ECRANTAGE DE DEBYE

Nous nous proposons d'étudier les phénomènes électrostatiques à l'intérieur d'un plasma. Rappelons que le plasma est formé de charges positives et négatives. Une charge positive, par exemple, va attirer des charges négatives et repousser les charges positives. Il s'en suit alors que la charge positive va être "écrantée" par les charges négatives. C'est **l'écrantage de Debye.** Un phénomène similaire a lieu dans les électrolytes.

I) POTENTIEL ELECTRIQUE AUTOUR D'UNE CHARGE DANS UN PLASMA

Soit une charge q placée en $\underline{r} = 0$ dans un plasma avec des ions une fois chargés. Le potentiel électrique $V(\underline{r})$ autour de la charge est donnée par l'équation de Poisson:

$$
\begin{aligned}
- \nabla^2 V &= \frac{\rho}{\varepsilon_o} + \frac{q\,\delta(\underline{r})}{\varepsilon_o} \\
\rho &= e[n_i - n_e]
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

où ρ est la densité totale de la charge, n_e et n_i les densités électronique et ionique. Il nous est nécessaire d'avoir une relation entre ρ et V. On suppose pour cela que l'on a une situation d'équilibre. La densité d'ions et d'électrons est alors donnée par *la distribution de Boltzmann*, en admettant que les températures électronique T_e et ionique T_i sont différentes:

$$n_i(\underline{r}) = n_o \exp\left\{- \frac{eV(\underline{r})}{k_B T_i}\right\} \qquad (2)$$

$$n_e(\underline{r}) = n_o \exp\left\{+ \frac{eV(\underline{r})}{k_B T_e}\right\} \qquad (3)$$

Nous avons utilisé le fait qu'à l'équilibre le plasma est neutre :

$$n_i(V = 0) \quad = \quad n_e(V = 0) \;=\; n_o.$$

En insérant les expressions (2) et (3) dans l'équation de Poisson, on obtient

$$- \nabla^2 V \quad = \quad \frac{e\, n_o}{\varepsilon_o} \left[\exp\left\{\frac{-eV}{k_B T_i}\right\} - \exp\left\{\frac{eV}{k_B T_e}\right\}\right] \quad + \frac{q\, \delta(r)}{\varepsilon_o} \tag{4}$$

Le problème considéré a une symétrie sphérique: il est alors naturel d'employer les coordonnées sphériques avec lesquelles le laplacien s'écrit

$$\nabla^2 V \quad = \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) \; + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \, \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \, \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \tag{5}$$

En supposant le milieu isotrope, V ne dépend pas des angles θ et ϕ :

$$- \nabla^2 V \;=\; - \frac{1}{r^2} \, \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right] \;=\; \frac{1}{r^2} \; 2r \frac{\partial V}{\partial r} \; - \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \;=\; - \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \; - \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \tag{6}$$

Nous avons donc à résoudre :

$$- \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \; - \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \quad = \quad \frac{e n_o}{\varepsilon_o} \left[\exp \left\{\frac{-eV}{k_B T_i}\right\} - \exp \left\{\frac{eV}{k_B T_e}\right\}\right] \quad + \frac{q\, \delta(r)}{\varepsilon_o} \tag{7}$$

L'équation (7) est une équation non linéaire.
Pour trouver une solution analytique, nous allons supposer que

$$\frac{eV}{k_B T_i} \;\; \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{eV}{k_B T_e} \;\; \ll \; 1 \tag{8}$$

ce qui nous permet de développer les exponentielles en série de Taylor.

$$-\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{n_o e}{\varepsilon_o}\left[1 - \frac{eV}{k_B T_i} - 1 - \frac{eV}{k_B T_e}\right] + \frac{q\,\delta(r)}{\varepsilon_o}$$

$$\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{n_o e}{\varepsilon_o}\left[\frac{eV}{k_B T_i} + \frac{eV}{k_B T_e}\right] - \frac{q\,\delta(r)}{\varepsilon_o} \qquad (9)$$

Nous avons à résoudre une équation du type :

$$\frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = a^2 V - \frac{q\,\delta(r)}{\varepsilon_o}$$

Essayons une solution du type :

$$V = \frac{\alpha}{r}\exp\left\{-\frac{r}{\beta}\right\}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\alpha}{r^2}\exp\left\{-\frac{r}{\beta}\right\} - \frac{\alpha}{\beta r}\exp\left\{-\frac{r}{\beta}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{2\alpha}{r^3}\exp\left\{-\frac{r}{\beta}\right\} + \frac{\alpha}{\beta r^2}\exp\left\{\frac{r}{\beta}\right\} + \frac{\alpha}{\beta^2 r}\exp\left\{-\frac{r}{\beta}\right\}$$

Nous avons donc

$$-\frac{2\alpha}{r^3}\exp\left\{-\frac{r}{\beta}\right\} - \frac{\alpha}{\beta r^2}\exp\left\{-\frac{r}{\beta}\right\} + \frac{2\alpha}{r^3}\exp\left\{-\frac{r}{\beta}\right\}$$

$$+\frac{\alpha}{\beta r^2}\exp\left\{-\frac{r}{\beta}\right\} + \frac{\alpha}{\beta^2 r}\exp\left\{-\frac{r}{\beta}\right\} = a^2\frac{\alpha}{r}\exp\left\{-\frac{r}{\beta}\right\} \qquad (10)$$

Par identification on a

$$\beta^2 = \frac{1}{a^2}$$

La solution à l'équation (9) est alors

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r} \exp\left\{-\frac{r}{\left[\dfrac{\varepsilon_o k_B T_e}{n_o e^2} \Big/ \left(1+\dfrac{T_e}{T_i}\right)\right]^{1/2}}\right\} \tag{11}$$

La quantité $\mathbf{(\varepsilon_o k_B T_e/n_o e^2)^{1/2}}$ **est la longueur de Debye** $\boldsymbol{\lambda_D}$. Nous retrouvons le fait qu'en r = 0 le potentiel V diverge en 1/r , potentiel coulombien de la charge q en r= 0

Nous pouvons alors réécrire l'expression du potentiel V(r):

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o\lambda_D}\frac{\lambda_D}{r} \exp\left\{-\frac{r}{\lambda_D \Big/ \left(1+\dfrac{T_e}{T_i}\right)^{1/2}}\right\} \tag{12}$$

La variation de exp(-r')/r' est donnée sur la figure I.1 ($r' = r/\lambda_D$).

