

J.S. Bell

*Théorie
Quantique des Champs
Expérimentale*

Traduit de : *Experimental quantum field theory*,
Proceedings of the 1977 CERN-JINR school of physics,
Nafplion, Greece, 22 May-4 June 1977
CERN 77-18, 20 October 1977

Le 6 avril 1998
 Alain Laverne
 Lab. de physique nucléaire
 couloir 24-14, 5^e ét.
 Université Paris7
 2 pl. Jussieu, Paris V^e

La théorie quantique des champs ne manque pas de volumes. Quoique ni superficiel ni plat, ce cours de J.S. Bell me semble pourtant, par sa clarté et sa concision, combler un vide pédagogique et mériter mieux que l'oubli. Dépourvu de complications géométriques inhérentes aux spineurs, il devrait satisfaire les bientôt matre(ss)e(s) en physique, expérimentelle(s) en théorie quantique mais frustré(e)s par les gratifiants feymaniens dont les physiciens des particules font un usage immodéré. Bell n'étant plus là pour se défendre, je me suis interdit toute modification autre que quelques corrections de coquilles, et toute addition de notes qui auraient malencontreusement alourdi l'exposé.

SOMMAIRE

Résumé 1

La mécanique quantique 1

Les équations du mouvement de Heisenberg 3

Le formalisme canonique 5

Le champ scalaire réel 8

Interprétation en termes de particules 11

Interaction 14

L'opérateur S 15

Eléments de matrice S 16

Les graphes de Feynman 18

La renormalisation 20

Probabilités de transition et sections efficaces 22

Le champ vectoriel 24

Vide nu et vide réel 28

Les fonctions de Green 29

Intégrales fonctionnelles 30

Théorie de champ euclidienne 33

L'indépendance de jauge 34

Les instants 36

Les solitons 39

RESUME

Je tente ici d'exposer ce qui me semble le minimum indispensable de théorie quantique des champs qui devrait être connu des expérimentateurs cultivés de physique des particules. L'adjectif «expérimental» dans le titre qualifie non seulement l'auditoire visé mais aussi le niveau de rigueur mathématique ambitionné.

LA MECANIQUE QUANTIQUE

Commençons par quelques points essentiels de mécanique quantique élémentaire. Considérons un système dynamique typique n'ayant, pour simplifier, qu'un seul degré de liberté. En mécanique quantique, un état de ce genre de système est caractérisé par une fonction-d'onde

$$\Psi(t, q) \quad (1)$$

dépendant du temps t et de la coordonnée q . L'évolution au cours du temps est régie par l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\dot{\Psi} = \mathcal{H}\Psi, \quad (2)$$

où l'opérateur hamiltonien \mathcal{H} est généralement une combinaison de la coordonnée q et de l'opérateur différentiel

$$p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}. \quad (3)$$

Dans ce qui suit, \mathcal{H} sera toujours un polynôme en q et p .

La quantité

$$dq \Psi^*(t, q) \Psi(t, q) \quad (4)$$

est supposée donner la distribution de la probabilité que la coordonnée ait la valeur q au temps t . La valeur moyenne de toute fonction X de q est donc :

$$\int dq \Psi^*(t, q) X(q) \Psi(t, q), \quad (5)$$

l'intégrale étant étendue à toutes les valeurs de q .

On a coutume de faire allusion à cette expression sous le nom de *valeur moyenne* de X , même pour des X qui dépendent de p aussi bien que de q , et qui sont donc des opérateurs différentiels.

Lorsque X est un opérateur différentiel, il semble naturel de se le représenter comme agissant sur Ψ dans (5), c'est-à-dire :

$$\int dq \Psi^*(t, q) (X \Psi(t, q)). \quad (6)$$

Mais il est utile d'admettre aussi l'association alternative

$$\int dq (\Psi^*(t, q) X) \Psi(t, q), \quad (7)$$

dans laquelle on imagine que X agit vers la gauche, "en arrière", sur Ψ^* . Pour voir comment cela peut se faire, considérons, dans X , un terme de la forme :

$$f(q) p g(q) = f \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q} g.$$

Dorénavant, nous supposerons que Ψ décroît bien gentiment à l'infini. Alors, par intégration par parties sur tout q ,

$$\int dq \Psi^* \left(f \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q} g \Psi \right) = \int dq \left(- \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q} f \Psi^* \right) g \Psi.$$

Cela ne fait donc aucune différence de considérer que p différencie tout ce qui est à sa droite ou tout ce qui est à sa gauche — dans la mesure où il est bien entendu que ce dernier cas implique un changement de signe. Au prix de ce sous-entendu, l'accouplement (7) est équivalent à (6).

Moyennant ces actions “en arrière” implicites, l'équation

$$(X\Psi)^* = X^* \Psi^* \quad (8)$$

peut s'écrire, parfois plus commodément,

$$(X\Psi)^* = \Psi^* X^+, \quad (9)$$

où X^+ , appelé le *conjugué hermitique* de X , est obtenu à partir de ce dernier en inversant la suite de tous les facteurs q et p et en conjuguant tous les coefficients numériques. Le changement de signe qui s'introduit lorsqu'on écrit p à droite, plutôt qu'à gauche, est équivalent à la conjugaison complexe de $(\hbar/i)(\partial/\partial q)$. L'inversion de l'ordre, lorsqu'on écrit les q et les p du côté droit, donne l'ordre des opérations définies par X^* . Nous aurons souvent affaire à des opérateurs X autoconjugués hermitiques (ou, simplement, hermitiques), c'est-à-dire doués de la propriété $X = X^+$. Les opérateurs hermitiques ont des valeurs moyennes réelles car

$$\begin{aligned} \left(\int dq \Psi^* X \Psi \right)^* &= \int dq \Psi (X \Psi)^* \\ &= \int dq (X \Psi)^* \Psi \\ &= \int dq \Psi^* X^+ \Psi. \end{aligned}$$

D'après (4), la norme de Ψ ,

$$\int dq \Psi^* \Psi, \quad (10)$$

doit rester constante au cours du temps, de fait égale à l'unité, car elle fournit la probabilité de toutes les valeurs de q . Calculons la dérivée de la norme par rapport au temps, à l'aide de l'équation de Schrödinger (2) et de sa conjuguée complexe

$$-i\hbar \dot{\Psi}^* = \mathcal{H}^* \Psi^* = \Psi^* \mathcal{H}^+. \quad (11)$$

Ainsi :

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \int dq \Psi^* \Psi = \int dq \Psi^* (\mathcal{H}^+ - \mathcal{H}) \Psi. \quad (12)$$

La constance de la norme est donc assurée en imposant à \mathcal{H} d'être hermitique : $\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}$.

On peut résoudre formellement l'équation de Schrödinger par un développement de Taylor autour de $t = 0$, avec pour résultat :

$$\begin{aligned} \Psi(t, q) &= \left(1 - \frac{i}{\hbar} \mathcal{H} t + \frac{1}{2!} \left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} t \right)^2 + \dots \right) \Psi(0, q) \\ &= e^{-\frac{it}{\hbar} \mathcal{H}} \Psi(0, q), \end{aligned} \quad (13)$$

où l'exponentielle de l'opérateur est définie (par exemple) par sa série entière. De même, à l'aide de (11) et de $\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}$, on a :

$$\Psi^*(t, q) = \Psi^*(0, q) e^{\frac{it}{\hbar} \mathcal{H}}. \quad (14)$$

La valeur moyenne

$$\int dq \Psi^*(t, q) X \Psi(t, q) \quad (15)$$

peut donc s'écrire aussi :

$$\int dq \Psi^*(0, q) X(t) \Psi(0, q), \quad (16)$$

avec

$$X(t) = e^{\frac{it}{\hbar} \mathcal{H}} X e^{-\frac{it}{\hbar} \mathcal{H}}. \quad (17)$$

Le formalisme adopté dans (15), où les fonctions-d'onde dépendent du temps tandis que les opérateurs sont indépendants du temps, est appelé représentation de Schrödinger.

La valeur moyenne (5), où n'intervient qu'un seul état Ψ , est un cas particulier d'une construction plus générale impliquant deux états, disons Ψ_α et Ψ_β , éventuellement différents :

$$\int dq \Psi_\alpha^* X \Psi_\beta. \quad (18)$$

Ces quantités sont appelées *éléments de matrices* de X entre les états α et β , et notées

$$\langle \alpha | X | \beta \rangle. \quad (19)$$

A la suite de Dirac, il est commode d'attribuer une signification aux différentes parties de cette notation composite entre crochets. Ainsi, le *bra* $\langle \alpha |$ est mis pour Ψ_α^* , le *ket* $| \beta \rangle$ pour Ψ_β , tandis que le *bra-ket* complet dans (19) implique l'intégration sur q . Avec cette notation, les équations de Schrödinger (2) et (11) s'écrivent

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} | \beta, t \rangle &= \mathcal{H} | \beta, t \rangle, \\ -i\hbar \frac{d}{dt} \langle \alpha, t | &= \langle \alpha, t | \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (20)$$

On écrit à l'intérieur des crochets partiels $| \rangle$ et $\langle |$, les bras et kets, n'importe quels symboles convenant pour identification de l'état en question. Lorsque nous aurons affaire à un état de Schrödinger dépendant du temps (dans (20) par exemple), nous ferons généralement figurer le temps t parmi les symboles identificateurs.

Remarquez que (8) et une minime généralisation de (9) permettent d'écrire, en notation de Dirac :

$$(X | \alpha \rangle)^* = \langle \alpha | X^+ \quad (8')$$

$$\langle \beta | X | \alpha \rangle^* = \langle \alpha | X^+ | \beta \rangle. \quad (9')$$

LES EQUATIONS DU MOUVEMENT DE HEISENBERG

Soit X un polynôme en q et p , ne dépendant pas explicitement du temps (autrement dit dont les coefficients sont constants). L'opérateur de Heisenberg correspondant est

$$X(t) = e^{\frac{it}{\hbar} \mathcal{H}} X e^{-\frac{it}{\hbar} \mathcal{H}}. \quad (21)$$

En dérivant par rapport au temps, on a :

$$\dot{X}(t) = -\frac{i}{\hbar} [X(t), \mathcal{H}], \quad (22)$$

où le *commutateur* de deux opérateurs est, par définition, $[A, B] = AB - BA$. Le résultat (22) est obtenu grâce aux identités

$$\begin{aligned} \hbar \frac{d}{dt} \left(e^{\pm \frac{it}{\hbar} \mathcal{H}} \right) &= \pm i \mathcal{H} e^{\pm \frac{it}{\hbar} \mathcal{H}} \\ &= e^{\pm \frac{it}{\hbar} \mathcal{H}} (\pm i \mathcal{H}), \end{aligned}$$

dont on peut se convaincre en examinant la série entière de l'exponentielle.

C'est l'opérateur de Schrödinger \mathcal{H} qui fait irruption en premier dans (22). Mais on peut lui substituer l'opérateur de Heisenberg $\mathcal{H}(t)$, car

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(t) &= e^{\frac{it}{\hbar}} \mathcal{H} e^{-\frac{it}{\hbar}} \mathcal{H} \\ &= \mathcal{H} e^{\frac{it}{\hbar}} \mathcal{H} e^{-\frac{it}{\hbar}} \mathcal{H} \\ &= \mathcal{H} .\end{aligned}\tag{23}$$

Ici, comme souvent par la suite, nous utilisons l'identité

$$e^{\pm \frac{it}{\hbar}} \mathcal{H} e^{\mp \frac{it}{\hbar}} \mathcal{H} = 1,\tag{24}$$

qui résulte du produit des deux séries entières, tout comme si \mathcal{H} était un nombre plutôt qu'un opérateur.

On a donc :

$$\dot{X}(t) = -\frac{i}{\hbar} [X(t), \mathcal{H}(t)],\tag{25}$$

et en particulier,

$$\begin{aligned}\dot{q}(t) &= -\frac{i}{\hbar} [q(t), \mathcal{H}(t)] \\ \dot{p}(t) &= -\frac{i}{\hbar} [p(t), \mathcal{H}(t)],\end{aligned}\tag{26}$$

dites *équations du mouvement de Heisenberg*.

Remarquez que $\mathcal{H}(t)$ est la même fonction de $q(t)$ et $p(t)$ que la fonction \mathcal{H} de q et p . On s'en assure en appliquant à chaque terme de \mathcal{H} des identités du genre :

$$\begin{aligned}e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} t} A B e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} t} &= e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} t} A e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} t} e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} t} B e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} t} \\ &= A(t) B(t),\end{aligned}\tag{27}$$

grâce à (24).

Au moyen de l'expression de $\mathcal{H}(t)$, on peut réduire les membres de droite de (26) en fonctions des seuls commutateurs :

$$\begin{aligned}[q(t), q(t)] &= [p(t), p(t)] = 0 \\ [q(t), p(t)] &= ?\end{aligned}\tag{28}$$

On effectue cette réduction en appliquant à chaque terme de $\mathcal{H}(t)$ des identités du genre

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C],\tag{29}$$

dont la validité saute aux yeux lorsqu'on écrit leur développement explicite. Enfin, on évalue facilement le commutateur inconnu :

$$\begin{aligned}[q(t), p(t)] &= e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} t} [q, p] e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} t} \\ &= e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} t} \left(-\frac{\hbar}{i}\right) e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} t} \\ &= -\frac{\hbar}{i}.\end{aligned}\tag{30}$$

Supposons, par exemple, que $\mathcal{H}(t)$ contienne un terme

$$(q(t))^2 (p(t))^2 = q(t) q(t) p(t) p(t).$$

Nous avons alors

$$[q(t), q(t) q(t) p(t) p(t)] = [q(t), q(t)] q(t) p(t) p(t) + q(t) [q(t), q(t)] p(t) p(t) \\ + q(t) q(t) [q(t), p(t)] p(t) + q(t) q(t) p(t) [q(t), p(t)],$$

qui devient, grâce à (28) et (30) :

$$-\frac{i}{\hbar} [q(t), q(t) q(t) p(t) p(t)] = q(t) q(t) p(t) + q(t) q(t) p(t) \\ = \frac{\partial}{\partial p(t)} q(t) q(t) p(t) p(t),$$

où, en calculant les dérivées, il faut veiller à ne pas altérer l'ordre des p et des q survivants. Moyennant cette précaution, on a une équivalence tout à fait générale entre commutation avec q (ou $-p$) et dérivation par rapport à p (ou q). Les équations du mouvement de Heisenberg peuvent être réécrites :

$$\dot{q}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial p(t)} \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(t)}{\partial q(t)}, \quad (31)$$

c'est-à-dire précisément (à la précaution près concernant les facteurs non commutables) sous la forme des équations classiques du mouvement de Hamilton.

Bien sûr, les quantités q et p dans (31) sont des opérateurs (on dit des *q-nombres*), et pas encore les nombres ordinaires (dits *c-nombres*) de la mécanique classique. Mais les opérateurs peuvent être remplacés par des valeurs numériques en prenant leurs valeurs moyennes. On peut ainsi montrer, en s'appuyant sur (31), que dans certaines conditions (lorsque \hbar peut être considéré comme négligeable) les valeurs moyennes quantiques se comportent comme des valeurs moyennes classiques, en sorte que la mécanique classique est une approximation idoine.

LE FORMALISME CANONIQUE

Nous avons vu comment la mécanique quantique réalise sa jonction avec la mécanique classique par le truchement des équations du mouvement de Hamilton. Pour la plupart d'entre nous, la mécanique classique est plus facile à appréhender que la mécanique quantique. Aussi la construction d'une théorie quantique s'opère-t-elle habituellement à partir de la théorie classique correspondante. A ce niveau classique, le formalisme lagrangien est, par certains côtés, plus commode que le formalisme hamiltonien.

