

Relativité et gravitation

Relativité et gravitation

1. Principe d'équivalence
2. Espace-temps courbe
3. Trajectoires des planètes
4. Déviation de la lumière
5. Ondes gravitationnelles

Gravitation newtonienne

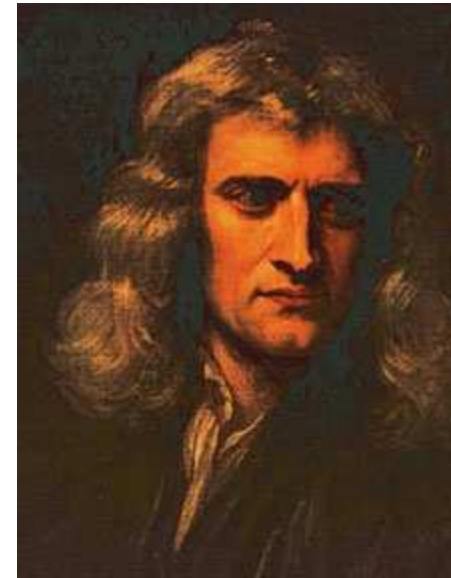
- Interaction à distance **instantanée** entre deux corps massifs

$$\vec{f} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{u}_r$$

- Rel. fondamentale de la dynamique

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}_g = -m_g \vec{\nabla} \phi_g$$

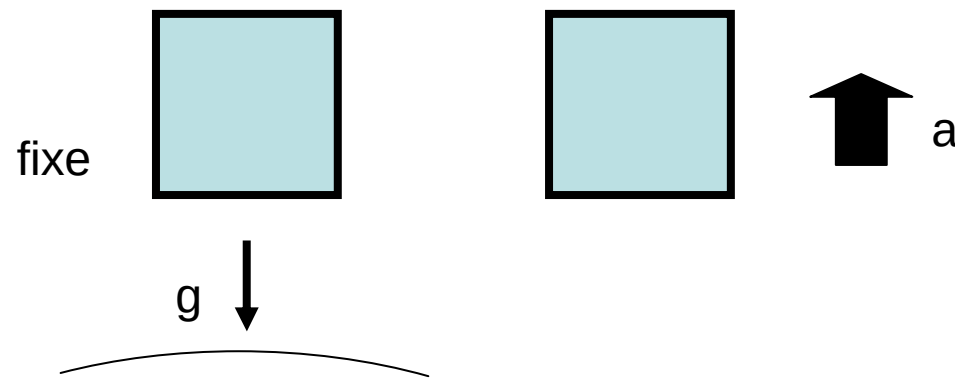
$$m_i = m_g$$



Isaac Newton
[1642-1727]

