

## COLLISIONS DANS UN PLASMA ET PHENOMENES DE TRANSPORT

I) Collisions coulombiennes binaires

Soient deux particules de charge  $q_1$  et  $q_2$  de masse  $m_1$  et  $m_2$ . leurs positions sont  $\underline{r}_1$  et  $\underline{r}_2$  leur vitesse relative est  $\underline{v}_0$ . Une des particules est la particule test et l'autre est la particule cible. Les équations du mouvement sont :

$$m_1 \frac{d^2 \underline{r}_1}{dt^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{\|\underline{r}_1 - \underline{r}_2\|^3} \quad (1)$$

$$m_2 \frac{d^2 \underline{r}_2}{dt^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{r}_2 - \underline{r}_1}{\|\underline{r}_2 - \underline{r}_1\|^3} \quad (2)$$

Les trajectoires sont des hyperboles.

Définissons le centre de masse :

$$\underline{R} = \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{m_1 + m_2}$$

En additionnant les équations (1) et (2), on voit que le centre de masse  $\underline{R}$  a une vitesse constante :

$$\frac{d^2 \underline{R}}{dt^2} = \frac{1}{m_1 + m_2} \left\{ m_1 \frac{d^2 \underline{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \underline{r}_2}{dt^2} \right\} = 0$$

Définissons la position relative  $\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$ . En prenant la différence entre les équations (1) et (2), on obtient :

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = \mu \frac{d^2 \underline{r}}{dt^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{r}}{r^3} \quad (3)$$

L'équation (3) montre que la position relative  $\underline{r}$  a le même mouvement que celui d'une particule de masse  $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  dans le champ coulombien d'une charge fixe. C'est le problème classique des particules dans des potentiels centraux. La masse  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  est la masse réduite.

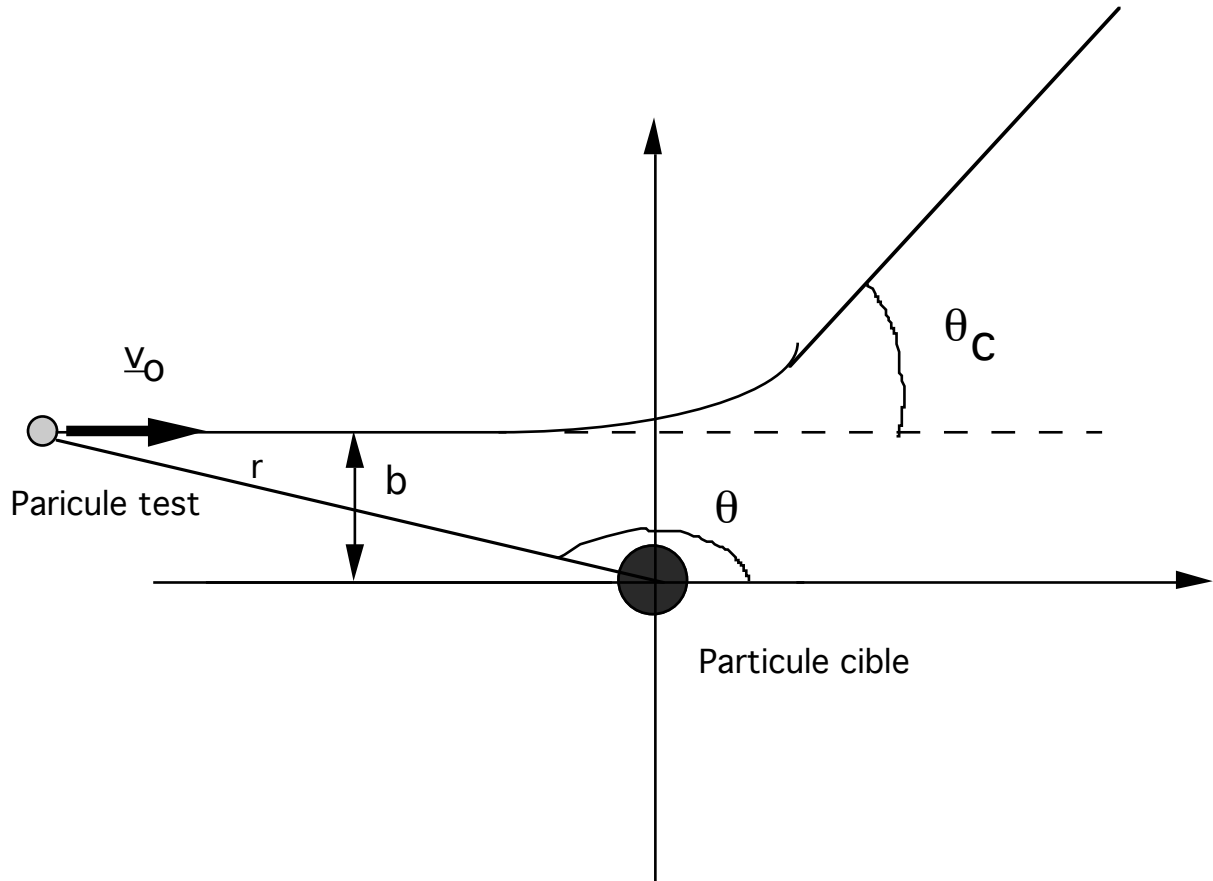


Figure 1

La manière de résoudre l'équation (3) peut être trouvée dans les livres de mécanique classique (voir p.ex. H. Goldstein, Classical Mechanics). Le mouvement est plan. La trajectoire en coordonnées cylindriques est donnée par (Figure 1) :