Le lagrangien

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) \quad (32)$$

est une fonction de la coordonnée et de la vitesse. Les équations du mouvement sont définies par le principe variationnel

$$\delta A = 0, \quad (33)$$

avec

$$A = \int dt \mathcal{L}(q, \dot{q}), \quad (34)$$

et par rapport à des variations $\delta q(t)$ supposées s'annuler pour $|t|$ grand. Le résultat peut s'écrire

$$\frac{\delta A}{\delta q(t)} = 0 \quad (35)$$

pour tout t , où la *dérivée fonctionnelle* de A par rapport à $q(t)$ est définie par la relation :

$$\delta A = \int dt \frac{\delta A}{\delta q(t)} \delta q(t). \quad (36)$$

Celle-ci est une généralisation de l'expression

$$\delta A = \sum_n \frac{\partial F}{\partial x_n} \delta x_n,$$

définissant les dérivées partielles d'une fonction F d'un nombre fini de variables x_n , au cas d'une fonction A d'une infinité d'arguments $q(t)$ — en fait une fonction de fonction, dite une *fonctionnelle*. Pour calculer la dérivée fonctionnelle, notez que

$$\begin{aligned} \delta A &= \int dt \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) \\ &= \int dt \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q, \end{aligned}$$

après intégration par parties. Donc :

$$\frac{\delta A}{\delta q(t)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}, \quad (37)$$

et ainsi (35) donne l'équation du mouvement de Lagrange familière.

Le moment p , conjugué de q , est par définition :

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}. \quad (38)$$

En supposant cette équation soluble pour q en fonction de p , l'hamiltonien est défini par

$$\mathcal{H} = p \dot{q} - \mathcal{L}, \quad (39)$$

et nous obtenons la forme hamiltonienne des équations du mouvement :

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}. \quad (40)$$

On passe alors à la théorie quantique en considérant les opérateurs de Heisenberg $q(t)$ et $p(t)$ tels que

$$\begin{aligned} [q(t), p(t)] &= i\hbar \\ \dot{q}(t) &= (i\hbar)^{-1} [q(t), \mathcal{H}(t)] \\ \dot{p}(t) &= (i\hbar)^{-1} [p(t), \mathcal{H}(t)], \end{aligned}$$

avec $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(q(t), p(t))$.

La généralisation à plusieurs degrés de liberté est immédiate :

$$p_n = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} \quad (41)$$

$$\mathcal{H} = \sum p_n \dot{q}_n - \mathcal{L} \quad (42)$$

$$\begin{cases} \dot{q}_n = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_n} \\ \dot{p}_n = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_n} \end{cases} \quad (43)$$

$$\begin{cases} \dot{q}_n(t) = (i\hbar)^{-1} [q_n(t), \mathcal{H}(t)] \\ \dot{p}_n(t) = (i\hbar)^{-1} [p_n(t), \mathcal{H}(t)] \end{cases} \quad (44)$$

$$\begin{cases} [q_n(t), q_m(t)] = [p_n(t), p_m(t)] = 0 \\ [q_n(t), p_m(t)] = i\hbar \delta_{nm} . \end{cases} \quad (45)$$

Pour en arriver enfin à la théorie des champs, il nous faut encore généraliser à une infinité continue de degrés de liberté. En effet, même le plus simple des champs est caractérisé, à un instant t , par une infinité continue de quantités $\phi(t, \vec{x})$ pour tout \vec{x} . Et nous avons affaire à des équations aux dérivées partielles plutôt qu'à des équations différentielles ordinaires.

Pour vous convaincre de la possibilité de cette généralisation, souvenez-vous du traitement pratique des équations différentielles qui consiste à les approximer par des équations aux différences. On peut ainsi imaginer représenter la fonction ϕ par ses valeurs, $q_n(t) = \phi(t, \vec{x}_n)$, en un ensemble discret de points \vec{x}_n que l'on rendra en fin de compte infiniment dense. Nous pouvons aussi travailler, pour commencer, non pas dans tout l'espace, mais dans un volume fini que l'on finira par rendre très grand. En procédant ainsi, nous pouvons trouver comment généraliser le formalisme canonique et le processus de quantification. Au niveau formel, nonobstant de subtiles questions de convergence, la généralisation aux systèmes continus consiste principalement à remplacer les sommes sur des indices n par des intégrales sur des arguments \vec{x} , et les deltas de Kronecker δ_{nm} par des deltas de Dirac $\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$.

Considérons alors un principe variationnel

$$\delta A = 0, \quad A = \int dt \mathcal{L}(t),$$

où le lagrangien \mathcal{L} est maintenant une fonctionnelle du champ $\phi(t, \vec{x})$ et de sa dérivée par rapport au temps $\dot{\phi}(t, \vec{x})$. Dans une théorie invariante de Lorentz, il faut s'attendre à des manifestations symétriques des coordonnées de temps et d'espace. Nous supposons donc que

$$\mathcal{L}(t) = \int d^3\vec{x} L(t, \vec{x}),$$

où la densité lagrangienne $L(t, \vec{x})$ est une fonction de ϕ et de ses dérivées premières en (t, \vec{x}) . On a alors :

$$\begin{aligned} A &= \int d^4x L(x), \\ \delta A &= \int d^4x \frac{\delta A}{\delta \phi(x)} \delta \phi(x), \end{aligned} \quad (46)$$

où $x \equiv (t, \vec{x})$, $d^4x = dt dx_1 dx_2 dx_3$, et avec

$$\frac{\delta A}{\delta \phi(x)} = \frac{\partial L}{\partial \phi} - \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial L}{\partial (\partial \phi / \partial x_{\mu})}, \quad (47)$$

en analogie avec (37). En exprimant la nullité de cette dérivée fonctionnelle, on obtient les équations de Lagrange du mouvement du champ.

En analogie avec (41), le champ $\Pi(x)$ canoniquement conjugué de $\phi(x)$ est défini par

$$\Pi(x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}. \quad (48)$$

En analogie avec (42), on définit l'hamiltonien

$$\mathcal{H}(t) = \int d^3\vec{x} \Pi(t, \vec{x}) \dot{\phi}(t, \vec{x}) - \mathcal{L}(t), \quad (49)$$

et on peut réécrire les équations du mouvement sous forme hamiltonienne :

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(t, \vec{x}) &= \frac{\delta \mathcal{H}(t)}{\delta \Pi(t, \vec{x})} \\ \dot{\Pi}(t, \vec{x}) &= -\frac{\delta \mathcal{H}(t)}{\delta \phi(t, \vec{x})},\end{aligned}\tag{50}$$

en analogie avec (43).

Passons maintenant à la théorie quantique en postulant des champs d'opérateurs de Heisenberg correspondants. Les relations de commutation et les équations du mouvement de Heisenberg sont les généralisations naturelles de (44) et (45) :

$$\begin{cases} \dot{\phi}(t, \vec{x}) = (i\hbar)^{-1} [\phi(t, \vec{x}), \mathcal{H}(t)] \\ \dot{\Pi}(t, \vec{x}) = (i\hbar)^{-1} [\Pi(t, \vec{x}), \mathcal{H}(t)] \end{cases}\tag{51}$$

$$\begin{cases} [\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] = [\Pi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = 0 \\ [\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = i\hbar \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \end{cases}\tag{52}$$

Comme précédemment, les équations du mouvement de Heisenberg peuvent se réécrire, en veillant à l'ordre des opérateurs non commutables, sous la forme hamiltonienne (50).

La généralisation à un système de plusieurs champs est directe :

$$\begin{cases} \dot{\phi}_n(t, \vec{x}) = (i\hbar)^{-1} [\phi_n(t, \vec{x}), \mathcal{H}(t)] \\ \dot{\Pi}_n(t, \vec{x}) = (i\hbar)^{-1} [\Pi_n(t, \vec{x}), \mathcal{H}(t)] \end{cases}\tag{53}$$

$$\begin{cases} [\phi_n(t, \vec{x}), \phi_m(t, \vec{y})] = [\Pi_n(t, \vec{x}), \Pi_m(t, \vec{y})] = 0 \\ [\phi_n(t, \vec{x}), \Pi_m(t, \vec{y})] = i\hbar \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \delta_{nm} \end{cases}\tag{54}$$

$$\begin{cases} \Pi_n(t, \vec{x}) = \frac{\partial L(t, \vec{x})}{\partial \dot{\phi}_n(t, \vec{x})} \\ \mathcal{H}(t) = \int d^3 \vec{x} \left(\sum_n \Pi_n(t, \vec{x}) \dot{\phi}_n(t, \vec{x}) - L \right) \end{cases}\tag{55}$$

$$\begin{cases} \dot{\Pi}_n = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi_n} \\ \dot{\phi}_n = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Pi_n}. \end{cases}\tag{56}$$

Il ne reste plus qu'à appliquer ce schéma général à des exemples spécifiques.

LE CHAMP SCALAIRE REEL

Pour travailler sur des théories relativistes, nous utiliserons souvent, plutôt que le temps $x_0 (= t)$, la quatrième coordonnée imaginaire $x_4 (= ict)$. De plus, nous userons d'unités telles que $\hbar = c = 1$.

Nous supposons que la densité lagrangienne est un scalaire de Lorentz, car c'est ce qui conduit à des équations du mouvement invariante de Lorentz. Le champ le plus simple est un scalaire de Lorentz, réel :

$$\begin{aligned}\phi(x), \quad x \equiv x_\mu \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \phi(x) = (\phi(x))^*.\end{aligned}$$

La densité lagrangienne scalaire de Lorentz non triviale la plus simple que l'on puisse construire avec ce champ et ses dérivées premières est de la forme

$$L = -\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2,\tag{57}$$

où m est une constante. L'absence de constante multiplicative arbitraire devant le premier terme n'est rien de plus qu'une convention de normalisation de ϕ . Dans (57), nous utilisons la notation condensée

$$\partial_\mu \phi \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu},$$

ainsi que la convention habituelle de sommation sur les indices répétés :

$$(\partial_\mu \phi)(\partial_\mu \phi) \equiv \sum_{\mu=1}^4 (\partial_\mu \phi)(\partial_\mu \phi).$$

Toujours dans (57), le signe moins, global, est nécessaire pour obtenir des énergies positives.

La dérivée fonctionnelle de

$$A = \int d^4x L(x)$$

par rapport à $\phi(x)$ vaut

$$\begin{aligned} \frac{\delta A}{\delta \phi(x)} &= \frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \phi)} \\ &= -m^2 \phi + \partial_\mu \partial_\mu \phi, \end{aligned}$$

d'où l'équation du mouvement :

$$(\partial_\mu \partial_\mu - m^2)\phi(x) = 0, \quad (58)$$

dite *équation de Klein-Gordon*.

En séparant les dérivées par rapport au temps, et en notant $\dot{\phi} = \partial \phi / \partial t = i \partial \phi / \partial x_4$, on a :

$$L = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (59)$$

Le moment canoniquement conjugué est donc

$$\Pi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}.$$

L'hamiltonien vaut

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int d^3 \vec{x} (\Pi \dot{\phi} - L) \\ &= \int d^3 \vec{x} \left(\frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right). \end{aligned} \quad (60)$$

Les équations du mouvement de Hamilton sont

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \Pi} = \Pi \\ \dot{\Pi} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi} = \vec{\nabla}^2 \phi - m^2 \phi, \end{cases} \quad (61)$$

qui redonnent bien (58).

Remarquez que (61) admet comme solution particulière l'onde plane

$$\phi = e^{\pm i k x}, \quad \Pi = \mp i k_0 e^{\pm i k x},$$

avec :

$$\begin{aligned} kx &\equiv k_\mu x_\mu \equiv k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 + k_4 x_4 \\ &\equiv k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 - k_0 x_0 \\ k_0 &= +\sqrt{m^2 + \vec{k}^2} \\ \vec{k} &\equiv (k_1, k_2, k_3). \end{aligned}$$

La solution générale, étant donné son comportement à l'infini qui autorise un développement du type Fourier à tout instant, peut donc s'écrire :

$$\begin{cases} \phi(x) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} (a(\vec{k}) e^{ikx} + a^*(\vec{k}) e^{-ikx}) \\ \Pi(x) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} (a(\vec{k}) e^{ikx} - a^*(\vec{k}) e^{-ikx}) (-ik_0). \end{cases} \quad (62)$$

C'est la réalité de ϕ qui fait qu'aux ondes planes complexes conjuguées sont associés des coefficients complexes conjugués, $a(\vec{k})/2k_0$ et $a^*(\vec{k})/2k_0$.

Passant à la théorie quantique, nous prenons pour ϕ et Π des opérateurs hermitiques, $\phi = \phi^\dagger$, $\Pi = \Pi^\dagger$, la propriété d'hermiticité (qui implique la réalité des valeurs moyennes) étant l'analogue quantique de la réalité classique. Nous supposons les règles de commutation canoniques aux temps égaux (équations (52)) :

$$\begin{cases} [\phi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})] = [\Pi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = 0 \\ [\phi(t, \vec{x}), \Pi(t, \vec{y})] = i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \end{cases} \quad (63)$$

On peut alors vérifier, par calcul explicite, qu'avec l'hamiltonien (60), les équations du mouvement de Heisenberg,

$$\dot{\phi} = -i[\phi, \mathcal{H}], \quad \dot{\Pi} = -i[\Pi, \mathcal{H}],$$

sont équivalentes aux équations de Hamilton (61). La solution peut encore s'écrire sous la forme (62), à ceci près que $a(\vec{k})$ est maintenant un opérateur, et que son conjugué hermitique a^\dagger prend la place de a^* :

$$\begin{cases} \phi(x) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} (a(\vec{k}) e^{ikx} + a^\dagger(\vec{k}) e^{-ikx}) \\ \Pi(x) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} (a(\vec{k}) e^{ikx} - a^\dagger(\vec{k}) e^{-ikx}) (-ik_0). \end{cases} \quad (64)$$

A tout instant t donné, on peut, au moyen de la transformée de Fourier inverse, résoudre les équations (64) par rapport à a et a^\dagger :

$$\begin{aligned} a(\vec{k}) &= \int d^3 \vec{x} (2k_0 \phi + i\Pi) e^{-ikx} \\ a^\dagger(\vec{k}) &= \int d^3 \vec{x} (2k_0 \phi - i\Pi) e^{ikx}. \end{aligned}$$

A l'aide de (63), nous trouvons alors les règles de commutation des a et a^\dagger :

$$\begin{cases} [a(\vec{k}), a(\vec{k}')] = [a^\dagger(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = 0 \\ [a(\vec{k}), a^\dagger(\vec{k}')] = 2k_0 (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \end{cases} \quad (65)$$

On peut exprimer l'hamiltonien en termes des a et a^+ . A un instant t donné, en reportant (64) dans (60), on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \frac{k_0}{2} (a^+(\vec{k}) a(\vec{k}) + a(\vec{k}) a^+(\vec{k})) \\ &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} k_0 a^+(\vec{k}) a(\vec{k}) + C',\end{aligned}\quad (66)$$

où C' est une constante numérique,

$$C' = \int d^3\vec{k} \frac{k_0}{2} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}).$$

Mais nous aurions pu ajouter une constante à la densité lagrangienne initiale :

$$L \rightarrow L + C. \quad (67)$$

Nous pouvons choisir C en sorte que la constante subséquemment soustraite de l'hamiltonien compense exactement C' . Une telle addition de constante ne change physiquement rien d'autre que l'origine arbitraire de mesure des énergies. Nous ne prendrons donc comme hamiltonien que le premier terme de (66).

Notez quand même que C' est en fait infinie, non seulement parce qu'y intervient une fonction delta d'argument nul, mais aussi parce qu'elle résulte d'une intégrale sur \vec{k} divergente. La constante compensatrice C dans (67) doit être infinie, en rapport avec C' . C'est la première fois, mais non la dernière, que nous tolérerons la présence de constantes infinies dans le lagrangien, afin de les éviter ailleurs. A l'étudiante qui doute de la fiabilité de ce genre de manipulation, je ne peux offrir plus que quelques paroles de réconfort : la théorie peut être établie de manière plus rigoureuse, par exemple en travaillant sur un réseau fini de points, au lieu d'un espace-temps continu. Les quantités qui étaient infinies sont alors grandes mais finies, et se laissent manipuler en tout bien tout honneur. Ce n'est qu'après les avoir combinées sous forme inoffensive convenable que l'on se hasarde à la limite désirée d'un espace-temps infini continu. C'est en adoptant des points de vue de ce genre que les experts se sont convaincus, sur des modèles simples, que les téméraires manipulations des physiciens ne sont pas spécieuses.