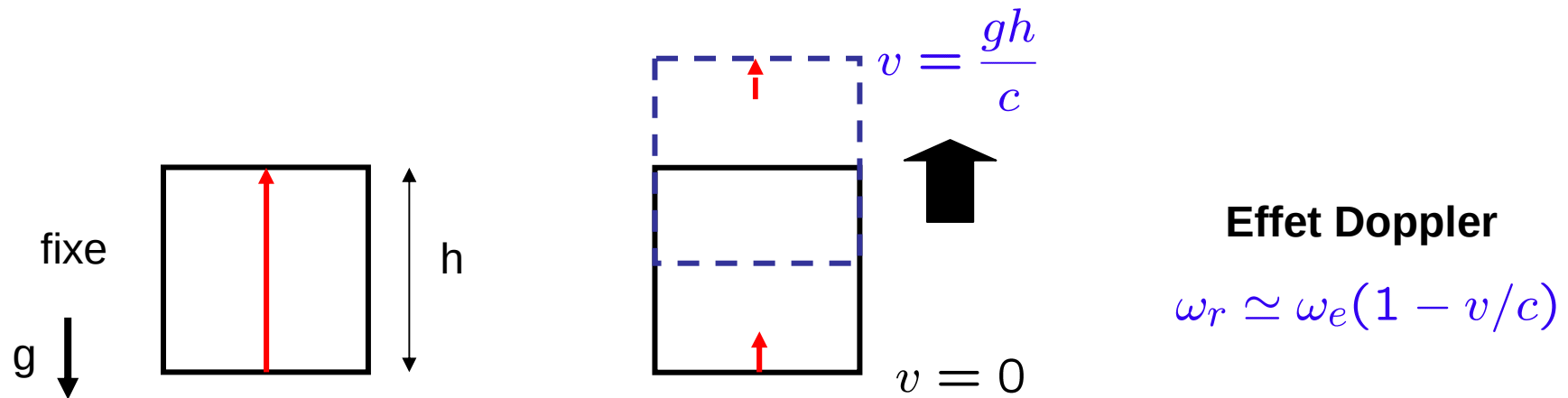
Principe d'équivalence

- **Localement:** équivalence entre accélération et gravitation



- **Principe d'équivalence**
 - Localement (dans le temps et l'espace), les lois de la physique dans un laboratoire en chute libre sont les mêmes que dans un référentiel inertiel sans gravitation.
 - Localement, les lois de la physique dans un champ gravitationnel sont les mêmes que celles de la relativité restreinte dans un référentiel accéléré.

Redshift gravitationnel



$$\omega_r \simeq \omega_e \left(1 - \frac{gh}{c^2} \right)$$

Einstein (1907)

$$\omega_r \simeq \omega_e \left(1 - \frac{\Delta\phi}{c^2} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \tau_r \simeq \tau_e \left(1 + \frac{\phi_r - \phi_e}{c^2} \right)$$

GPS et Galileo

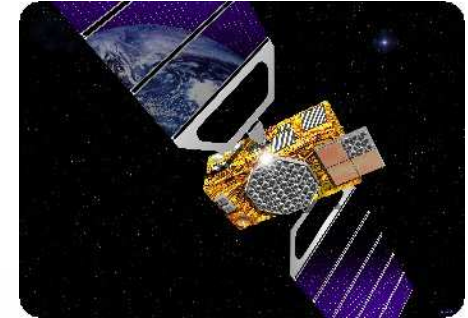
- Satellites avec horloges atomiques

$$d\tau \simeq \left(1 + \frac{\phi}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \right) dt$$