$$\frac{1}{r} = B \cos(\theta + \alpha) - \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \mu v_0^2 b^2} \quad (4)$$

$b$  est le paramètre d'impact de la collision (Figure 1) .

Les quantités  $B$  et  $\alpha$  sont définies par les conditions initiales :

$$t=0, r(t=0) = r_0 = \text{infini},$$

$$\theta(t=0) = \pi,$$

$$\dot{r}(t=0) = -v_0,$$

$$r_0^2 \dot{\theta}(t=0) = \text{Moment angulaire / masse réduite} = \text{Constante du mouvement} = - \|\underline{r} \times \underline{v}\| = -v_0 b$$

Donc :

$$0 = -B \cos \alpha - \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 \mu v_o^2 b^2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = - \frac{1}{B} \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 \mu v_o^2 b^2} \quad (5)$$

En dérivant l'équation (4) par rapport au temps, on obtient la valeur de la dérivée de  $r$  :

$$\frac{dr}{dt} = r^2 B \sin(\theta + \alpha) \frac{d\theta}{dt}$$

Donc  $-v_o = \dot{r}_o = -r_o^2 B \sin \alpha \dot{\theta}(t=0) = v_o b B \sin \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = - \frac{1}{bB}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4 \pi \epsilon_0 v_o^2 b \mu}{q_1 q_2} \quad (6)$$

$$B^2 = \frac{1}{b^2} + \left( \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 \mu v_o^2 b^2} \right)^2 \quad (7)$$

Calculons maintenant l'angle de déflexion  $\theta_c$  correspondant au temps  $t$  infini. Au temps infini,  $r$  tend vers l'infini. Donc pour  $t$  infini, l'équation du mouvement (4) devient :

$$B \cos(\theta_c + \alpha) = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 \mu v_o^2 b^2} \quad (8)$$

L'équation (8) possède deux solutions possibles entre  $(-\pi, +\pi)$ . La première  $(\theta + \alpha)$  vaut  $(-\pi + \alpha)$ , en utilisant l'équation (5). La deuxième vaut donc :

$$\theta_c + \alpha = -(-\pi + \alpha)$$

$$\theta_c = (-\pi + 2\alpha) \quad \square \square \square$$

En rappelant que l'angle  $\alpha$  ne dépend que du paramètre d'impact  $b$  (Equation 6), on note que *l'angle de déflexion  $\theta_c$  ne dépend que du paramètre*

*d'impact*  $b$ . En effet en combinant les équations (6) et (9), nous obtenons une relation entre l'angle de déflexion  $\theta_c$  et le paramètre d'impact  $b$  :

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi - \theta_c}{2} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \left( \frac{\theta_c}{2} \right)}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_c}{2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 \mu v_o^2 b} = \frac{b_0}{b} \quad (10)$$

Notons que  $\theta_c$  n'est l'angle de déflexion de la particule test que si l'on suppose que la particule cible reste immobile. Si la particule cible bouge, lors de la collision, ceci n'est plus le cas (cf. par exemple H. Goldstein).

Nous nous plaçons pour le reste des calculs dans le référentiel du centre de masse, où  $\theta_c$  est l'angle de déflexion. Selon (10) toutes les particules qui ont un paramètre d'impact entre  $b$  et  $b+db$  vont être diffusées dans un angle  $\theta_c$  et  $\theta_c + d\theta_c$ . Soit un flux incident  $j$  de particules test. On définit la section efficace de diffusion différentielle  $d\sigma(\theta_c)/d\Omega$  dans la direction  $\theta_c$  par :

$$\frac{\text{Nombre de particules } dN \text{ diffusées dans l' angle solide } d\Omega \text{ par unité de temps}}{\text{Flux de particules incidentes}}$$

L'angle solide  $d\Omega$  représente l'aire de la surface sur la sphère unité définie par  $\theta_c$  et  $\theta_c + d\theta_c$ :

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta_c d\theta_c$$

$$\Omega = 2\pi (1 - \cos \theta_c)$$

Donc :

$$dN = j 2\pi b db = j [d\sigma(\theta_c)/d\Omega] d\Omega = j [d\sigma(\theta_c)/d\Omega] 2\pi \sin \theta_c d\theta_c$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta_c) = \frac{b}{\sin \theta_c} \left| \frac{db}{d\theta_c} \right| = \frac{b}{2 \sin \frac{\theta_c}{2} \cos \frac{\theta_c}{2}} \left| \frac{db}{d\theta_c} \right|$$