INTERPRETATION EN TERMES DE PARTICULES

Etant donné l'équation de Schrödinger, $\dot{\Psi} = -i\mathcal{H}\Psi$, supposons possible d'en trouver des solutions particulières dont la dépendance temporelle soit tout simplement exponentielle : $\Psi(t) \propto e^{-iEt}$. On a alors

$$\mathcal{H}\Psi = E\Psi. \quad (68)$$

On dit dans ce cas que Ψ est un *état propre* de l'hamiltonien (ou de l'énergie), avec la valeur propre E .

Etant donné n'importe quel état propre, les opérateurs a et a^+ permettent immédiatement d'en construire d'autres. D'après (66) et (65), on a :

$$\begin{cases} [\mathcal{H}, a^+(\vec{k})] = a^+(\vec{k}) k_0 \\ [\mathcal{H}, a(\vec{k})] = -a(\vec{k}) k_0, \end{cases} \quad (69)$$

d'où :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}a^+(\vec{k})\Psi &= a^+(\vec{k})(\mathcal{H} + k_0)\Psi = (E + k_0)a^+(\vec{k})\Psi \\ \mathcal{H}a(\vec{k})\Psi &= a(\vec{k})(\mathcal{H} - k_0)\Psi = (E - k_0)a(\vec{k})\Psi.\end{aligned}\quad (70)$$

Si Ψ est un état propre de l'énergie avec la valeur propre E , alors $a^+(\vec{k})\Psi$ et $a(\vec{k})\Psi$ sont des états propres avec les valeurs propres $E \pm k_0$ respectivement.

Supposons qu'existe une valeur minimale E_0 de l'énergie, dont le vecteur propre correspondant est Ψ_0 . On a alors

$$a(\vec{k}) \Psi_0 = 0 \quad (71)$$

pour tout (\vec{k}) , sinon ce genre d'état serait état propre pour une valeur propre plus basse. Nous appellerons Ψ_0 le *vide*. D'après (71) et (66), on a $\mathcal{H}\Psi_0 = 0$, et

$$E_0 = 0. \quad (72)$$

Si la constante C' , dans (66), n'avait pas été compensée, l'énergie E_0 du vide n'aurait pas été nulle mais infinie, désagréablement mineur. D'après (70), les états

$$a^+(\vec{k}_1) a^+(\vec{k}_2) \cdots \Psi_0, \quad (73)$$

résultant de l'application d'un nombre quelconque d'opérateurs a^+ sur le vide, sont états propres de l'énergie avec les valeurs propres $E = k_{10} + k_{20} + \cdots$. En notation de Dirac, nous représenterons ces états par

$$|\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \dots\rangle, \quad (74)$$

et, de même, le vide par :

$$|0\rangle. \quad (75)$$

Les symboles (74) et (75) seront mis indifféremment pour des états de Schrödinger à $t = 0$ ou des états de Heisenberg à t quelconque.

Les états (74) ont une interprétation aussi simple qu'importante. La confirmation de sa légitimité réside, finalement, dans sa pérennité. Cette interprétation peut être d'abord suggérée par l'examen de l'élément de matrice

$$\langle 0 | \phi(x) | \vec{k} \rangle. \quad (76)$$

D'après (64), (65), (71) et (8'), celui-ci vaut tout simplement

$$e^{ikx} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{x} - ik_0 t}. \quad (77)$$

On se souvient qu'en mécanique ondulatoire élémentaire, cette expression est précisément celle de l'onde de de Broglie associée à une particule d'impulsion \vec{k} , de masse m , et d'énergie $k_0 = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$. La possibilité d'attribuer à $|\vec{k}\rangle$ la signification, justement, d'un tel état d'une particule n'est donc pas pour surprendre, tout comme l'état $|\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots\rangle$ a la signification d'un état de plusieurs particules de quadri-impulsions k_1, k_2, \dots .

Il ne faut pas s'imaginer que cette interprétation en termes de particules, que nous incorporons dorénavant à la théorie, se substituerait à l'interprétation originale des états comme des distributions de probabilité de différentes configurations de champ ϕ ; elle vient plutôt la compléter. L'interprétation pertinente est dictée par le dispositif expérimental. Il serait bien sûr plus satisfaisant d'obtenir les deux interprétations à partir d'axiomes antérieurs, mais je ne ferai ici aucune tentative dans cette direction.

On a, d'après (73),

$$a^+(\vec{k}) |\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots\rangle = |\vec{k}, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots\rangle.$$

A l'aide de (73) et (65), on peut calculer :

$$\begin{aligned} a(\vec{k}) |\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, \dots\rangle &= 2k_0(2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}_1) |\vec{k}_2, \vec{k}_3, \dots\rangle \\ &+ 2k_0(2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}_2) |\vec{k}_1, \vec{k}_3, \dots\rangle \\ &+ \dots \end{aligned}$$

L'action de a^+ , ou de a , sur un état donné a donc pour effet d'ajouter, ou d'ôter, des particules. C'est pourquoi on les appelle opérateurs de *création* et de *destruction* (ou d'*annihilation*).

Remarquez que, d'après (8'), le conjugué de

$$|\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots\rangle = a^+(\vec{k}_1) a^+(\vec{k}_2) \dots |0\rangle,$$

est :

$$\langle \vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots | = \langle 0 | \dots a(\vec{k}_2) a(\vec{k}_1). \quad (78)$$

Notez également que, puisque les a^+ commutent les uns avec les autres, voir (65), prendre les mêmes impulsions dans un ordre différent, ou échanger l'étiquetage des particules, ne donne pas un nouvel état :

$$\begin{aligned} |\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots\rangle &= |\vec{k}_2, \vec{k}_1, \dots\rangle \\ \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots | &= \langle \vec{k}_2, \vec{k}_1, \dots | \\ &\text{etc.} \end{aligned} \quad (79)$$

Les calculs mettant en jeu des opérateurs de création et de destruction sont effectués au moyen d'utilisations répétées de (71) et de sa conjuguée (voir (8')),

$$a(\vec{k}) |0\rangle = \langle 0 | a^+(\vec{k}) = 0, \quad (80)$$

ainsi que des règles de commutation (65).

Calculons, par exemple, le produit intérieur de deux états à une particule, $\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle$. Celui-ci est donné par :

$$\langle 0 | a(\vec{k}) a^+(\vec{k}') |0\rangle = \langle 0 | a^+(\vec{k}') a(\vec{k}) |0\rangle + \langle 0 | [a(\vec{k}), a^+(\vec{k}')] |0\rangle.$$

Le premier terme est nul en vertu de (80), si bien que, compte tenu de la valeur (65) du commutateur, on a :

$$\langle \vec{k} | \vec{k}' \rangle = 2k_0 (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (81)$$

Le procédé est typique. On réarrange l'ordre des opérateurs, à l'aide des relations de commutation, jusqu'à ce que les opérateurs de destruction agissent directement sur le vide $|0\rangle$ et que les opérateurs de création soient immédiatement suivis de $\langle 0|$, ce qui donne zéro, d'après (80).

De même :

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots, \vec{k}_n | \vec{k}'_1, \vec{k}'_2, \dots, \vec{k}'_m \rangle = \\ \delta_{nm} \left\{ \begin{aligned} &(2\pi)^3 2k_{10} \delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}'_1) (2\pi)^3 2k_{20} \delta^3(\vec{k}_2 - \vec{k}'_2) \dots \\ &+ (2\pi)^3 2k_{10} \delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}'_2) (2\pi)^3 2k_{20} \delta^3(\vec{k}_2 - \vec{k}'_1) \dots \\ &+ \dots \dots \end{aligned} \right. \quad (82) \end{aligned}$$

avec, en tout, $n!$ termes correspondant à toutes les façons possibles d'accoupler chaque variable primée avec une variable non primée.

Nous aurons à envisager des états résultant de superpositions de diverses configurations d'impulsions et divers nombres de particules, par exemple :

$$|\alpha\rangle = \sum_n \frac{1}{n!} \int \frac{d^3\vec{k}_1}{(2\pi)^3 2k_{10}} \dots \frac{d^3\vec{k}_n}{(2\pi)^3 2k_{n0}} f(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) |\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n\rangle. \quad (83)$$

Notez que nous aurions pu restreindre l'intégration sur $d^3\vec{k}_1 \cdots d^3\vec{k}_n$, car l'intégration sans restriction visite chaque état distinct $n!$ fois, à cause de (79). Mais il est préférable de spécifier que f est une fonction totalement symétrique,

$$f(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots) = f(\vec{k}_2, \vec{k}_1, \dots) \quad (84)$$

etc.,

et de compenser le comptage multiple en divisant par $n!$.

A l'aide de (82), on trouve la norme de $|\alpha\rangle$:

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = \sum_n \frac{1}{n!} \int \frac{d^3\vec{k}_1}{(2\pi)^3 2k_{10}} \cdots \frac{d^3\vec{k}_n}{(2\pi)^3 2k_{n0}} |f(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n)|^2. \quad (85)$$

Il faut que cette quantité soit égale à un pour que l'état soit correctement normalisé. En accord avec cette probabilité totale unité, nous pouvons, et nous ne nous en priverons pas, interpréter

$$\frac{d^3\vec{k}_1}{(2\pi)^3 2k_{10}} \cdots \frac{d^3\vec{k}_n}{(2\pi)^3 2k_{n0}} |f(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n)|^2 \quad (86)$$

comme la probabilité partielle, lorsque le système est dans l'état α , de trouver n particules dont les impulsions appartiennent aux régions spécifiées.

Notez que pour l'état (83), on a, d'après (82) :

$$f(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) = \langle \vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n | \alpha \rangle. \quad (87)$$

INTERACTION

Les particules de la section précédente n'ont pas d'interactions ; autrement dit elles sont libres. Leurs quadri-impulsions k_1, k_2, \dots , ne changent pas. L'état de Schrödinger qui a pour valeur initiale $a^+(\vec{k}_1) a^+(\vec{k}_2) \cdots |0\rangle$, à l'instant $t = 0$, ne dépend du temps que par un facteur de phase $e^{-i(k_{10} + k_{20} + \cdots)t}$, avec $k_{10} = \sqrt{m^2 + \vec{k}_1^2}$, etc.

Pour avoir interaction, il faut compliquer le lagrangien. Ajoutons par exemple à la densité lagrangienne (57), la *densité lagrangienne d'interaction* (ou *perturbation*) :

$$I(x) = \frac{g}{4!} (\phi(x))^4. \quad (88)$$

Il faut donc retrancher cette quantité de la densité hamiltonienne intégrande de (60). On obtient, au lieu de (58), l'équation du mouvement modifiée, maintenant non linéaire,

$$\left(\partial_\mu \partial_\mu - m^2 + \frac{g}{3!} \phi^2 \right) \phi = 0, \quad (89)$$

et, au lieu de (61),

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \Pi \\ \dot{\Pi} = \nabla^2 \phi - m^2 \phi + \frac{g}{3!} \phi^3. \end{cases} \quad (90)$$

Le champ ne peut plus s'écrire, pour tout t , sous la forme (64) avec des opérateurs a et a^+ constants. Mais, à un instant quelconque, disons $t = 0$, on peut utiliser ces équations pour définir des opérateurs a et a^+ , et un état vide, tels que :

$$a(\vec{k}) |0\rangle = 0. \quad (91)$$

Les états

$$a^+(\vec{k}_1) a^+(\vec{k}_2) \cdots |0\rangle \quad (92)$$

ne deviendront plus solutions de l'équation de Schrödinger sur simple multiplication par un facteur de phase. Etudions maintenant comment un état, ainsi spécifié à un instant initial, va en fait évoluer.

L'OPERATEUR S

Nous avons à résoudre l'équation de Schrödinger

$$\frac{d\Psi}{dt} = -i\mathcal{H}\Psi, \quad (93)$$

avec

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - \int d^3\vec{x} I(0, \vec{x}). \quad (94)$$

Notez que nous nous plaçons ici dans la représentation de Schrödinger, dont les opérateurs sont obtenus à partir des opérateurs de Heisenberg en posant $t = 0$. A l'aide de (62), on peut écrire les opérateurs de champ ϕ , ainsi que I , en termes d'opérateurs de création et d'annihilation. L'hamiltonien non perturbé ($g = 0$) a déjà été écrit sous cette forme en (66). On voit alors que l'évolution temporelle résultant de (93) peut être considérée comme un processus continu de destructions et créations de particules. La contribution de l'hamiltonien non perturbé (66) à ce processus est quasi triviale car la destruction d'une particule d'impulsion \vec{k} est alors immédiatement suivie de la re-création d'une particule de même impulsion. Il est commode de mettre de côté ce processus trivial en travaillant avec un nouveau vecteur d'état :

$$\Phi(t) = e^{i\mathcal{H}_0 t} \Psi(t). \quad (95)$$

Si I était nulle, Φ serait constant car, dans ce cas,

$$\Psi(t) = e^{-i\mathcal{H}_0 t} \Psi(0).$$

En général, on a, d'après (95) et (93),

$$\begin{aligned} i\dot{\Phi}(t) &= e^{i\mathcal{H}_0 t} (-\mathcal{H}_0 \Psi(t) + i\dot{\Psi}(t)) \\ &= -e^{i\mathcal{H}_0 t} \int d^3\vec{x} I(0, \vec{x}) \Psi(t), \end{aligned}$$

soit :

$$\dot{\Phi}(t) = \int d^3\vec{x} iI(x) \Phi(t), \quad (96)$$

où

$$I(x) = e^{i\mathcal{H}_0 t} I(0, \vec{x}) e^{-i\mathcal{H}_0 t} \quad (97)$$

n'est pas l'opérateur de Heisenberg *original*, car sa dépendance temporelle correspond à l'hamiltonien non perturbé. En recourant à (95) et (97), nous adoptons en fait une représentation intermédiaire entre celles de Heisenberg et de Schrödinger. Dans cette *représentation d'interaction*, nouvelle, la dépendance temporelle due à l'hamiltonien non perturbé est placée dans les opérateurs, tandis que l'évolution du vecteur d'état Φ n'est due qu'à la perturbation.

L'équation différentielle (96) peut se réécrire sous forme d'équation intégrale

$$\Phi(t) = \Phi(-\infty) + \int_{-\infty}^t d^4x' iI(x') \Phi(t'), \quad (98)$$

avec $d^4x' = dx'_0 dx'_1 dx'_2 dx'_3$, et où seules les bornes de l'intégration sur t' sont indiquées, les autres intégrales étant sans bornes.

On peut résoudre l'équation (98) en considérant I petit. A l'ordre zéro, on néglige totalement I , et Φ est constant : $\Phi(t) = \Phi(-\infty)$. Reportant cette approximation dans le deuxième membre de (98), on obtient une estimation améliorée :

$$\Phi(t) = \Phi(-\infty) + \int_{-\infty}^t d^4x' iI(x') \Phi(-\infty).$$

Introduisant celle-ci dans le deuxième membre de (98), les choses s'améliorent encore :

$$\Phi(t) = \Phi(-\infty) + \int_{-\infty}^t d^4x' iI(x') \Phi(-\infty) + \int_{-\infty}^t d^4x' \int_{-\infty}^{t'} d^4x'' iI(x') iI(x'') \Phi(-\infty).$$

Et ainsi de suite, on obtient à chaque étape un résultat dont la précision augmente d'une puissance supplémentaire de la constante de couplage g .