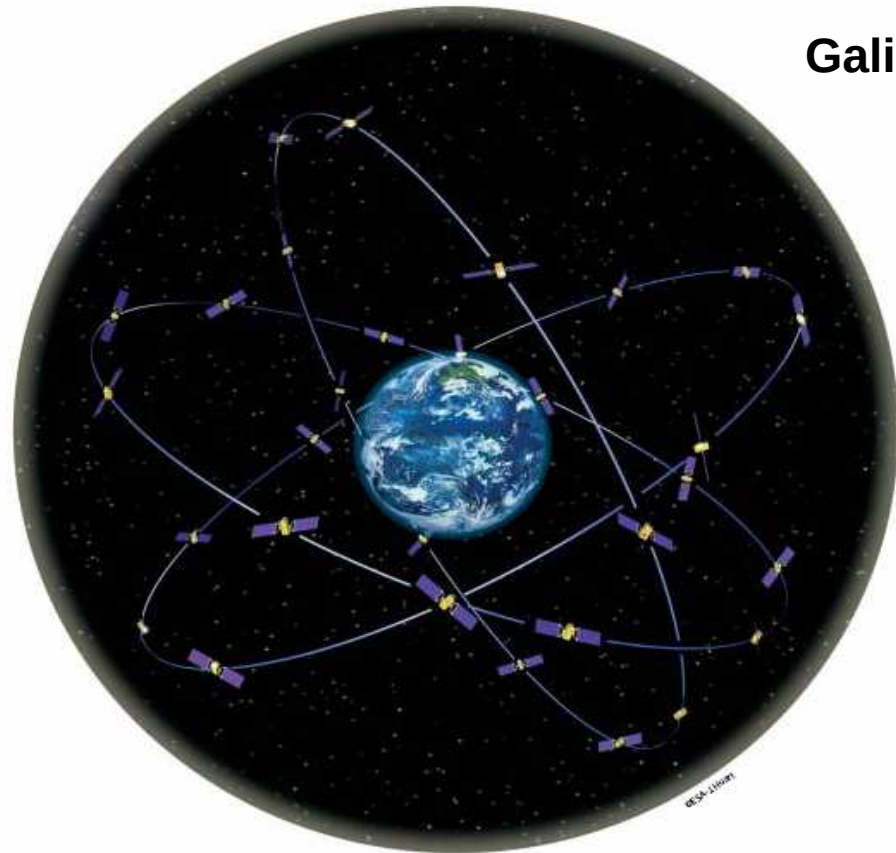
- En 24 heures,

$$\Delta\phi/c^2 \sim 6 \times 10^{-10}$$
$$\Rightarrow \Delta t \sim 50 \mu s$$

$$-v^2/2c^2 \sim -10^{-10}$$
$$\Rightarrow \Delta t \sim -10 \mu s$$



Galileo



Espace-temps courbe

- Localement: espace-temps de Minkowski

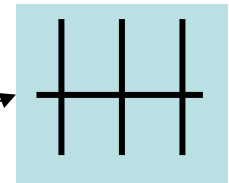
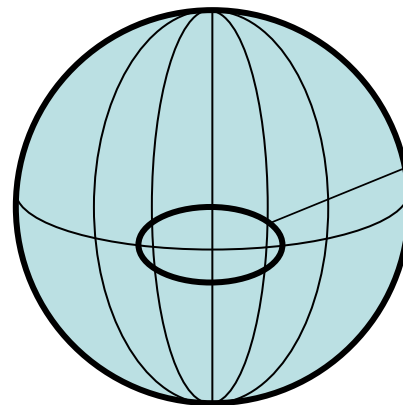
$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

- Globalement: espace-temps courbe

$$c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

- Analogie: sphère

$$d\ell^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$$



quasi-euclidien

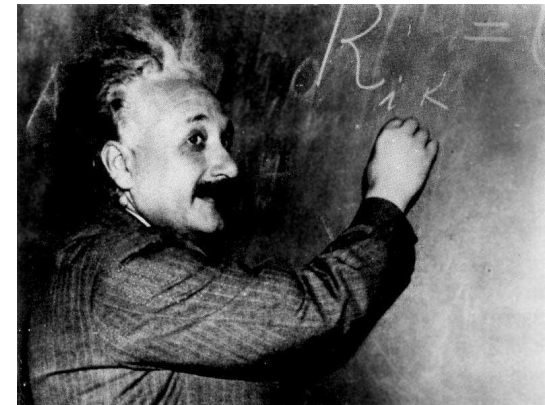
Equations d'Einstein

- La géométrie de l'espace-temps dépend de la matière

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Courbure de
l'espace-temps

Tenseur
énergie-impulsion



- Equivalent relativiste de l'équation de Poisson

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho$$

Géométrie de Schwarzschild

- Métrique de Minkowski en coordonnées sphériques

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

- A l'extérieur d'un objet massif statique et sphérique

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

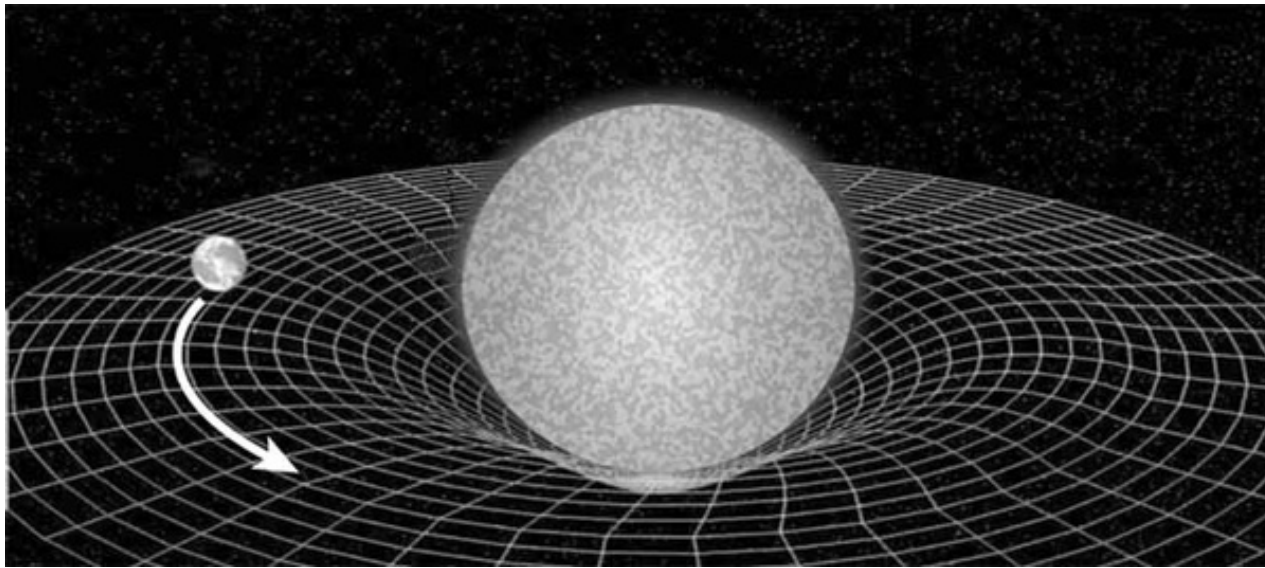
Schwarzschild (1916)