A partir de r de l'ordre de quelques fois la distance de Debye ($r' = r/\lambda_D$ de l'ordre de 5-10), le potentiel devient négligeable: on dit qu'il est "blindé". Au delà de cette zone, le potentiel électrique est nul: le plasma reste neutre. Dans la zone de quelques distances de Debye, nous avons un potentiel électrique et il n'y a pas égalité des charges électriques positives et négatives.

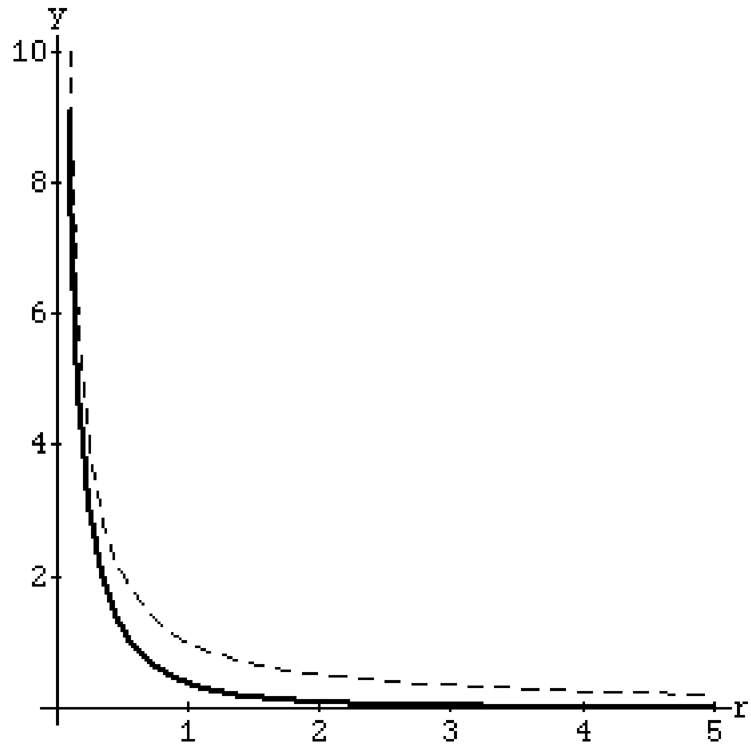

Fig. I.1.
Variation de exp(-r')/r '(trait gras) comparée à celle de 1/r' (trait tillé)

La valeur numérique de la longueur de Debye peut être facilement calculée en utilisant la formule:

$$\textit{Longueur de Debye } \lambda_D \, [m] = 7.434 * 10^{3} \, T^{1/2} \, n^{-1/2}$$

où *la température T est exprimée en eV et la densité en* m^{-3}. Pour un plasma ayant une température électronique T_e de 1 eV et une densité de 10^{16} m^{-3}, λ_D vaut 7.4×10^{-5} m.

Cette démonstration nous a montré que le potentiel d'une charge extérieure dans un plasma donne lieu à un potentiel dont la dépendance tend vers 0 plus rapidement que le potentiel coulombien 1/r. Du point de vue pratique si nous introduisons dans un plasma un objet chargé (c'est à dire une collection de charge électrique) le plasma s'arrange pour "blinder" le champ électrique dû à cet objet: à quelques longueurs de Debye, on ne sentira plus le champ électrique dû à l'objet.

Nous avons considéré dans la démonstration que l'on a introduit une charge extérieure. Que se passe-t-il dans le plasma lorsque aucune charge électrique n'est introduite? Chaque particule chargée du plasma agit comme centre d'une sphère de Debye (elle attire les particules de charge opposée et repousse celles de charge de même signe) et fait partie des sphères de Debye des autres particules chargées du plasma.

II) RETOUR A LA CARACTERISATION DU PLASMA

Le plasma a été défini comme:

- un mélange d'électrons et d'ions macroscopiquement neutre
- où les effets collectifs dominent sur les effets particulaires.

On peut maintenant donner une condition mathématique pour exprimer la deuxième partie de la définition. On demande que la quantité suivante

$$g = \frac{1}{n_o \lambda_D^3}$$

soit bien inférieure à 1

$$\mathbf{g = \frac{1}{n_o \lambda_D^3} \ll 1} \tag{13}$$

Cette relation veut simplement dire que **dans un cube d'arête égale à une longueur de Debye λ_D le nombre de particules chargées est grand**.

Explicitons g

$$g = \frac{1}{n_o \lambda_D^3} = \frac{e^2}{\lambda_D \varepsilon_o} \bullet \frac{1}{k_B T_e} \tag{14}$$

L'expression (14) indique que g est le rapport de l'énergie potentielle $\frac{e^2}{\lambda_D \varepsilon_o}$ entre deux particules de charge e (due à l'interaction de Coulomb) à l'énergie thermique. $k_B T_e$.

g << 1 indique que l'énergie potentielle d'interaction coulombienne est faible devant l'énergie thermique.