On trouve, de cette façon,

$$\Phi(\infty) = S \Phi(-\infty), \quad (99)$$

où l'opérateur S est défini, en théorie des perturbations, par une série de puissances de la constante de couplage g :

$$S = 1 + \int d^4x iI(x) + \int \int_{t_1 > t_2} d^4x_1 d^4x_2 iI(x_1) iI(x_2) + \dots \quad (100)$$

dont le terme général est de la forme

$$\int \int \dots \int_{t_1 > t_2 > \dots > t_n} d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n iI(x_1) iI(x_2) \dots iI(x_n), \quad (101)$$

et peut s'écrire, plus commodément,

$$\frac{1}{n!} \int \int \dots \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n T(iI(x_1), iI(x_2), \dots, iI(x_n)). \quad (102)$$

Par convention, le symbole d'ordination temporelle T signifie que les opérateurs agissent non pas dans l'ordre où ils sont écrits, mais dans l'ordre de leurs arguments temporels respectifs. Au cours de l'intégration sur toutes les valeurs des temps, chaque contribution intervient $n!$ fois, comptage multiple que l'on compense par l'intervention explicite du facteur $(n!)^{-1}$.

ELEMENTS DE MATRICE S

Nécessairement, l'opérateur S , comme I , est une combinaison d'opérateurs de création et de destruction. Lorsque l'état $\Phi(-\infty)$ est de la forme $|\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots\rangle = a^+(\vec{k}_1) a^+(\vec{k}_2) \dots |0\rangle$, alors $\Phi(+\infty) = S |\vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots\rangle$ est une superposition du type (83). L'amplitude f d'un état particulier $|\vec{k}'_1, \vec{k}'_2, \dots\rangle$ dans ladite superposition, vaut :

$$\begin{aligned} f(\vec{k}'_1, \vec{k}'_2, \dots) &= \langle \vec{k}'_1, \vec{k}'_2, \dots | S | \vec{k}_1, \vec{k}_2, \dots \rangle \\ &= \langle 0 | a(\vec{k}'_1) a(\vec{k}'_2) \dots S a^+(\vec{k}_1) a^+(\vec{k}_2) \dots | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (103)$$

Les règles systématiques permettant de calculer ces *éléments de matrice* S ont été établies par Feynman, Dyson, et Wick.

La contribution d'un terme particulier (102) dans l'expression (103) de l'élément de matrice S , est une intégrale dont l'intégrande est de la forme

$$\langle 0 | ABC \dots | 0 \rangle, \quad (104)$$

où chaque opérateur $A, B, \text{ etc.}$, est soit un opérateur de création ou de destruction, soit une combinaison linéaire (comme l'opérateur de champ Φ) d'opérateurs de création et de destruction.

Ecrivons A sous forme de combinaison :

$$A = A_+ + A_-, \quad (105)$$

où A_+ est une combinaison linéaire d'opérateurs de création, et A_- une combinaison d'opérateurs de destruction. Puisque

$$\langle 0 | A_+ = 0, \quad (106)$$

on peut laisser tomber A_+ dans (104). Et puisque

$$A_- |0\rangle = 0, \quad (107)$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle 0 | A_- B C \cdots |0\rangle &= \langle 0 | [A_-, B C \cdots] |0\rangle \\ &= \langle 0 | [A_-, B] C \cdots |0\rangle + \langle 0 | B [A_-, C] \cdots |0\rangle + \text{etc.} \end{aligned} \quad (108)$$

Mais $[A_-, B]$, somme de commutateurs d'opérateurs de création et de destruction, est un nombre. On peut donc écrire, au moyen de (107) puis (108),

$$\begin{aligned} [A_-, B] &= \langle 0 | [A_-, B] |0\rangle = \langle 0 | A_- B |0\rangle \\ &= \langle 0 | A B |0\rangle. \end{aligned} \quad (109)$$

Donc :

$$\langle 0 | A B C D \cdots |0\rangle = \langle 0 | A B |0\rangle \langle 0 | C D \cdots |0\rangle + \langle 0 | A C |0\rangle \langle 0 | B D \cdots |0\rangle + \text{etc.}$$

Dans l'expression $\langle 0 | C D \cdots |0\rangle$, on peut appliquer à C le traitement que l'on vient d'infliger à A , et ainsi de suite, jusqu'à exprimer le résultat entièrement en termes de valeurs moyennes dans le vide de produits de paires. Il advient donc que $\langle 0 | A B C D \cdots |0\rangle$ est égal à la somme des produits de valeurs moyennes des paires :

$$\langle 0 | A B |0\rangle \langle 0 | C D |0\rangle \cdots + \langle 0 | A C |0\rangle \langle 0 | B D |0\rangle \cdots + \cdots, \quad (110)$$

où la sommation s'étend à toutes les manières possibles d'accoupler les opérateurs, l'ordre au sein de chaque paire restant celui du produit original.

Remarquez que si les facteurs dans le produit original sont en nombre impair, alors le résultat est nul car notre procédé de réduction ci-dessus conduit finalement à prendre la valeur moyenne d'un seul opérateur, laquelle est nulle en vertu de (106) et (107).

Le résultat (110) constitue une partie du *théorème de Wick*.

Pour traiter du cas du champ scalaire ϕ , nous aurons besoin des valeurs moyennes de paires particulières :

$$\langle 0 | a(\vec{k}) \phi(x) |0\rangle = e^{-ikx} \quad (111)$$

$$\langle 0 | \phi(x) a^+(\vec{k}) |0\rangle = e^{ikx} \quad (112)$$

$$\langle 0 | \phi(x) \phi(y) |0\rangle = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} e^{ik(x-y)}, \quad (113)$$

en vertu de (64) et (81). En fait, nous aurons plutôt besoin du produit chronologiquement ordonné

$$T(\phi(x), \phi(y)) = \Theta(x_0 - y_0) \phi(x) \phi(y) + \Theta(y_0 - x_0) \phi(y) \phi(x).$$

Utilisant (113), on a

$$\langle 0 | T(\phi(x), \phi(y)) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \left(\Theta(x_0 - y_0) \frac{e^{-i\omega(x_0 - y_0)}}{2\omega} + \Theta(y_0 - x_0) \frac{e^{-i\omega(y_0 - x_0)}}{2\omega} \right), \quad (114)$$

avec

$$\omega = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2}. \quad (115)$$

Jusqu'à présent, nous avons noté cette quantité k_0 , mais nous allons maintenant avoir besoin de ce symbole pour un usage tout différent dans la représentation intégrale :

$$\Theta(t) e^{-i\omega t} = \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{i e^{-ik_0 t}}{k_0 - (\omega - i\epsilon)}, \quad (116)$$

où ϵ est petit, positif, et prend la valeur zéro après calcul de l'intégrale. Le deuxième membre de (114) devient, en utilisant (116),

$$\int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{dk_0}{2\pi} \left(\frac{i e^{ik(x-y)}}{k_0 - (\omega - i\epsilon)} + \frac{i e^{ik(y-x)}}{k_0 - (\omega - i\epsilon)} \right) \frac{1}{2\omega}, \quad (117)$$

soit finalement, en changeant le signe des variables d'intégration dans le deuxième terme :

$$\langle 0 | T(\phi(x), \phi(y)) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} \frac{1}{i((m - i\epsilon)^2 + k^2)}, \quad (118)$$

où $d^4 k = dk_0 dk_1 dk_2 dk_3$. La quantité (118) est appelée le propagateur du champ de méson scalaire.

LES GRAPHES DE FEYNMAN

Calculons par exemple l'amplitude de probabilité qu'un état initial de deux particules, d'impulsions \vec{k}_1 et \vec{k}_2 , finisse en deux particules, d'impulsions différentes \vec{k}'_1 et \vec{k}'_2 :

$$\langle \vec{k}'_1, \vec{k}'_2 | S - 1 | \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle. \quad (119)$$

En vertu de (100) et (103), le terme d'ordre le plus bas en g s'écrit

$$\frac{ig}{4!} \int d^4 x \langle 0 | a(\vec{k}'_1) a(\vec{k}'_2) \phi(x) \phi(x) \phi(x) \phi(x) a^+(\vec{k}_1) a^+(\vec{k}_2) | 0 \rangle. \quad (120)$$

D'après le théorème de Wick, la valeur moyenne dans le vide est une somme de produits de valeurs moyennes de paires dans le vide. Si les impulsions primées sont différentes des non primées, il est inutile de considérer les accouplements d'opérateurs de création et d'annihilation, car

$$\begin{aligned} \langle 0 | a(\vec{k}) a(\vec{k}') | 0 \rangle &= \langle 0 | a^+(\vec{k}) a^+(\vec{k}') | 0 \rangle = 0 \\ \langle 0 | a(\vec{k}) a^+(\vec{k}') | 0 \rangle &= (2\pi)^3 2\sqrt{m^2 + \vec{k}^2} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \end{aligned} \quad (121)$$

Chaque a ou a^+ doit donc être accouplé avec l'un des quatre ϕ . Il y a, pour cela, $4!$ façons contribuant chacune, d'après (111) et (112), pour le même produit de facteurs. Ainsi donc, (120) est égal à

$$ig \int d^4 x e^{i(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2)x} = ig (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2). \quad (122)$$

Remarquez que les transitions ne se produisent que vers des états de mêmes énergie et impulsion totales que l'état initial.


Nous verrons plus loin comment les éléments de matrice de $S - 1$ sont reliés aux sections efficaces différentielles.

Passant au second ordre en g , nous obtenons, d'après (100), une contribution à (119) :

$$\frac{1}{2!} \frac{ig}{4!} \frac{ig}{4!} \int d^4x d^4y \langle 0 | a(\vec{k}'_1) a(\vec{k}'_2) T(\phi^4(x), \phi^4(y)) a^+(\vec{k}_1) a^+(\vec{k}_2) | 0 \rangle. \quad (123)$$

On peut encore calculer la valeur moyenne dans le vide à l'aide du théorème de Wick. Mais il y a maintenant plusieurs combinaisons d'accouplements qui contribuent.

Ces diverses combinaisons se représentent commodément avec les *graphes de Feynman*. Par exemple, le graphe


(124)

indique l'accouplement des opérateurs de création initiaux avec deux opérateurs de champ ϕ de la même interaction (ou *vertex*), et l'accouplement des opérateurs d'annihilation finals avec deux ϕ de l'autre vertex, laissant deux ϕ en chaque vertex à coupler avec les deux ϕ de l'autre vertex. Il y a (4×3) façons d'accoupler les deux a^+ avec deux des quatre ϕ en un vertex. Il y a aussi (4×3) façons d'accoupler les deux a avec deux des quatre ϕ de l'autre vertex. Et pour chacune de ces $(4 \times 3)^2$ possibilités, il y a encore deux façons d'accoupler les ϕ restants. Enfin, les rôles des deux vertex sont interchangeable. Il y a donc en tout $(4!)^2$ contributions à (123), identiques, du type (124) :

$$\frac{1}{2} (ig)^2 \int d^4x d^4y e^{-i(k'_1+k'_2)x} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{i(m^2+p^2)} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{e^{iq(x-y)}}{i(m^2+q^2)} e^{i(k_1+k_2)y}. \quad (125)$$

L'intégration sur x et y dans (125) donne un facteur

$$(2\pi)^4 \delta^4(k'_1 + k'_2 - p - q) (2\pi)^4 \delta^4(p + q - k_1 - k_2). \quad (126)$$

De cette façon, on peut, en toute généralité, associer des quadri-impulsions (p_1, p_2, \dots) aux lignes internes des graphes de Feynman, comme (k_1, k_2, \dots) sont associées aux lignes externes. En toute généralité, les intégrations d'espace-temps impliquent la conservation de l'impulsion-énergie à chaque vertex, comme dans (126).

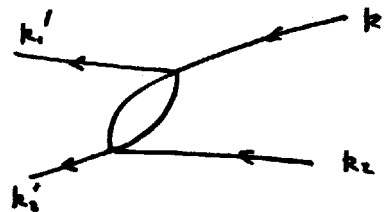
On peut réécrire le produit (126) sous la forme

$$(2\pi)^4 \delta^4(k'_1 + k'_2 - k_1 - k_2) (2\pi)^4 \delta(p + q - k_1 - k_2),$$

moyennant quoi la contribution (125) devient

$$\frac{1}{2} (ig)^2 (2\pi)^4 \delta^4(k'_1 + k'_2 - k_1 - k_2) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{i(m^2+p^2)} \frac{1}{i(m^2+(p-k_1-k_2)^2)}. \quad (127)$$


Remarquez qu'il y a plusieurs autres graphes de Feynman du même ordre que (124). Par exemple :


(128)

qui représente une configuration où les opérateurs de création initiaux sont accouplés à des ϕ en des vertex différents. La contribution correspondante se déduit de (127), moyennant la substitution

$$\begin{aligned} k_2 &\rightarrow -k'_1 \\ k'_1 &\rightarrow -k_2. \end{aligned} \quad (129)$$

Le diagramme restant de ce type,

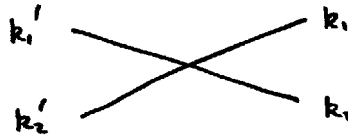


$$(130)$$

donne une contribution déduite de (127) par la substitution :

$$\begin{aligned} k_2 &\rightarrow -k'_2 \\ k'_2 &\rightarrow -k_2. \end{aligned} \quad (131)$$

Il existe une manière plus relâchée de parler des graphes de Feynman, commode si elle n'est pas prise trop au pied de la lettre. On peut dire que (124) représente un processus au cours duquel les particules initiales sont annihilées en un point donné, avec création, en ce même point, de deux particules intermédiaires (ou *virtuelles*), annihilées à leur tour en un autre point où les particules finales sont créées. On peut raconter des histoires semblables sur (128) et (130). Dans la contribution au premier ordre, (120) alias (122), les particules initiales sont annihilées, et les particules finales créées, au même point :



$$(132)$$

autrement dit, tous les ϕ en jeu ont le même argument.

Notez que dans nos graphes de Feynman, comme dans nos éléments de matrice, nous mettons les particules initiales à droite, et les particules finales à gauche. De nombreux auteurs adoptent cette disposition dans les éléments de matrice, et l'inverse dans les graphes. D'autres, embarrassés par ce renversement de convention, aussi total qu'arbitraire, transigent : ils mettent l'état initial au bas de leurs graphes, et l'état final en haut.

LA RENORMALISATION

D'après (122) et (127) :

$$\langle k'_1, k'_2 | S - 1 | k_1, k_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(k'_1 + k'_2 - k_1 - k_2) i\mathfrak{N}(k'_1, k'_2, k_1, k_2), \quad (133)$$

avec

$$\mathfrak{N} = g \left(1 + \frac{g}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(m^2 + p^2)} \frac{1}{i(m^2 + (k_1 + k_2 - p)^2)} + \dots \right). \quad (134)$$

Au vu de ce genre d'expression, il est clair que la relation entre l'amplitude de diffusion \mathfrak{N} et la constante de couplage g , telle qu'elle est définie jusqu'à présent, n'est guère évidente. Mais on peut redéfinir g en sorte que cette relation soit plus visible. Au lieu d'une interaction de la forme

$$\frac{g}{4!} \phi^4,$$

prenons plutôt :

$$\frac{g}{4!} (1 + Ag + Bg^2 + \dots) \phi^4 = \frac{g_0}{4!} \phi^4, \quad (135)$$

où A et B sont des constantes qui restent à choisir. Ceci n'est qu'une redéfinition du paramètre g , précédemment noté g et maintenant appelé g_0 . Nous pouvons parfaitement, si nous le souhaitons, choisir les constantes A, B, \dots , en sorte que la valeur de \mathfrak{N} , pour des impulsions choisies, soit entièrement donnée par le premier terme. Procédons ainsi à partir de $k_1 = k_2 = k'_1 = k'_2 = 0$. En fait, ce ne sont pas des valeurs physiques correspondant à des particules massives ; néanmoins, ce sont des valeurs où l'amplitude de diffusion physique peut être prolongée analytiquement. Posons donc :

$$\mathfrak{N}(0, 0, 0, 0) = g. \quad (136)$$

Remplaçons g par g_0 dans (134), et développons en puissances du nouveau g selon (135) :

$$\mathfrak{N} = g \left(1 + Ag + \frac{g}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(m^2 + p^2)} \frac{1}{i(m^2 + (p - k_1 - k_2)^2)} + \dots \right). \quad (137)$$

Alors, (136) entraîne

$$A = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{i(m^2 + p^2)^2} \quad (138)$$

et

$$\mathfrak{N} = g \left(1 + \frac{g}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{i(m^2 + p^2)} \left(\frac{1}{m^2 + (p - k_1 - k_2)^2} - \frac{1}{m^2 + p^2} \right) + \dots \right). \quad (139)$$

Non seulement on a maintenant un paramètre g plus proche de l'observable \mathfrak{N} , mais on bénéficie d'une prime : l'intégrale dans (139) est convergente alors que l'intégrale dans (134) était en fait divergente. Cette divergence a été repoussée dans la quantité A , dans (138), c'est-à-dire dans la définition de g_0 . De nouveau, nous sommes amenés à tolérer la présence dans le lagrangien de quantités infinies (ou qui croissent sans limite lorsqu'on repousse une borne) afin d'obtenir des grandeurs physiques finies.