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \equiv 2\mathcal{M}$$

Soleil: $R_S \simeq 3 \text{ km}$

Trajectoires des planètes

$$m \left(\vec{a} + \vec{\nabla} \phi_g \right) = 0$$



Mouvement **libre** dans un espace-temps **déformé**

Formalisme lagrangien

Action pour une particule **libre**:

- en relativité restreinte

$$S = -mc^2 \int d\tau = -mc \int d\tau \sqrt{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$$

- en relativité générale

$$S = -mc \int d\tau \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$$

Equations du mouvement

- Equations d'Euler-Lagrange $\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\lambda} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\lambda}$

- Pour $\mathcal{L} = -mc \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\lambda} = -mc \frac{g_{\lambda\nu} \dot{x}^\nu}{\sqrt{g_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma}} = -mg_{\lambda\nu} u^\nu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\lambda} = -\frac{1}{2} mc \frac{\partial_\lambda g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}{\sqrt{g_{\rho\sigma} \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma}} = -\frac{1}{2} m \partial_\lambda g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$$

- Intégrales premières du mouvement

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\tau} (g_{\lambda\nu} u^\nu) = 0.$$

Mouvement dans Schwarzschild

- Quantités conservées dans la géométrie de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$$\partial_0 g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow E = g_{0\nu} \dot{x}^\nu = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \dot{t}$$

$$\partial_\phi g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow L = g_{\phi\nu} \dot{x}^\nu = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}$$

- On peut se restreindre à $\theta = \pi/2$
- Normalisation $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = c^2$

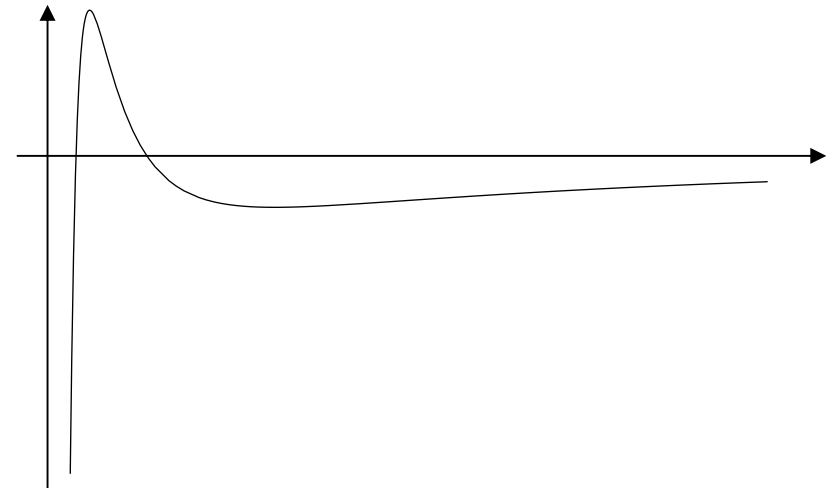
$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 = c^2$$

Mouvement dans Schwarzschild

- Intégrale première radiale

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} - \frac{GML^2}{c^2 r^3}}_{V_{\text{eff}}(r)} = \frac{1}{2} \left(\frac{E^2}{c^2} - c^2 \right) \equiv \mathcal{E}$$

$V_{\text{eff}}(r)$



- En théorie newtonienne,

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} = E$$

- Pour obtenir la trajectoire $r(\phi)$, on utilise

$$\frac{dr}{d\phi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\phi}} = \frac{r^2}{L} \dot{r}$$

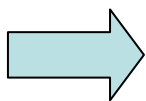
- En fonction de $u = 1/r$

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{2\mathcal{E}}{L^2} + \frac{2\mathcal{M}}{L^2}u - u^2 + \underbrace{2\mathcal{M}u^3}_{\text{correction relativiste}} \sim R_S/r$$

correction relativiste $\sim R_S/r$

- Solution newtonienne

$$u_N \text{ vérifie } \frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{\mathcal{M}}{L^2}$$



$$u_N = \frac{\mathcal{M}}{L^2} (1 + e \cos \phi)$$

**Trajectoires
de Kepler**

Avance du périhélie

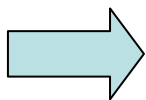
- Correction relativiste: $u = u_N + u_r$

$$\frac{d^2 u_r}{d\phi^2} + u_r = 3\mathcal{M} u_N^2$$

$$u = \frac{1}{r} \simeq \frac{1}{p} \left[1 + e \cos \left(\phi - \frac{3\mathcal{M}^2}{L^2} \phi \right) \right]$$

- Périhélie

$$\cos \left(\phi - \frac{3\mathcal{M}^2}{L^2} \phi \right) = 1$$



$$\delta\phi = \frac{6\pi\mathcal{M}^2}{L^2} = \frac{6\pi\mathcal{M}}{d}$$

Effet cumulatif !

