pourra vérifier l'identité

$$\Delta \mathbf{T} = \text{grad div} \mathbf{T} - \text{rot rot} \mathbf{T}$$

Le lecteur est invité à établir les composantes de $\Delta \mathbf{T}$ dans les bases naturelle et physique des systèmes de coordonnées usuels.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a étendu la définition des opérateurs différentiels classiques gradient, divergence, rotationnel et laplacien à des champs tensoriels. Il convient de porter attention à l'ordre du tenseur résultat : Si \mathbf{T} est un tenseur d'ordre p

- $\text{grad} \mathbf{T}$ est un tenseur d'ordre $p + 1$
- $\text{div} \mathbf{T}$ est un tenseur d'ordre $p - 1$
- $\text{rot} \mathbf{T}$ est un tenseur d'ordre p
- $\Delta \mathbf{T}$ est un tenseur d'ordre p

Les définitions qu'on en a donné sont *intrinsèques*, c'est à dire qu'elles ne dépendent pas du système de coordonnées utilisé : ce sont les résultats d'opérations tensorielles. Les expressions des composantes *sur la base naturelle* de ces opérateurs *sont les mêmes dans tous les systèmes de coordonnées*. On peut donc trouver facilement leur expression dans n'importe quel système de coordonnées. Pour retrouver les formules qu'on trouve dans les formulaires classiques, il faut donc faire des changements de base¹⁸ de la base naturelle à la base naturelle normée.

Dans un système de coordonnées exotique, les calculs, bien que systématiques, peuvent être fastidieux. Pour faciliter les calculs, le lecteur est invité à utiliser la bibliothèque `tens3d` utilisable dans Maple et disponible à l'url <http://esm2.int-mrs.fr/gar/tens3d.html>

18. toujours très simples

Table des matières

1 Algèbre tensorielle	3
1.1 Convention d'Einstein	3
1.1.1 Règles et définitions	3
1.1.2 Notation des dérivées partielles	4
1.1.3 Symbole de Kronecker	4
1.2 Représentation matricielle de certaines sommations	4
1.3 Composantes contravariantes d'un vecteur	6
1.4 Base duale	7
1.5 Composantes covariantes d'un vecteur	7
1.6 Tenseurs euclidiens	8
1.6.1 Définition	8
1.6.2 L'espace vectoriel des tenseurs d'ordre p	11
1.6.3 Produit tensoriel de deux tenseurs	12
1.6.4 Produit tensoriel contracté	13
1.6.5 Produit tensoriel doublement contracté de deux tenseurs	14
1.6.6 Produit n fois contracté	15
1.7 Etude du tenseur métrique	15
1.7.1 Calcul des composantes	15
1.7.2 Le tenseur métrique vu comme un "ascenseur d'indice"	16
1.7.3 Calcul des produits scalaires	17
1.8 Etude du tenseur d'orientation dans \mathcal{E}_3	17
1.8.1 Calcul des composantes	17
1.8.2 Application : produits vectoriels dans \mathcal{E}_3	18
1.9 Propriétés des tenseurs du second ordre	18
1.9.1 Tenseurs du second ordre symétriques	19
1.9.2 Tenseurs du second ordre antisymétriques	19
1.9.3 Transposé d'un tenseur du second ordre	20

1.9.4	Endomorphisme associé à un tenseur du second ordre	20
1.9.5	Tenseurs sphériques	22
1.9.6	Invariants des tenseurs du second ordre	22
1.9.7	Décompositions d'un tenseur du second ordre	23
1.9.8	Valeurs propres et vecteurs propres	24
2	Analyse tensorielle dans \mathcal{E}_3	27
2.1	Système de coordonnées et sa base naturelle	27
2.1.1	Les systèmes de coordonnées	27
2.1.2	Base naturelle d'un système de coordonnées	29
2.1.3	Base naturelle normée (base physique)	30
2.1.4	Variations de la base naturelle	31
2.2	Rappel: Différentiabilité d'un champ	32
2.3	Etude des champs scalaires	34
2.4	Etude des champs vectoriels	35
2.4.1	Gradient d'un champ vectoriel	35
2.4.2	Divergence d'un champ vectoriel	36
2.4.3	Rotationnel d'un champ vectoriel	36
2.4.4	Propriétés des champs vectoriels	37
2.4.5	Laplacien d'un champ scalaire	37
2.5	Etude des champs tensoriels du second ordre	38
2.5.1	Gradient d'un champ tensoriel du second ordre	38
2.5.2	Divergence d'un tenseur du second ordre	39
2.5.3	Rotationnel d'un tenseur du second ordre	39
2.5.4	Laplacien d'un champ de vecteurs	39
2.5.5	Formule de la divergence pour les tenseurs du second ordre	40
2.6	Etude des champs tensoriels du troisième ordre	40
2.6.1	Gradient d'un champ tensoriel du troisième ordre	40
2.6.2	Divergence d'un tenseur du troisième ordre	40
2.6.3	Laplacien d'un champ tensoriel du second ordre	41
2.7	Conclusion	41