L'étude des autres graphes nous conduirait à administrer le même traitement au terme de masse dans le lagrangien, à savoir remplacer $m^2 \phi^2$ par

$$(m^2 + A'g + B'g^2 + \dots) \phi^2 = m_0^2 \phi^2. \quad (140)$$

Nous trouverions que m peut endosser le rôle de masse physique, et annuler certaines divergences dans les expressions des grandeurs physiques, si l'on permet aux constantes A' , B' , etc. de prendre des valeurs infinies.

Les quantités m_0 et g_0 , autrement dit les coefficients résultants devant ϕ^2 et ϕ^4 dans le lagrangien, sont appelées respectivement masse et constante de couplage *nues*, ou *non renormalisées*. Les paramètres finis m et g sont appelés masse et constante de couplage *renormalisées*, ou *physiques*. Exprimée en termes de m et g , plutôt que m_0 et g_0 , la théorie ϕ^4 fournit des intégrales finies pour tous les éléments de matrice S à tous les ordres du développement perturbatif. On dit, dans ce cas, que la théorie est *renormalisable*.

Il est commode, à certaines fins, d'introduire un *opérateur de champ renormalisé* ϕ_r :

$$\begin{aligned} \phi &= Z^{1/2} \phi_r \\ Z^{1/2} &= 1 + A'''g + B'''g^2 + \dots \end{aligned} \quad (141)$$

Cela facilite les redéfinitions finies de quantités auxiliaires de la théorie, les divergences étant transférées aux coefficients A''', B''', \dots . On appelle ce procédé la *renormalisation de la fonction-d'onde*, et Z la *constante de renormalisation de la fonction-d'onde*.

Les termes supplémentaires introduits dans le lagrangien, mettant en jeu les divers coefficients $A, A', A''', \dots, B, B', B''', \dots$, etc., ne sont chacun que des multiples des termes originellement présents. On les nomme *contre-termes de renormalisation*. On ne s'y réfère en réalité, dans les calculs de perturbation, que pour la suppression des parties divergentes des intégrales de Feynman.

PROBABILITES DE TRANSITION ET SECTIONS EFFICACES

Les éléments de matrice S pour la diffusion de particules stables ont, en toute généralité, la forme déjà vue dans (133) :

$$\langle k'_1, k'_2, \dots | S - 1 | k_1, k_2, \dots \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(\sum k' - \sum k) i\mathfrak{N}(k'_1, k'_2, \dots, k_1, k_2, \dots), \quad (142)$$

où l'on trouve une fonction delta assurant la conservation de l'impulsion-énergie, et une amplitude invariante de Lorentz, \mathfrak{N} . Etudions maintenant l'interprétation de \mathfrak{N} en termes de probabilités de transition et de sections efficaces. Supposons encore, pour simplifier, qu'il n'y a que deux particules dans l'état initial, ainsi que dans l'état final.

Pour invoquer l'interprétation probabiliste, nous devons recourir à des états normalisables. Au lieu de spécifier des impulsions k_1 et k_2 bien définies, nous construisons donc l'état initial avec des paquets d'ondes normalisés :

$$\int \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2p_{10}} \int \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2p_{20}} f(\vec{p}_1) g(\vec{p}_2) |\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle, \quad (143)$$

où les fonctions f et g sont normalisées,

$$\int \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2p_{10}} |f(\vec{p}_1)|^2 = \int \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2p_{20}} |g(\vec{p}_2)|^2 = 1, \quad (144)$$

et ont une forme de pic aux alentours de \vec{k}_1 et \vec{k}_2 respectivement ; autrement dit, les valeurs d'impulsions qui contribuent effectivement sont donc $\vec{p}_1 \approx \vec{k}_1$ et $\vec{p}_2 \approx \vec{k}_2$. La probabilité que les impulsions finales soient dans l'élément $d^3 \vec{k}'_1 d^3 \vec{k}'_2$ vaut donc :

$$\begin{aligned} & \frac{d^3 \vec{k}'_1}{(2\pi)^3 2k'_{10}} \frac{d^3 \vec{k}'_2}{(2\pi)^3 2k'_{20}} \\ & \times \iiint \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2p_{10}} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2p_{20}} \frac{d^3 \vec{q}_1}{(2\pi)^3 2q_{10}} \frac{d^3 \vec{q}_2}{(2\pi)^3 2q_{20}} \\ & \times f^*(\vec{q}_1) g^*(\vec{q}_2) f(\vec{p}_1) g(\vec{p}_2) \mathfrak{N}^*(k'_1, k'_2, q_1, q_2) \mathfrak{N}(k'_1, k'_2, p_1, p_2) \\ & \times (2\pi)^4 \delta^4(k'_1 + k'_2 - q_1 - q_2) (2\pi)^4 \delta^4(k'_1 + k'_2 - p_1 - p_2). \end{aligned} \quad (145)$$

Grâce à la première fonction δ , la seconde peut être remplacée par $\delta^4(q_1 + q_2 - p_1 - p_2)$. Usant du fait que f et g sont des pics aux environs de \vec{k}_1 et \vec{k}_2 , l'ensemble de l'expression peut s'écrire

$$dP \times X, \quad (146)$$

avec :

$$dP = \frac{d^3 \vec{k}'_1}{(2\pi)^3 2k'_{10}} \frac{d^3 \vec{k}'_2}{(2\pi)^3 2k'_{20}} (2\pi)^4 \delta^4(k'_1 + k'_2 - k_1 - k_2) \left| \mathfrak{N}(k'_1, k'_2, k_1, k_2) \right|^2, \quad (147)$$

$$\begin{aligned} X = & \iiint \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2p_{10}} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2p_{20}} \frac{d^3 \vec{q}_1}{(2\pi)^3 2q_{10}} \frac{d^3 \vec{q}_2}{(2\pi)^3 2q_{20}} \\ & \times f^*(\vec{q}_1) g^*(\vec{q}_2) f(\vec{p}_1) g(\vec{p}_2) (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - p_1 - p_2). \end{aligned} \quad (148)$$

Mais X a une interprétation simple en termes d'ondes de de Broglie spatio-temporelles des paquets d'ondes donnés :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \int \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 2p_{10}} f(\vec{p}_1) e^{ip_1 x} \\ \tilde{g}(x) &= \int \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 2p_{20}} g(\vec{p}_2) e^{ip_2 x}. \end{aligned} \quad (149)$$

Utilisant celles-ci, ainsi que leurs conjuguées

$$\begin{aligned}\tilde{f}^*(x) &= \int \frac{d^3 \tilde{q}_1}{(2\pi)^3 2q_{10}} f^*(\tilde{q}_1) e^{-iq_1 x} \\ \tilde{g}^*(x) &= \int \frac{d^3 \tilde{q}_2}{(2\pi)^3 2q_{20}} g^*(\tilde{q}_2) e^{-iq_2 x},\end{aligned}\tag{150}$$

pour calculer l'intégrale de recouvrement

$$\int d^4 x |\tilde{f}|^2 |\tilde{g}|^2,\tag{151}$$

on trouve que cette dernière vaut précisément X . Donc X mesure le recouvrement des paquets d'ondes dans l'espace-temps, recouvrement nécessaire pour qu'une interaction à courte portée donne lieu à diffusion.

Nous n'avons encore rien dit à propos des normes de \tilde{f} et \tilde{g} . D'après un théorème standard d'analyse de Fourier, on a

$$\begin{aligned}\int d^3 \tilde{x} |\tilde{f}(\tilde{x}, t)|^2 &= \int \frac{d^3 \tilde{p}_1}{(2\pi)^3} \left| \frac{f(\tilde{p}_1)}{2p_{10}} \right|^2 \\ &\approx \frac{1}{2k_{10}},\end{aligned}\tag{152}$$

en utilisant la normalisation (144), et la valeur approchée $(2k_{10})^{-1}$ pour le facteur $(2p_{10})^{-1}$ dans l'intégrande. Pour des paquets d'ondes planes étendus, ou très pointus dans l'espace des impulsions, on peut donc interpréter la quantité $2k_{10} |\tilde{f}(\tilde{x}, t)|^2$ comme une densité de probabilité de position \tilde{x} , à l'instant t . De même pour la quantité $2k_{20} |\tilde{g}(\tilde{x}, t)|^2$ relative à la deuxième particule.

On peut alors réexprimer le résultat (146) sous la forme suivante : la probabilité de transition, par unité de volume et par unité de temps, au pavé spécifié de l'espace des impulsions finales, vaut

$$dP \frac{\rho_1}{2k_{10}} \frac{\rho_2}{2k_{20}},\tag{153}$$

où ρ_1 et ρ_2 sont les densités de probabilité respectives des deux particules au point de l'espace en question, à l'instant donné.

Ce résultat concerne d'abord un système de deux particules, et non un système de deux faisceaux, ou un faisceau incident sur une cible matérielle. Mais dans la mesure où faisceaux et matériaux sont assez dilués pour que les effets à N -corps soient négligeables, on obtient le résultat désiré par simple multiplication. En ce sens, dP donné par (147) est le taux de transition, par unité de volume et par unité de temps, pour des faisceaux concourants de $2k_{10}$ et $2k_{20}$ particules par unité de volume respectivement. La même quantité, exprimée en fonction d'une section efficace différentielle, s'écrit :

$$dP = d\sigma |\tilde{v}_1 - \tilde{v}_2| (2k_{10}) (2k_{20}),\tag{154}$$

pour des faisceaux dont les vitesses sont respectivement \tilde{v}_1 et \tilde{v}_2 . On peut ainsi exprimer la section efficace différentielle en fonction de l'élément de matrice. Nous nous sommes contentés de considérer le cas de deux particules dans l'état initial et deux particules dans l'état final. Mais c'est un résultat tout à fait général. Avec N faisceaux concourants, chacun de $2k_{n0}$ particules par unité de volume, $n = 1, \dots, N$, la probabilité de transition, par unité de volume et par unité de temps, aux impulsions spécifiées, k'_1, \dots, k'_M , vaut :

$$dP = \prod_{m=1}^M \frac{d^3 \tilde{k}'_m}{(2\pi)^3 2k_{m0}} (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_1^M k'_m - \sum_1^N k_n \right) \left| \mathfrak{M}(k'_1, \dots, k'_M, k_1, \dots, k_M) \right|^2.\tag{155}$$

Cette formule convient même s'il n'y a qu'une particule dans l'état initial — c'est-à-dire dans le cas de la désintégration d'une particule instable —, dans la mesure où le calcul est limité à l'ordre le plus bas de l'interaction désintégratrice. Dans ce cas, bien sûr, les particules finales sont différentes de, et plus légères que, la particule initiale. A partir du taux de transition dP , par unité de volume et par unité de temps, d'un faisceau de $2k_0$ particules par unité de volume, on obtient le taux total de désintégration par particule :

$$\Gamma = \frac{1}{2k_0} \sum \int dP, \quad (156)$$

avec intégration sur les impulsions finales, et sommation sur les voies finales.

Dans le cas de la désintégration d'une particule instable, la formule (146) présente une particularité car :

$$\begin{aligned} X &= \int d^4x |\tilde{f}(x)|^2 \\ &\approx \int dt (2k_{10})^{-1} \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Cela signifie que le paquet d'ondes de l'unique particule n'a pas besoin de recouvrir quoi que ce soit pour que la désintégration se produise. A l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations, les effets rétroactifs de diminution de l'amplitude de l'état initial ne sont pas pris en compte, en sorte que le processus semble continuer indéfiniment. Pour inclure ces effets, il faut modifier (dans le cas d'une particule instable) non seulement l'amplitude \mathcal{N} dans (155), mais le facteur de conservation de l'impulsion-énergie. Pour Γ petit, et dans le repère du centre de masse, la fonction delta conservatrice de l'énergie est remplacée par le facteur de Breit-Wigner-Weisskopf :

$$2\pi \delta(E - E') \rightarrow \frac{\Gamma e^{-\Gamma t}}{(E' - E)^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad (157)$$

où t est le temps écoulé depuis la création de la particule instable.

LE CHAMP VECTORIEL

Envisageons maintenant un champ de quadrivecteurs de Lorentz :

$$A_\mu = (A_1, A_2, A_3, A_4 = iA_0), \quad (158)$$

où, au stade classique, A_1, A_2, A_3 , et A_0 , sont réels. La densité lagrangienne invariante de Lorentz non triviale, la plus simple, est

$$L = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\mu A_\nu) - \frac{1}{2}m^2 A_\nu A_\nu, \quad (159)$$

avec sommations sur μ et ν . A première vue, ce n'est qu'une somme de quatre contributions du type (57), une pour chaque composante. Mais comme A_4 est imaginaire, la quatrième contribution intervient avec un signe opposé aux autres, et l'énergie associée est négative. Il faut donc s'attendre à des ennuis lorsque, au cours de l'élaboration de la théorie quantique, on postule l'existence d'un état d'énergie fondamental (vide). Continuons néanmoins, avec l'espoir de parvenir à surmonter ces problèmes.