Planète Mercure

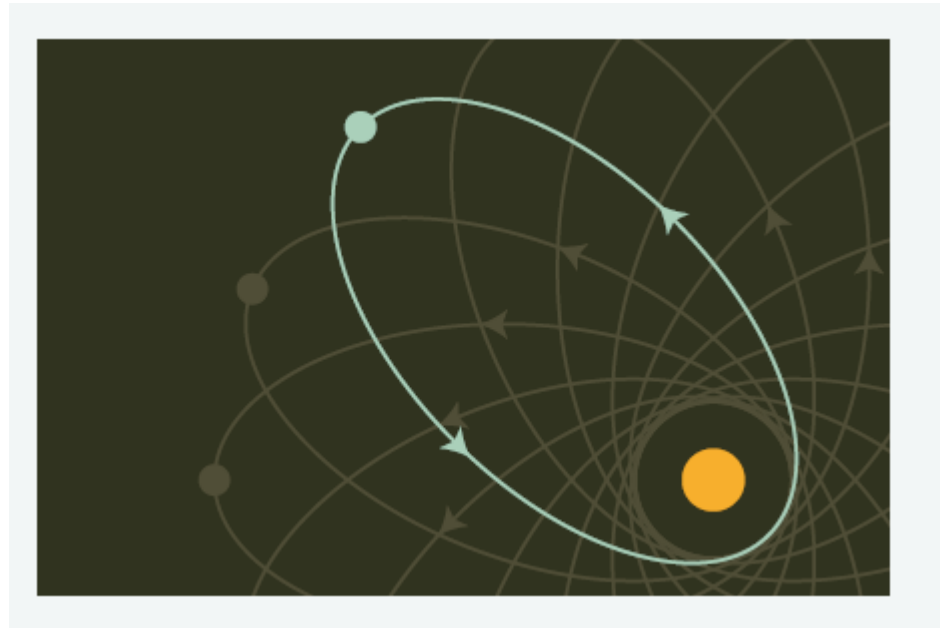
Mercure: planète la plus proche du Soleil