Le conjugué canonique de A_μ est

$$\Pi_\mu = \dot{A}_\mu, \quad (160)$$

et nous disposons du commutateur aux temps égaux correspondant :

$$[A_\mu(t, \vec{x}), \Pi_\nu(t, \vec{y})] = i \delta_{\mu\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{y}). \quad (161)$$

Essayons à nouveau une décomposition en opérateurs de création et de destruction :

$$A_\mu = \sum_s \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \left(a(\vec{k}, s) u_\mu(\vec{k}, s) e^{ikx} + a^+(\vec{k}, s) u_\mu(-\vec{k}, s) e^{-ikx} \right) \quad (162)$$

$$\Pi_\mu = \sum_s \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 2k_0} \left(\frac{k_0}{i} \right) \left(a(\vec{k}, s) u_\mu(\vec{k}, s) e^{ikx} - a^+(\vec{k}, s) u_\mu(-\vec{k}, s) e^{-ikx} \right). \quad (163)$$

Les $u(\vec{k}, s)$ ($s = 1, 2, 3, 4$) sont des ensembles de quatre quadrivecteurs constants, choisis pour convenance. Prenons, pour $\vec{k} = 0$,

$$\begin{aligned} u(1) &= (1, 0, 0, 0) \\ u(2) &= (0, 1, 0, 0) \\ u(3) &= (0, 0, 1, 0) \\ u(4) &= (0, 0, 0, i) \end{aligned} \quad (164)$$

à partir desquels nous obtenons des vecteurs associés à $\vec{k} \neq 0$, par le truchement de la transformation de Lorentz qui fait passer de l'impulsion au repos $(0, 0, 0, im)$ à l'impulsion voulue (k_1, k_2, k_3, k_4) . Remarquez que l'on a ainsi $u(-\vec{k}, s) = u(\vec{k}, s)$. Notez également que

$$\sum_s g(s) u_\mu(\vec{k}, s) u_\nu(\vec{k}, s) = \delta_{\mu\nu}, \quad (165)$$

avec $g(1) = g(2) = g(3) = -g(4) = +1$, identité que l'on peut vérifier explicitement à l'aide de (164), et qui est préservée lors des transformations de Lorentz. Alors, (160) est une conséquence de (162) et (163), si

$$\left[\sum_s a(\vec{k}, s) u_\mu(\vec{k}, s), \sum_{s'} a^+(\vec{k}', s') u_\nu(\vec{k}', s') \right] = \delta_{\mu\nu},$$

ou, avec (165), si :

$$\left[a(\vec{k}, s), a^+(\vec{k}', s') \right] = g(s) (2\pi)^3 2k_0 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{ss'}. \quad (166)$$

Les ennuis redoutés se manifestent maintenant, pour $s = 4$:

$$\left[a(\vec{k}, 4), a^+(\vec{k}', 4) \right] = -\delta^3(\vec{k} - \vec{k}') (2\pi)^3 2k_0.$$

Si nous supposons l'existence d'un état fondamental vide, avec la propriété $a(\vec{k}, 4)|0\rangle = 0$, on a alors :

$$\langle 0|a(\vec{k}, 4) a^+(\vec{k}', 4)|0\rangle = -(2\pi)^3 2k_0 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (167)$$

Cela entraîne que le paquet d'ondes

$$\int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} f(\vec{p}) a^+(\vec{p}, 4)|0\rangle$$

a une norme négative :

$$-\int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} |f(\vec{p})|^2. \quad (168)$$

Nous nous sommes donc, d'une certaine façon, écartés du sentier de la mécanique quantique ordinaire. Peut-être ne devrions nous plus parler de conjugaison *hermitique* à propos de l'opération $a = a^+$, et de la règle correspondante pour le produit :

$$(AB)^+ = B^+A^+. \quad (170)$$

Et pourtant, les valeurs moyennes d'un opérateur autoconjugué dans cette nouvelle acception, sont réelles. Un hamiltonien autoconjugué dans ce sens conserve la norme définie par généralisation de (167) aux états à plusieurs particules. Il n'y a donc d'autre difficulté que l'apparition d'états de norme négative — qui compliquent l'interprétation probabiliste. Mais il se trouve que pour certaines formes d'interaction, les éléments de matrice S vers, ou depuis, des états contenant des quanta du quatrième type, non physiques, sont tout simplement nuls. Les normes négatives ne se manifestent donc pas dans les probabilités de transition qui constituent l'interprétation des éléments de matrice S ; pour ce qui est de la matrice S tout au moins, il n'y a donc aucun problème.

Comment cela se produit-il? Il faut écrire les ingrédients de base des règles de Feynman pertinentes, les valeurs des paires dans le vide calculées à l'aide de (162) :

$$\langle 0|T(A_\mu(x), A_\nu(y))|0\rangle = \frac{1}{i} \frac{\delta_{\mu\nu}}{(m - i\epsilon)^2 + k^2} \quad (171)$$

$$\langle 0|A_\mu(x) a^+(\vec{k}, s)|0\rangle = g(s) u_\mu(\vec{k}, s) \quad (172)$$

$$\langle 0|a(\vec{k}, s) A_\mu(x)|0\rangle = g(s) u_\mu(-\vec{k}, s). \quad (173)$$

Notez en particulier qu'il y a une fonction-d'onde de spin u pour chaque particule initiale ou finale, en sorte que l'élément de matrice de diffusion

$$\mathfrak{N} \left(\begin{matrix} k'_1, k'_2, \dots \\ s'_1, s'_2, \dots \end{matrix} \right)$$

est de la forme

$$u_\mu(k'_1, s'_1) u_\nu(k'_2, s'_2) \cdots \mathfrak{N}_{\mu\nu\dots}(k'_1, k'_2, \dots). \quad (174)$$

Une condition suffisante pour que les éléments de matrice dans lesquels interviennent des quanta non physiques soient nuls est donc que :

$$\begin{aligned} k'_{1\mu} \mathfrak{N}_{\mu\nu\dots} &= 0 \\ k'_{2\nu} \mathfrak{N}_{\mu\nu\dots} &= 0 \\ &\text{etc.} \end{aligned} \quad (175)$$

Ces équations sont des cas particuliers d'identités dites «de Ward-Takahashi». Elles sont valides lorsque l'interaction satisfait ce que l'on appelle l'«invariance de jauge». L'électrodynamique quantique (qui implique, en temps voulu, la limite $m \rightarrow 0$) peut être formulée de cette manière. Vous entendrez parler par ailleurs de l'invariance de jauge généralisée dont jouissent les modernes théories de champs unifiées.

Il existe une autre façon de neutraliser les quanta du quatrième type, non physiques. On peut les alourdir, en sorte que la conservation de l'énergie empêche leur production par les particules ordinaires aux énergies ordinaires. Il faut pour cela modifier le lagrangien (159). On connaît, en fait, d'autres invariants bilinéaires que l'on pouvait ajouter à celui-ci : $(\partial_\mu A_\nu)(\partial_\nu A_\mu)$ et $(\partial_\mu A_\mu)(\partial_\nu A_\nu)$. En réalité, ces quantités apportent des contributions égales à l'intégrale d'action, comme le montre une intégration par parties, et il suffit donc de n'en considérer qu'une. Ajoutons à (159) le terme :

$$-\frac{1}{2}\alpha (\partial_\mu A_\mu)^2. \quad (176)$$

Les équations du mouvement de Lagrange deviennent :

$$(\partial_\mu \partial_\mu - m^2)A_\nu + \alpha \partial_\nu \partial_\mu A_\mu = 0. \quad (177)$$

Pour des solutions en ondes planes, requises pour écrire (162), on doit donc avoir :

$$(k^2 + m^2)u_\nu + \alpha k_\nu k_\mu u_\mu = 0. \quad (178)$$

Puisque $k_\mu u_\mu = 0$ dans les cas $s = 1, 2$ ou 3 (conséquence immédiate de (164) lorsque $\vec{k} = 0$, et plus généralement à cause de l'invariance de Lorentz de $k_\mu u_\mu$), on a :

$$k^2 + m^2 = 0$$

$$k_0 = \sqrt{m^2 + \vec{k}^2},$$

comme auparavant. Mais dans le cas $s = 4$, puisque $u_\mu \propto k_\mu$, on a :

$$(1 + \alpha)k^2 + m^2 = 0$$

$$k_0 = \sqrt{\frac{m^2}{1 + \alpha} + \vec{k}^2}. \quad (179)$$

La masse des quanta non physiques vaut donc $m/\sqrt{1 + \alpha}$, et peut être rendue arbitrairement grande à la limite $\alpha \rightarrow -1$.

Après intégration par parties, le lagrangien (159), additionné de (176), est équivalent à :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} \partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{4} \partial_\mu A_\nu \partial_\nu A_\mu \\ & + \frac{1}{4} \partial_\mu A_\nu \partial_\nu A_\mu + \frac{1}{4} \partial_\nu A_\mu \partial_\mu A_\nu \\ & - \frac{1}{2}(\alpha + 1)(\partial_\mu A_\mu)^2 - m^2 A_\mu^2 = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2} m^2 A_\mu^2 - \frac{1}{2}(\alpha + 1)(\partial_\mu A_\mu)^2. \end{aligned} \quad (180)$$

Lorsque $\alpha = -1$, c'est la forme standard de la densité lagrangienne d'un méson vectoriel massif.

D'après (162) et (179), le propagateur est maintenant

$$\begin{aligned} \langle 0 | T(A_\mu(x) A_\nu(y)) | 0 \rangle = \\ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} \frac{1}{i} \left(\frac{\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2}{(m - i\epsilon)^2 + k^2} + \frac{k_\mu k_\nu / k^2}{(m - i\epsilon)^2 + (1 + \alpha)k^2} \right). \end{aligned} \quad (181)$$

Lorsque $\alpha = -1$, sa transformée de Fourier prend la forme standard du méson vectoriel massif :

$$\frac{\delta_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / m^2}{(m - i\epsilon)^2 + k^2}. \quad (182)$$

Bien que (182) soit débarrassé des ennuis de normes négatives, il y a un autre problème. Le propagateur ne décroît pas lorsque k est grand. Les intégrales associées aux boucles dans les graphes de Feynman divergent donc gravement, et il s'ensuit généralement des divergences qui subsistent après renormalisation. Ce genre de théorie est dit «non renormalisable». Toutefois, dans les théories suffisamment invariantes de jauge, les termes d'aspect menaçant ($k_\mu k_\nu / m^2$) peuvent, en vertu des identités de Ward-Takahashi généralisées, être mis sous des formes moins dangereuses. On a effectivement construit, ces dernières années, des théories renormalisables avec des mésons vectoriels.

Nous venons de voir, pour $\alpha = 0$ et $\alpha = -1$, des théories de mésons vectoriels apparemment *différentes*. Dans ces deux cas, nous avons identifié des difficultés, et signalé la possibilité de les résoudre avec des interactions invariantes de jauge. Plus tard, nous verrons aussi qu'avec suffisamment d'invariance de jauge, on n'a pas là, en fait, deux théories différentes mais des formulations différentes de la même théorie. On peut alors faire appel à l'une des versions lorsqu'on veut mettre en évidence la renormalisabilité, et à l'autre quand on veut montrer l'absence de problème lié aux normes négatives.

VIDE NU ET VIDE REEL

L'état dénommé jusqu'à présent «vide», et noté $|0\rangle$, sera appelé dorénavant vide «nu». C'est un état propre de la seule partie libre de l'hamiltonien :

$$\mathcal{H}_0 |0\rangle = 0. \quad (183)$$

Nous allons bientôt avoir besoin du concept de vide «réel», à savoir l'état fondamental $|\underline{0}\rangle$ du système en interaction :

$$\mathcal{H} |\underline{0}\rangle = 0. \quad (184)$$

Nous supposons ici que vide nu et vide réel ont tous deux une énergie nulle. Si nécessaire, on introduit un contre-terme trivial, un c-nombre, dans \mathcal{H} pour supprimer tout décalage d'énergie.

Les deux états, $|0\rangle$ et $|\underline{0}\rangle$, sont commodément reliés l'un à l'autre au moyen de l'«hypothèse adiabatique». Selon cette hypothèse, si la constante de couplage varie lentement en fonction du temps, l'état fondamental associé à la valeur initiale de g évolue de concert vers l'état fondamental associé à la valeur finale. Il est commode de travailler dans la représentation d'interaction :

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = -i \mathcal{H}_I(t) \Phi(t), \quad (185)$$

avec

$$\mathcal{H}_I(t) = - \int d^3\vec{x} I(x), \quad (186)$$

et la constante de couplage dans I assujettie au branchement adiabatique

$$g \longrightarrow g e^{-\alpha|t|}, \quad (187)$$

avec α petit. La solution itérative de (185) peut s'écrire formellement :

$$\Phi(t_2) = \mathbb{T} e^{-i \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{H}_I(t)} \Phi(t_1). \quad (189)$$

L'hypothèse adiabatique implique alors, en particulier,

$$|\underline{0}\rangle = \mathbb{T} e^{-i \int_{-\infty}^0 dt \mathcal{H}_I(t)} |0\rangle, \quad (190)$$

dans la limite $\alpha \rightarrow 0$. On peut vérifier explicitement en théorie des perturbations que, dans cette limite, (184) résulte bien de (183) et (190).

De la même manière, la solution itérative de la conjuguée de (185) conduit à

$$\Phi^+(t_1) = \Phi^+(t_2) \mathbb{T} e^{-i \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{H}_I(t)}, \quad (191)$$

d'où, par hypothèse adiabatique,

$$\langle \underline{0} | = \langle 0 | \mathbb{T} e^{-i \int_0^{\infty} dt \mathcal{H}_I(t)}. \quad (192)$$

Ce résultat peut lui aussi être confirmé explicitement par développement perturbatif.

Semblable à cette distinction entre vides «nu» et «réel», existe une distinction entre états de particule «nus» et «réels». Jusqu'à présent, nos éléments de matrice S relient des états de particules nus, construits par applications d'opérateurs de création et d'annihilation nus au vide nu. Mais, par extension de l'hypothèse adiabatique, ces mêmes éléments de matrice, dans la mesure où les limites $t \rightarrow \pm\infty$ dans les intégrales

sont soigneusement définies par branchement adiabatique, conviennent pour les états de particules réels correspondants. On suppose qu'avec ce branchement se produisant surtout avant et après le recouvrement des paquets d'ondes, les états réels sont d'abord engendrés par les états nus et finissent par dégénérer en états nus.

Il n'y a qu'un endroit où ces limites $t \rightarrow \pm\infty$ s'avèrent délicates en pratique. C'est lorsqu'on a affaire à des graphes de Feynman avec «insertions dans les lignes externes». Considérons un graphe du genre



dans lequel les globules représentent des sous-structures arbitrairement compliquées. On peut considérer que ce graphe est engendré par un graphe de base



avec insertion d'une sous-structure dans une ligne externe. A la ligne interne figurant dans (193) est associé un facteur

$$(i(m^2 + k^2))^{-1}, \quad (195)$$

où, par conservation, k est la quadri-impulsion de la ligne externe. Mais, comme les lignes externes se rapportent à des particules réelles, on a $m^2 + k^2 = 0$, et (195) est infini. Une renormalisation correcte de la masse engendre en réalité un zéro dans le facteur associé au globule inséré, et il reste à interpréter $(0/0)$. C'est à ce stade qu'il faut réexaminer le passage désinvolte aux limites $t \rightarrow \pm\infty$ dans les intégrales. Un branchement adiabatique soigneux conduit à la prescription qui suit. L'effet de toutes les insertions possibles dans une ligne externe se réduit à une multiplication de la contribution du graphe irréductible de base par un facteur $Z^{1/2}$, où Z est une constante caractéristique de la particule à laquelle se rapporte la ligne en question. Cette constante Z est en fait la «constante de renormalisation de la fonction-d'onde» mentionnée plus haut.

LES FONCTIONS DE GREEN

Etroitement reliées aux éléments de matrice S , et souvent plus commodes pour les développements théoriques, nous avons ce qu'on nomme les «fonctions de Green». Ce sont les valeurs moyennes, dans le vide, des produits ordonnés des opérateurs de champ de Heisenberg. Pour un champ vectoriel, par exemple,

$$G_{\mu\nu\dots}(x, y, \dots) = \langle \underline{0} | T(\underline{A}_\mu(x) \underline{A}_\nu(y) \dots) | \underline{0} \rangle. \quad (196)$$

Ici, nous soulignons les champs, et le vide, pour les distinguer des champs libres (ou en représentation d'interaction), et du vide nu, dont nous allons bientôt avoir besoin.

La relation entre opérateurs en représentations de Heisenberg et d'interaction est dictée par la condition que leurs éléments de matrice, dans les états $\Phi(0)$ et $\Phi(t)$ respectivement, soient égaux. D'après la relation entre états (189), on a :

$$\underline{A}_\mu(x) = \left(T e^{-i \int_0^t dt' \mathcal{H}_I(t')} \right)^+ A_\mu(x) \left(T e^{-i \int_0^t dt' \mathcal{H}_I(t')} \right). \quad (197)$$

Mais on peut démontrer la relation d'unitarité

$$\left(\mathbb{T} e^{-i \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{H}_I(t)} \right)^+ = \left(\mathbb{T} e^{-i \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{H}_I(t)} \right)^{-1}, \quad (198)$$

d'où :

$$\underline{A}_\mu(x) = \left(\mathbb{T} e^{-i \int_0^t dt' \mathcal{H}_I(t')} \right)^{-1} A_\mu(x) \left(\mathbb{T} e^{-i \int_0^t dt' \mathcal{H}_I(t')} \right). \quad (199)$$

Utilisant alors les formules (190) et (192), donnant le vide réel en fonction du vide nu, et des relations du genre

$$\mathbb{T} e^{-i \int_{t_1}^{t_3} dt \mathcal{H}_I(t)} = \left(\mathbb{T} e^{-i \int_{t_2}^{t_3} dt \mathcal{H}_I(t)} \right) \left(\mathbb{T} e^{-i \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{H}_I(t)} \right), \quad (200)$$

on trouve :

$$G_{\mu\nu\dots}(x, y, \dots) = \langle 0 | \mathbb{T} \left(e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathcal{H}_I(t)} A_\mu(x) A_\nu(y) \dots \right) | 0 \rangle. \quad (201)$$

Grâce à (201), on peut mettre au point un développement en graphes de Feynman pour les fonctions de Green. Les graphes sont précisément ceux des éléments de matrice S , si ce n'est que les lignes externes se rapportent maintenant à des accouplements d'opérateurs de champ $A_\mu(x)$, $A_\nu(y)$, ..., au lieu d'opérateurs de création et d'annihilation a^+ et a . On obtient finalement les éléments de matrice S à l'aide des transformées de Fourier des fonctions de Green :

$$\tilde{G}_{\mu\nu\dots}(k_1, k_2, \dots) = \int d^4x d^4y \dots e^{ik_1x} e^{ik_2y} \dots G_{\mu\nu\dots}(x, y, \dots). \quad (202)$$

La règle exacte consiste à extraire de $\tilde{G}_{\mu\nu\dots}$ un facteur

$$\left(i Z^{1/2} (m^2 + k^2) \right)^{-1} \quad (203)$$

pour chaque ligne externe, puis à remplacer k par la quadri-impulsion (ou son opposée) de la particule correspondante s'il s'agit d'une particule initiale (ou finale), et enfin à contracter les indices tensoriels μ, ν, \dots , avec les fonctions-d'onde appropriées u_μ, u_ν, \dots

INTEGRALES FONCTIONNELLES

Considérons le quotient d'intégrales simples, ordinaires,

$$\frac{\int dx e^{-\frac{1}{2}\epsilon x^2} x^n}{\int dx e^{-\frac{1}{2}\epsilon x^2}},$$

où ϵ peut être complexe à partie réelle positive. Cette expression est nulle pour n impair, tandis que pour n pair, elle vaut

$$\epsilon^{1/2} \left(-2 \frac{d}{d\epsilon} \right)^{n/2} \epsilon^{-1/2} = \epsilon^{-n/2} 1 \times 3 \times \dots (n-1). \quad (204)$$

Mais $1 \times 3 \times \dots (n-1)$ n'est autre que le nombre de façons de disposer n objets par couples. Le reste s'ensuit. Soit A, B, \dots , des puissances de x , et définissons une valeur moyenne

$$\frac{ABC\dots}{ABC\dots} = \frac{\int dx e^{-\frac{1}{2}\epsilon x^2} ABC\dots}{\int dx e^{-\frac{1}{2}\epsilon x^2}}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \overline{ABC \dots} &= \overline{AB} \overline{CD} \dots \\ &+ \overline{AC} \overline{BD} \dots \\ &+ \overline{AD} \overline{BC} \dots \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (205)$$

où chaque monôme est un produit de valeurs moyennes de paires, et où la somme est étendue à tous les accouplements possibles. Plus généralement, soit A, B, C, \dots , des combinaisons linéaires des variables x_1, x_2, \dots , et

$$\overline{ABC \dots} = \frac{\int \prod dx e^{-\frac{1}{2} \sum \epsilon_n x_n^2} ABC \dots}{\int \prod dx e^{-\frac{1}{2} \sum \epsilon_n x_n^2}}. \quad (206)$$

On a encore la propriété (205); il suffit de remarquer que $\overline{x_n x_m} = 0$, pour $n \neq m$, puis que les variables se séparent.

Le résultat (205) évoque le théorème de Wick et suggère de représenter les valeurs moyennes des produits d'opérateurs de champ par ce genre d'intégrales. Toutefois, le champ $\phi(x)$ a un nombre infini de degrés de liberté, un en chaque point de l'espace-temps. Il faut donc recourir à des sommes continues, multiples, les *intégrales fonctionnelles*. Pour des champs libres, on trouve que

$$\langle 0 | T(\phi(x) \phi(y) \dots) | 0 \rangle = \frac{\int \prod d\phi e^{iA_0} \phi(x) \phi(y) \dots}{\int \prod d\phi e^{iA_0}}, \quad (207)$$

où A_0 est l'action. Grâce à (205), il suffit de chercher confirmation de cette expression pour une paire de champs.

Vérifions que, pour des champs libres,

$$\langle 0 | T(\phi(x) \phi(y)) | 0 \rangle = \frac{\int \prod d\phi e^{iA_0(\phi)} \phi(x) \phi(y)}{\int \prod d\phi e^{iA_0(\phi)}}, \quad (208)$$

où ϕ est une fonction de (x) , A_0 est l'action correspondante,

$$A_0 = -\frac{1}{2} \int d^3 \vec{x} dx_0 \left((m - i\epsilon)^2 \phi^2 + (\partial_\mu \phi)^2 \right),$$

et l'intégration est étendue à «tous les ϕ possibles», c'est-à-dire à «toutes les valeurs de ϕ en tous points x ». Pour préciser un peu plus cette notion, plaçons-nous dans un très grand hypercube de l'espace-temps, de côté L , et imposons au champ ϕ des conditions périodiques. Ledit champ peut alors être représenté par une série de Fourier

$$\phi(x) = L^{-4} \sum_k \tilde{\Phi}(k) e^{ikx}, \quad (209)$$

avec

$$\tilde{\Phi}(-k) = (\tilde{\Phi}(k))^*. \quad (210)$$

Choisissons la signification

$$\prod d\phi \equiv \prod'_k d(\Re \tilde{\Phi}(k)) d(\Im \tilde{\Phi}(k)), \quad (211)$$

où le prime indique qu'il ne faut pas prendre à la fois les valeurs k et $-k$. Remarquez que

$$\begin{aligned} A_0(\phi) &= -\frac{1}{2}L^{-4} \sum_k \tilde{\phi}(k) ((m - i\epsilon)^2 + k^2) \tilde{\phi}(-k) \\ &= -\frac{1}{2}L^{-4} \sum_k \tilde{\phi}(k) ((m - i\epsilon)^2 + k^2) \tilde{\phi}^*(k), \end{aligned} \quad (212)$$

et que

$$\phi(x) \phi(y) = L^{-8} \sum_p \sum_q e^{ipx+iqy} \tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(q). \quad (213)$$

Evidemment, $\overline{\tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(q)} = 0$ si $p \neq -q$, et

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{\phi}(p) \tilde{\phi}(-p)} &= \frac{\int d\mathfrak{R}e \tilde{\phi}(p) d\mathfrak{I}m \tilde{\phi}(p) e^{-\frac{i}{2}L^{-4}((m - i\epsilon)^2 + p^2)} |\tilde{\phi}(p)|^2 |\tilde{\phi}(p)|^2}{\int d\mathfrak{R}e \tilde{\phi}(p) d\mathfrak{I}m \tilde{\phi}(p) e^{-\frac{i}{2}L^{-4}((m - i\epsilon)^2 + p^2)} |\tilde{\phi}(p)|^2} \\ &= L^{-4} i^{-1} ((m - i\epsilon)^2 + p^2)^{-1}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \overline{\phi(x) \phi(y)} &= L^{-4} \sum_p e^{ip(x-y)} i^{-1} ((m - i\epsilon)^2 + p^2)^{-1} \\ &\rightarrow \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{i((m - i\epsilon)^2 + p^2)}, \end{aligned} \quad (214)$$

comme nous le désirions.

Nous n'avons considéré jusqu'à présent que les fonctions de Green des champs libres. Mais celles-ci permettent le traitement des champs en interaction, par le truchement de la formule

$$\langle \underline{0} | T(\underline{\phi}(x) \underline{\phi}(y) \dots) | \underline{0} \rangle = \langle 0 | T\left(e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathcal{H}_I(t)} \phi(x) \phi(y) \dots\right) | 0 \rangle,$$

pour laquelle (207) donne :

$$\frac{\int \prod d\phi e^{iA_0} e^{\int d^4x iI} \phi(x) \phi(y) \dots}{\int \prod d\phi e^{iA_0}}.$$

En combinant ceci avec

$$1 = \langle \underline{0} | \underline{0} \rangle = \frac{\int \prod d\phi e^{iA_0} e^{\int d^4x iI}}{\int \prod d\phi e^{iA_0}}, \quad (215)$$

(dans la mesure où l'on maintient l'énergie du vide à zéro par un contre-terme, trivialement un c-nombre), on a :

$$\langle \underline{0} | T(\underline{\phi}(x) \underline{\phi}(y) \dots) | \underline{0} \rangle = \frac{\int \prod d\phi e^{iA(\phi)} \phi(x) \phi(y) \dots}{\int \prod d\phi e^{iA(\phi)}}. \quad (216)$$

THEORIE DE CHAMP EUCLIDIENNE

Dans les fonctions de Green $G(x, y, \dots)$ considérées jusqu'à présent, les temps $x_4/i, y_4/i, \dots$, étaient *réels*. Mais il s'avère fructueux de considérer les prolongements analytiques de ces fonctions à des temps imaginaires, c'est-à-dire aux valeurs réelles de x_4, y_4, \dots .

On peut même définir des opérateurs de Heisenberg à des temps imaginaires par

$$\underline{\phi}(\vec{x}, x_4) = e^{\mathcal{H}x_4} \phi(\vec{x}, 0) e^{-\mathcal{H}x_4}, \quad (217)$$

et les champs libres (ou en représentation d'interaction) correspondants par

$$\phi(\vec{x}, x_4) = e^{\mathcal{H}_0 x_4} \phi(\vec{x}, 0) e^{-\mathcal{H}_0 x_4}, \quad (218)$$

de sorte que

$$\underline{\phi}(\vec{x}, x_4) = U^{-1}(x_4, 0) \phi(\vec{x}, x_4) U(x_4, 0), \quad (219)$$

avec

$$\begin{aligned} U(\tau_2, \tau_1) &= e^{\mathcal{H}_0 \tau_2} e^{-\mathcal{H}(\tau_2 - \tau_1)} e^{-\mathcal{H}_0 \tau_1} \\ &= \mathbb{T} e^{-\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \mathcal{H}_I(\tau)}, \end{aligned} \quad (220)$$

où

$$\mathcal{H}_I(\tau) = e^{\mathcal{H}_0 \tau} (\mathcal{H} - \mathcal{H}_0) e^{-\mathcal{H}_0 \tau}, \quad (221)$$

et où le \mathbb{T} prescrit maintenant l'ordination par rapport à τ .

En supposant que les c-nombres additifs, dans \mathcal{H}_0 et \mathcal{H} , soient ajustés pour que les énergies des vides réel et nu soient nulles, les formules suivantes sont plausibles :

$$\begin{aligned} |\underline{0}\rangle &= U(0, -\infty) |0\rangle \\ &= \lim_{\tau \rightarrow -\infty} e^{-\mathcal{H}\tau} |0\rangle \\ &= \sum_n \lim_{\tau \rightarrow -\infty} e^{-E_n \tau} |n\rangle \langle n|0\rangle. \end{aligned} \quad (222)$$

De même :

$$\langle \underline{0} | = \langle 0 | U(\infty, 0). \quad (223)$$

En utilisant ces formules, ainsi que

$$U(\tau_3, \tau_2) U(\tau_2, \tau_1) = U(\tau_3, \tau_1), \quad (224)$$

on obtient

$$\langle \underline{0} | \mathbb{T}(\underline{\phi}(x) \underline{\phi}(y) \dots) | \underline{0} \rangle = \langle 0 | \mathbb{T}\left(e^{-\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \mathcal{H}_I(\tau)} \phi(x) \phi(y) \dots\right) | 0 \rangle. \quad (225)$$

Cette expression peut être le point de départ d'un développement à la Feynman-Dyson-Wick, comme précédemment. Et de ce genre de développement, on peut inférer une représentation intégrale fonctionnelle. Celle-ci est disponible à partir de (216) en y prenant x, x_4, y_4, \dots réels. Notre notation présente une particularité qui requiert maintenant un peu de soin. Lorsque nous utilisons la quatrième composante imaginaire de Minkowski, notre notation d^4x désignait la quantité *réelle* $dx_0 dx_1 dx_2 dx_3$. Dans le cadre euclidien, il est plus commode d'utiliser $d^4x = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$. Ainsi, en prolongeant (216), nous avons

$$i d^4x \longrightarrow d^4x. \quad (226)$$

Donc :

$$\langle \underline{0} | T(\underline{\phi}(x) \underline{\phi}(y) \dots) | \underline{0} \rangle = \frac{\int \prod d\phi e^{iA(\phi)} \phi(x) \phi(y) \dots}{\int \prod d\phi e^{iA(\phi)}}, \quad (227)$$

avec intégration sur toutes les fonctions réelles ϕ de quatre variables réelles x_1, x_2, x_3, x_4 , l'action A étant construite formellement, comme auparavant, à partir de ϕ et $\partial_\mu \phi$. Pour la théorie ϕ^4 :

$$\begin{cases} iA(\phi) = \int d^4x L(x) \\ L = -\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{g}{4!}\phi^4. \end{cases} \quad (228)$$

Remarquez que $\partial_4 \phi$ est maintenant réelle, et que $(\partial_4 \phi)^2$ a le même signe que $(\vec{\nabla} \phi)^2$. A l'invariance de Lorentz de la théorie originale, s'est substituée une symétrie $O(4)$ des rotations réelles dans un espace euclidien (au lieu de minkowskien) à quatre dimensions.

Parmi les simplifications dont on bénéficie dans une théorie de champ euclidienne, il y a le fait que la transformée de Fourier du propagateur,

$$(m^2 + k^2)^{-1} = (m^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2)^{-1}, \quad (229)$$

avec k_4 réel, n'a plus de singularité. Le stratagème du $i\epsilon$ n'est plus nécessaire pour définir les intégrales de Feynman. On n'en a plus besoin, non plus, pour faire décroître, aux grands champs, le poids exponentiel dans les intégrales fonctionnelles. Ces propriétés, ainsi que la symétrie $O(4)$, facilitent le maniement de la théorie.

L'INDEPENDANCE DE JAUGE

En guise d'illustration de la technique de l'intégrale fonctionnelle, esquissons la démonstration que toute une famille de lagrangiens différents conduisent à la même théorie physique des mésons vectoriels.

Considérons la densité lagrangienne

$$L = -\frac{1}{4}(\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu)^2 - \frac{1}{2}(\alpha + 1)(\partial_\mu W_\mu)^2 - \frac{1}{2}m^2 W_\mu^2 + \dots, \quad (230)$$

où les termes non transcrits font intervenir d'autres champs. Nous supposons que ces termes non explicités sont invariants de jauge, c'est-à-dire inaltérés par les transformations

$$W_\mu \longrightarrow W_\mu + \partial_\mu \chi \quad (231)$$

et les transformations associées des autres champs. Notez que le premier terme de (230) respecte cette invariance de jauge, tandis que les deux termes suivants la violent. Nous avons déjà remarqué que ce lagrangien entraîne généralement des manifestations de «particules fantômes» auxquelles il faut attribuer des «probabilités négatives». On peut rendre ces particules infiniment massives en permettant à α d'approcher la valeur -1 . Mais on doit alors utiliser pour W un propagateur dont la transformée de Fourier

$$\frac{\delta_{\mu\nu} + p_\mu p_\nu / m^2}{m^2 + p^2}$$

semble non renormalisable. Si la physique est effectivement indifférente aux changements de α , on peut aussi bien croire que la théorie est renormalisable et que la matrice S est unitaire, sans plus faire attention aux fantômes.