$$d \simeq 5 \times 10^7 \text{ km}$$

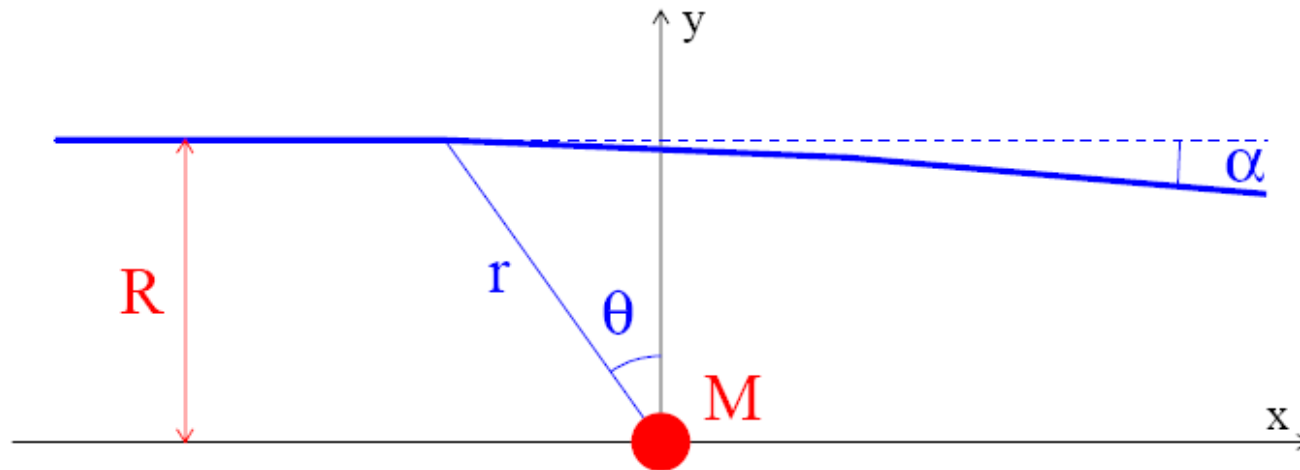
$$\mathcal{M} \simeq 1.5 \text{ km}$$

$$\Delta\phi \simeq 43''$$

par siècle



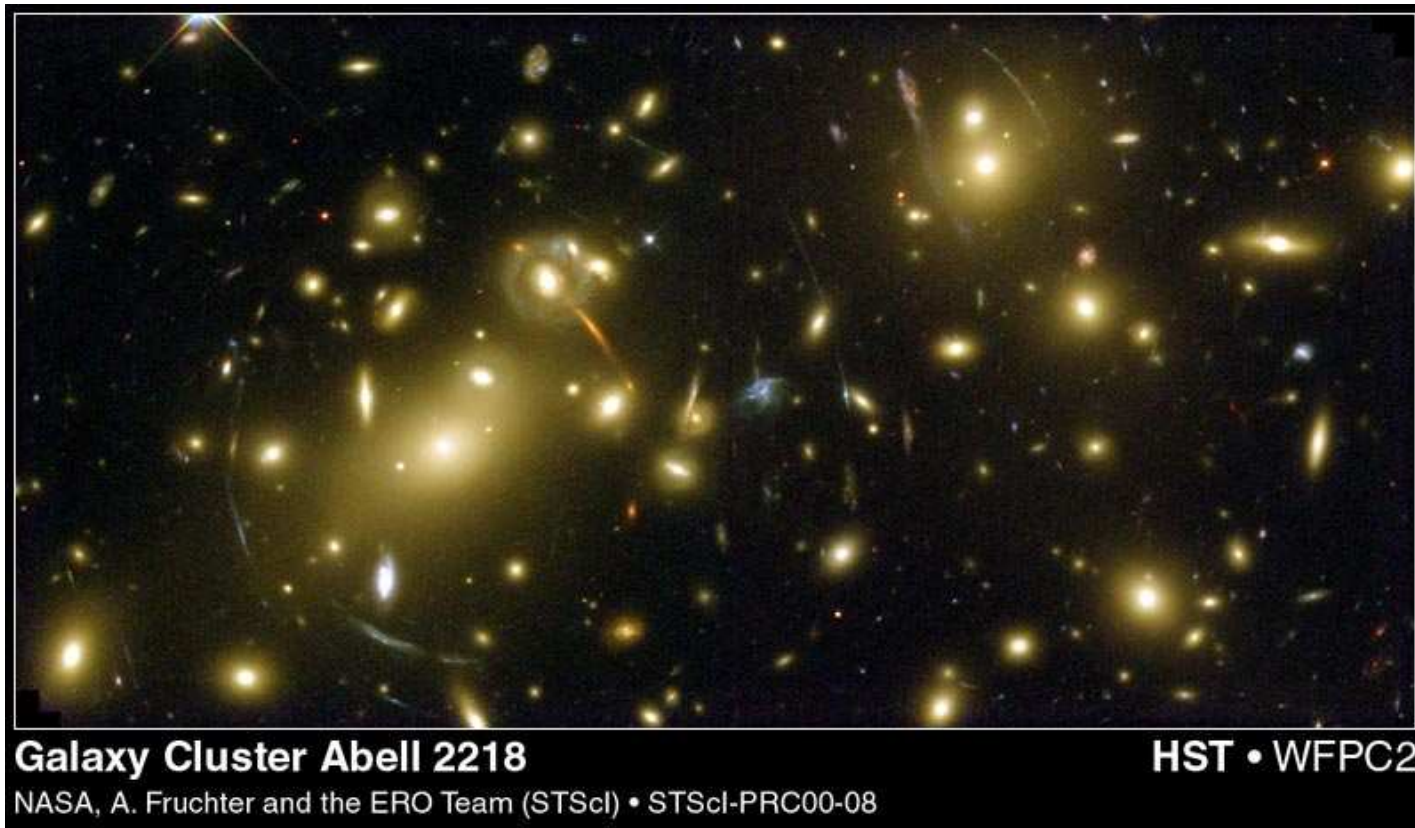
Déviation de la lumière



Angle de déviation $\alpha = \frac{4GM}{Rc^2}$

Eclipse de soleil: $\alpha \simeq 1,75''$

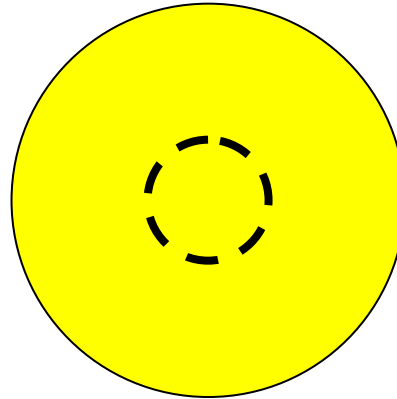
Lentilles gravitationnelles



Trous noirs

- Etoiles standard

$$R \gg R_S$$

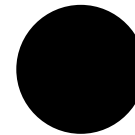
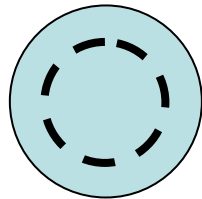


- Effondrement gravitationnel

étoiles à neutrons

ou

trous noirs



Ondes gravitationnelles

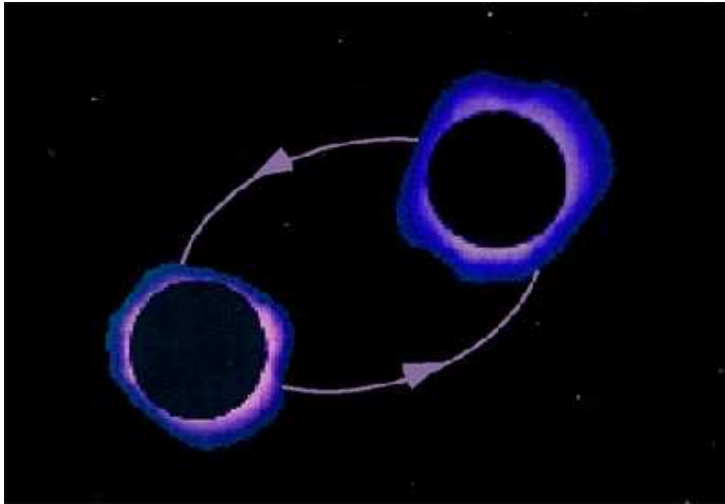
- Linéarisation des équations d'Einstein

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

$$\partial_\lambda \partial^\lambda h_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}$$

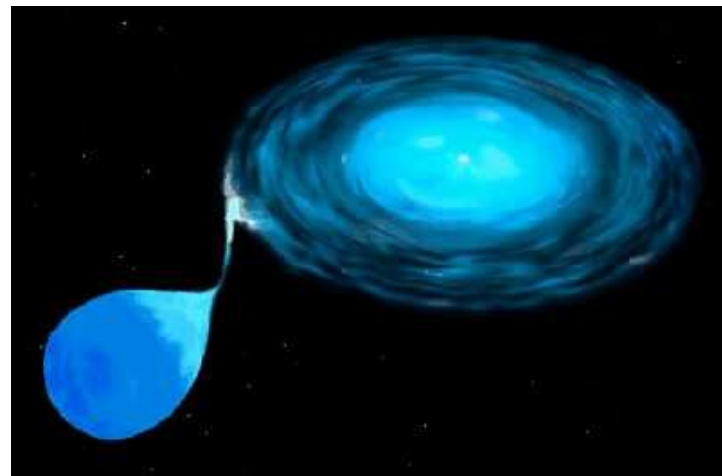
- Analogue aux équations de Maxwell $\partial_\lambda \partial^\lambda A_\mu = J_\mu$
- Ondes gravitationnelles se propageant à la vitesse de la lumière