Tout W peut s'écrire sous la forme

$$W_\mu = U_\mu + \partial_\mu \chi, \quad (232)$$

avec

$$\partial_\mu U_\mu = 0. \quad (233)$$

En termes de ces variables, on a

$$\begin{aligned} L = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu)^2 - \frac{1}{2}m^2 U_\mu^2 \\ & - \frac{1}{2}(\alpha + 1)(\partial_\mu \partial_\mu \chi)^2 - \frac{1}{2}m^2 (\partial_\mu \chi)^2 \\ & - m^2 U_\mu \partial_\mu \chi - \dots, \end{aligned} \quad (234)$$

où, en vertu de la supposée invariance de jauge, les termes non écrits ... sont les mêmes qu'auparavant. De plus, le dernier terme effectivement écrit ne contribue pas à l'action car, par intégration par parties, il est équivalent à un terme contenant $\partial_\mu U_\mu$ qui est nulle.

Nous avons donc :

$$\frac{\int \prod dW e^{iA} W_\mu \dots}{\int \prod dW e^{iA}} = \frac{\int \prod d\chi e^{B(\chi)} \int \prod dU \delta^\infty(\partial_\mu U_\mu) e^{C(U)} (U_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x)) \dots}{\int \prod d\chi e^{B(\chi)} \int \prod dU \delta^\infty(\partial_\mu U_\mu) e^{C(U)}}, \quad (235)$$

avec

$$\begin{cases} B(\chi) = - \int d^4x \left(\frac{1}{2}m^2 (\partial_\mu \chi)^2 + \frac{1}{2}(\alpha + 1)(\partial_\mu \partial_\mu \chi)^2 \right) \\ C(U) = - \int d^4x \left(\frac{1}{4}(\partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu)^2 + \frac{1}{2}m^2 U_\mu^2 + \dots \right). \end{cases} \quad (236)$$

Or, dans ces formules, seul B dépend de α . Seules les contributions des $\partial_\mu \chi$ aux fonctions de Green, et non les contributions des U_μ , sont sensibles à α . Mais ces termes $\partial_\mu \chi$ ne contribuent pas du tout aux éléments de matrice S physiques. En effet, pour obtenir ces derniers, il faut transformer de Fourier les fonctions de Green, et contracter les indices tensoriels avec les fonctions-d'onde de polarisation u_μ des états physiques. Chaque $\partial_\mu \chi$ introduit donc un facteur du type

$$\int d^4x e^{ikx} u_\mu \partial_\mu \chi,$$

ou, après intégration par parties

$$-ik_\mu u_\mu \int d^4x e^{ikx} \chi,$$

nul, car $k_\mu u_\mu = 0$ pour des états physiques.

On invoque des mécanismes semblables, mais plus compliqués, dans les théories de jauge «non abéliennes» à la mode. La décomposition de W en parties dépendante et indépendante de jauge est alors non linéaire. Le passage à ces variables dans l'intégrale fonctionnelle fait intervenir un jacobien non trivial qui complique l'analyse. La démonstration de l'indépendance par rapport à α n'aboutit que dans le cas $m = 0$, et au prix de l'addition au lagrangien de termes supplémentaires dépendants de α . On peut représenter ces termes additionnels par des intégrales fonctionnelles sur des champs auxiliaires, de sorte que la théorie semble contenir des particules supplémentaires, les «fantômes de Faddeev-Popov». Là encore, ce ne sont pas des particules physiques, mais des rouages du mécanisme permettant d'utiliser une valeur de α plutôt qu'une autre, selon que l'on souhaite montrer l'unitarité ou la renormalisabilité de la théorie.

LES INSTANTONS

Considérons le lagrangien d'un système mécanique simple, à un degré de liberté $\phi(t)$,

$$L = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{\mu^2}{g^2} V(g\phi), \quad (237)$$

où μ et g sont des paramètres, et supposons que V est positif, nul en $\phi = 0$ ainsi que ses dérivées,

$$V(\phi) = \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0, \quad \phi = 0, \quad (238)$$

et périodique :

$$V(g\phi + 2n\pi) = V(g\phi). \quad (239)$$

Pour nous, $g\phi$ sera un *angle*, et la configuration obtenue lorsque ϕ croît de 2π , identique à l'originale. L'équation de Schrödinger correspondante est

$$E\Psi(\phi) = \left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\phi^2} + \frac{\mu^2}{g^2} V(g\phi) \right) \Psi(\phi), \quad (240)$$

et ses solutions qui nous intéressent sont soumises aux conditions limites périodiques, en $\phi = \pm\pi/g$ par exemple. Si nous développons V :

$$\frac{1}{g^2} V(g\phi) = \frac{1}{2!} V'' \phi^2 + \frac{g}{3!} V''' \phi^3 + \dots \quad (241)$$

en considérant g petit, les termes indépendants de g dans le lagrangien ou l'hamiltonien seraient ceux d'un oscillateur harmonique simple. On pourrait alors traiter en perturbation les termes dépendants de g dans (241), en ignorant totalement la condition de périodicité aux confins $\phi = \pm\pi/g$. Où est l'erreur ? On en a peut-être une idée, pour g petit, avec le facteur de pénétration de la barrière

$$e^{-\frac{\mu}{g} \int_0^{2\pi/g} d\phi \sqrt{2V(g\phi)}} = e^{-\frac{1}{g^2} \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{2\mu^2 V(\phi)}}, \quad (242)$$

calculé, suite à (240), dans l'approximation WKB. Lorsque g tend vers zéro, ce facteur diffère de l'unité par une quantité qui s'annule plus rapidement que toute puissance finie de g .

Etudions maintenant ce système simple, du point de vue de la moyenne fonctionnelle euclidienne. Le changement de variable $g\phi \rightarrow \phi$ dans (237) est commode. La fonction de poids dans la moyenne fonctionnelle est donc

$$e^{\int dx_4 L} = e^{-\frac{1}{g^2} \int dx_4 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx_4} \right)^2 + \mu^2 V(\phi) \right)}. \quad (243)$$

Lorsque g est très petit, on s'attendrait que la moyenne soit largement dominée par les fonctions qui minimisent l'exposant, pour lesquelles une condition suffisante est l'équation classique du mouvement avec temps imaginaire :

$$\frac{d^2\phi}{dx_4^2} = \mu^2 \frac{d}{d\phi} V(\phi). \quad (244)$$

Le minimum absolu est donné par $\phi = 0$. On pourrait donc traiter systématiquement ϕ , dans (243), comme petit d'ordre g . On peut de cette façon construire une série de perturbation équivalente à celle mentionnée ci-dessus.

Examinons quand même d'autres contributions, à savoir les contributions des fonctions qui minimisent encore l'exposant, mais sujettes aux conditions limites

$$\begin{aligned} \phi &= 0, & x_4 &= -\infty \\ \phi &= 2\pi, & x_4 &= +\infty. \end{aligned} \quad (245)$$

Ces fonctions doivent encore être solutions de (244). Multipliant les deux membres par $d\phi/dx_4$, on a :

$$\frac{d}{dx_4} \left(\frac{d\phi}{dx_4} \right)^2 = \frac{d}{dx_4} 2\mu^2 V(\phi),$$

donc

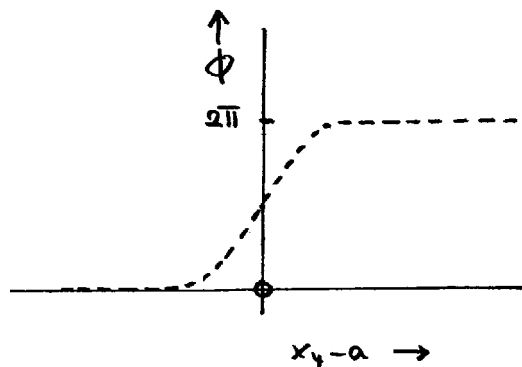
$$\frac{d\phi}{dx_4} = \pm \sqrt{2\mu^2 V(\phi) + C\mu^2}, \quad (246)$$

où C est une constante, soit

$$(x_4 - a)\mu = \pm \int_{\pi}^{\phi} \frac{d\phi'}{\sqrt{2V(\phi') + C}}, \quad (247)$$

où a est une constante.

Pour satisfaire les conditions limites (245), il faut prendre $C = 0$ et le signe positif. Alors, $x_4 - a$ croît très rapidement depuis $-\infty$ lorsque ϕ croît à partir de 0, et croît encore très rapidement jusqu'à $+\infty$ lorsque ϕ croît jusqu'à 2π , après une pause vers $x_4 = a$ pendant une durée de l'ordre de μ^{-1} :



A cette fonction correspond, d'après (246) et (247), la fonction de poids exponentielle :

$$e^{-\Delta/g^2}, \quad (248)$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta &= \int dx_4 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx_4} \right)^2 + \mu^2 V(\phi) \right) \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \sqrt{2\mu^2 V(\phi)}. \end{aligned} \quad (249)$$

Mais ceci n'est autre que le facteur de pénétration de la barrière (242). On peut donc s'imaginer que les contributions de ces champs sont la façon dont la pénétrabilité de la barrière se manifeste dans ce point de vue. Ces solutions d'équations classiques pour un

temps imaginaire, qui ne diffèrent notablement du «vide» classique (minimum de l'énergie) que pendant une durée limitée, sont appelées «instantons» ou «pseudoparticules».

L'instanton est caractérisé par un instant a , en temps imaginaire. La moyenne sur toutes les configurations comprend ensuite une intégration sur a . Considérons à ce propos la configuration à plusieurs instantons

$$\phi(x) = \sum_n F(\mu(x - a_n)), \quad (250)$$

où $F(\mu(x - a))$ est la solution de (247). Le facteur de poids de cette configuration sera :

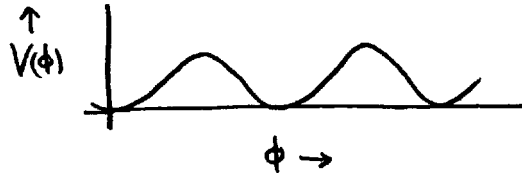
$$e^{-\frac{1}{g^2} \left(\sum_n \Delta + \text{termes d'«interaction»} \right)}, \quad (251)$$

où les termes d'«interaction» s'annulent pour des positions a_n largement séparées. Par rapport à la configuration à un instanton, ces configurations à plusieurs instantons sont pénalisées par une pondération exponentielle plus faible. Mais il y a par contre plus de paramètres a_n sur lesquels intégrer, de sorte que, très grosso modo, ces configurations occupent un plus grand domaine de l'espace des fonctions. L'augmentation d'«entropie» (par analogie avec la mécanique statistique classique) peut compenser l'augmentation d'«énergie».

Et ainsi, nous trouvons que la mécanique statistique d'un «gaz d'instantons» représente une partie de toute la dynamique laissée pour compte par la théorie des perturbations. Remarquez que dans cette analogie mécanique statistique, g^2 dans (243) joue le rôle de «température».

D'aucuns espèrent que des gaz d'instantons analogues dans les théories de champs sérieuses pourraient servir à confiner les quarks. Peut-être qu'à une certaine «température» le système transite à une phase plus exotique, de sorte qu'au delà d'une constante de couplage critique, l'analogie pertinente serait un supraconducteur, un superfluide, un plasma, ou autre.

On peut interpréter autrement le lagrangien (237). Toujours avec le potentiel V périodique, on peut décrire que ϕ n'est pas un angle, et que l'augmentation de ϕ sur une période du potentiel est un *changement* de configuration. Le problème est alors celui du mouvement d'une particule dans un potentiel périodique



et la fonction-d'onde elle-même n'a nul besoin d'être périodique. Dans ce cas, l'existence de l'instanton, ou de la pénétrabilité finie de la barrière, indique qu'un traitement cohérent ne doit pas confiner ϕ au voisinage de l'un quelconque des minimums du potentiel. Ces solutions n'apparaîtraient pas dans une théorie de perturbation. Certains des instantons des théories de jauge ont été interprétés de cette façon, comme l'indication d'une périodicité du vide. On a même suggéré de prendre comme vide l'analogie d'un état obtenu dans le simple modèle du potentiel, en exigeant de la fonction-d'onde de Schrödinger dans chaque synclinal du potentiel un déphasage $e^{i\theta}$ par rapport au précédent. Ces «vides θ » n'auraient aucun sens si ϕ était effectivement un angle, car deux synclinaux adjacents ne seraient alors qu'un seul et même puits.

Il importe de remarquer que ces objets de l'espace euclidien n'ont peut-être pas d'analogues faciles à visualiser dans l'espace de Minkowski. Dans l'exemple simple exposé, le gaz d'instantons n'était qu'un concept auxiliaire pour discuter du mouvement d'une particule dans un puits de potentiel. Bien que l'étude de l'espace euclidien ne soit peut-être d'aucune aide directe pour élaborer une représentation physique, on espère ainsi découvrir des propriétés très générales — comme l'existence d'une constante de couplage critique, ou la satisfaction de critères de confinement des quarks.

LES SOLITONS

L'instanton a un temps de vie bref (et imaginaire) dans l'espace-temps euclidien. Un «soliton» par contre est une concentration d'énergie, de longue durée de vie, évoluant dans l'espace-temps ordinaire. Sous ce nom, on désigne une solution des équations du champ ordinaires, dont l'énergie reste concentrée tandis que la solution évolue au cours du temps ordinaire, si bien que cet objet se comporte comme une «particule» étendue. La différence de ces particules avec les «particules» plus familières de la théorie quantique des champs, les quanta du champ, c'est qu'elles existent déjà dans le cadre classique.

La question du soliton ne se posait pas dans le modèle simple de la section précédente car il n'y avait aucune dimension spatiale (seulement le temps) suivant laquelle concentrer quoi que ce soit. Ajoutons une dimension spatiale, et étudions la densité lagrangienne, en 1+1 dimensions,

$$L = \frac{1}{g^2} \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \mu^2 V(\phi) \right), \quad (252)$$

avec le même V que précédemment. L'équation du mouvement classique est :

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \mu^2 \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (253)$$

Cherchant d'abord des solutions statiques, $\partial \phi / \partial t = 0$, nous avons à résoudre

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \mu^2 \frac{dV(\phi)}{d\phi}, \quad (254)$$

pour ϕ fonction de x . C'est encore l'équation (244), mais avec une interprétation différente car elle décrit maintenant une variation à travers l'espace plutôt qu'au cours d'un temps imaginaire. La solution

$$\phi(x, t) = F(\mu(x - a)) \quad (255)$$

est maintenant un soliton immobile. Elle ne diffère sensiblement du vide ($\phi = 0$ ou 2π) que dans un domaine restreint, à l'entour de $x = a$, et son énergie totale, ou masse,

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{g^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \mu^2 V \right) \\ &= \frac{\Delta}{g^2}, \end{aligned} \quad (256)$$

avec le Δ de l'équation (249), est finie. Puisque la théorie est invariante de Lorentz, ce soliton immobile peut être considéré, par transformation de Lorentz, comme en mouvement :

$$\phi(x, t) = F \left(\mu \frac{x - a - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right), \quad (257)$$

avec l'énergie

$$E = \frac{\Delta}{g^2} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (258)$$

Remarquons, à ce propos, qu'il n'existe pas de concept correspondant de «mouvement» pour un instanton. Dans l'espace euclidien, les transformations spéciales de Lorentz de l'espace de Minkowski sont remplacées par de simples rotations.

On a trouvé des solitons très intéressants dans des théories de champs sérieuses. Leur existence est à la base de l'une des idées à la mode pour unifier l'interaction forte avec l'électromagnétique et la faible. Le fait que les masses des solitons et les interactions soient typiquement proportionnelles à g^{-2} fait songer à des phénomènes d'interactions fortes hadroniques qui émergeraient d'une théorie d'interaction fondamentalement faible.