Sources d'ondes gravitationnelles



trou noir / trou noir

Étoile à neutrons / trou noir

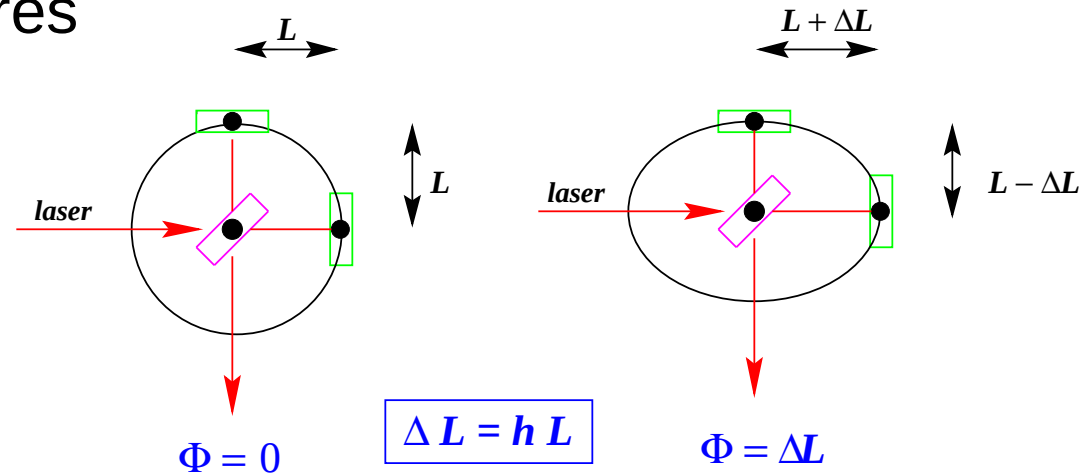


Détecteurs d'ondes gravitationnelles

- Déplacement relatif $\frac{\delta L}{L} \sim h$

Typiquement, $h \sim 10^{-22}$

- Interféromètres



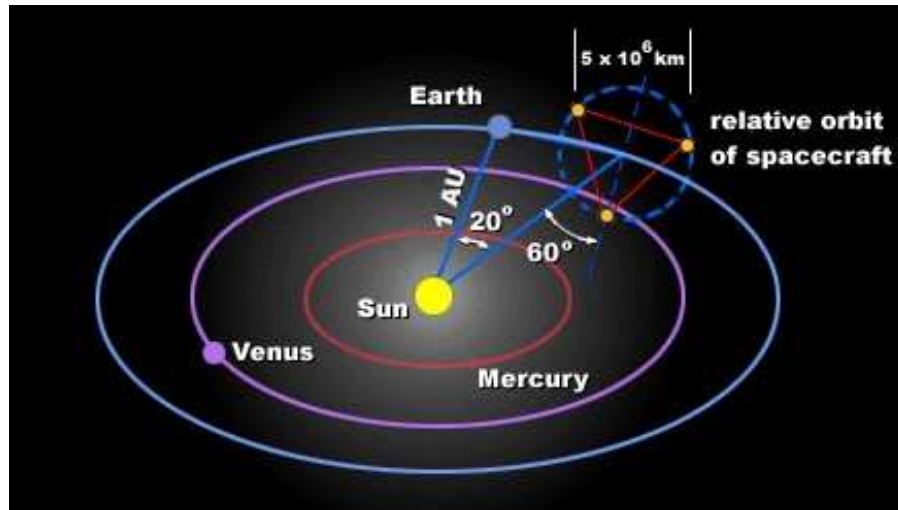
Détecteurs d'ondes gravitationnelles

Hanford, USA

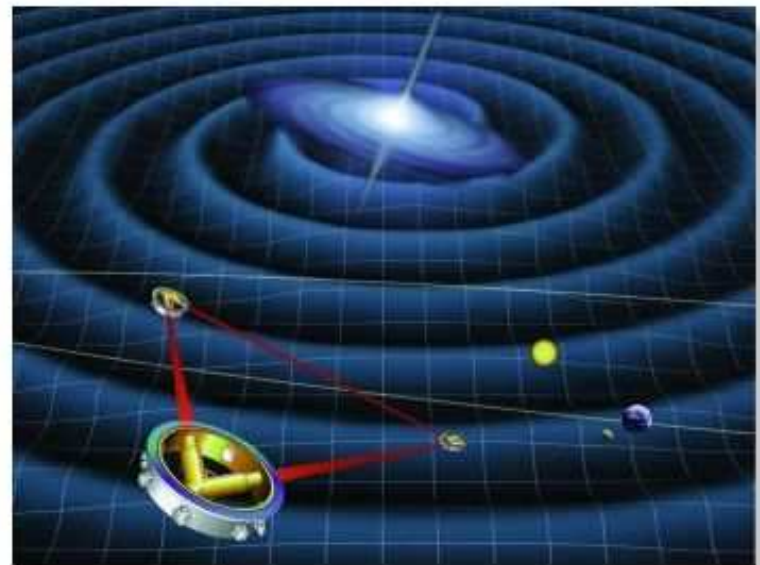


**Expérience Virgo,
près de Pise**

Détecteurs d'ondes gravitationnelles



Projet LISA



Relativité générale (Majeure 2 de physique)