En dérivant  $\operatorname{tg}(\theta_c/2)$  par rapport à  $b$ , on obtient alors  $db/d\theta_c$  :

$$\left| \frac{db}{d\theta_c} \right| = b_0 \frac{1}{2 \sin^2(\theta_c/2)}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta_c) = \left| \frac{1}{2} \frac{b_0}{\sin(\theta_c/2) \cos(\theta_c/2)} \times \frac{1}{\text{tg}(\theta_c/2)} \times \frac{b_0}{2 \sin^2(\theta_c/2)} \right|$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta_c) = \frac{1}{4} \left( \frac{b_0}{\sin^2(\theta_c/2)} \right)^2 \quad (11)$$

La formule (11) donne la section efficace de Rutherford. Notez, pour un angle de diffusion  $\theta_c$  donné, la section efficace varie en  $(v_0)^{-4}$  puisque  $b_0$  varie en  $(v_0)^{-2}$ .

Pour illustrer ces calculs, considérons la déflexion d'un électron par un ion immobile de charge  $e$ . La valeur de  $\theta_c$  est donnée par :

$$\text{tg} \frac{\theta_c}{2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v_0^2 b}$$

Le paramètre d'impact  $b_{90^\circ}$  qui donne lieu à une déflexion de  $90^\circ$  est :

$$b_0 = b_{90^\circ} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v_0^2}$$

Toutes les particules qui ont un paramètre d'impact  $b < b_{90^\circ}$  seront diffusées dans un angle égal ou supérieur à  $90^\circ$ . On peut donc calculer la section efficace pour des collisions qui donnent lieu à des déflexions supérieures à  $90^\circ$  comme :

$$\sigma(\theta_c \geq 90^\circ) = \int_{\theta_c=\pi/2}^{\theta_c=\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega_c = \int_{\theta_c=\pi/2}^{\theta_c=\pi} \frac{1}{4} \frac{b_0}{\sin^2(\frac{\theta}{2})^4} d\Omega$$

$$\sigma(\theta_c \geq 90^\circ) = \pi b_0^2 = \pi \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v_0^2} \right)^2 = \frac{1.6 \times 10^{-18}}{E_{cin}^2 [eV]} [m^2]$$

Pour un électron test de 1 keV d'énergie cinétique, on a :

$$\sigma(\theta_c \geq 90^\circ) = 1.6 \times 10^{-20} \text{ cm}^2$$

$$b_{90^\circ} = 7.2 \times 10^{-11} \text{ cm}$$

## II) Le logarithme coulombien $\ln \Lambda$

Montrons que dans un plasma les collisions qui donnent lieu à de petites déflexions dont l'effet cumulé donne lieu à une grande déflexion sont beaucoup plus fréquentes que les collisions qui donnent lieu en une fois à une grande déflexion. Nous considérons de nouveau les collisions d'électrons avec des ions immobiles. Rappelons :

$$\text{tg} \frac{\theta_c}{2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 \mu v_o^2 b} = \frac{b_0}{b}$$

Pour des faibles déflexions  $\theta_c = \Delta\theta \ll 1$  □□□□□□□□□□□□□□□□

$$\text{tg} \frac{\theta_c}{2} = \frac{\theta_c}{2} = \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{b_0}{b} \Rightarrow \Delta\theta^2 = 4 \frac{b_0^2}{b^2}$$

Pour une collision avec paramètre d'impact  $b$  on a :

$$\Delta\theta_{1col}^2 = 4 \frac{b_0^2}{b^2}$$

La moyenne de  $\Delta\theta_{1col}$  sur tous les paramètres d'impact est nulle car c'est une marche aléatoire.

La moyenne de  $\Delta\theta_{1col}^2$  sur tous les paramètres d'impact est non-nulle :

$$\langle \Delta\theta^2 \rangle_{1col} = \frac{1}{\pi b_{\max}^2} \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \Delta\theta_{1col}^2 2\pi b db = \frac{1}{\pi b_{\max}^2} \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} 4 \frac{b_0^2}{b^2} 2\pi b db \quad (12)$$

$$\langle \Delta\theta^2 \rangle_{1col} = 8 \frac{b_0^2}{b_{\max}^2} \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right) = 8 \frac{b_0^2}{b_{\max}^2} \ln(\Lambda)$$

On note que l'expression (12) contient une divergence logarithmique si aucun choix de  $b_{\max}$  n'est spécifié. Dans un plasma, le champ coulombien

est écranté partir d'une distance égale à la distance de Debye  $\lambda_D$  : on prendra donc  $b_{\max}$  égal à  $\lambda_D$

$$b_{\max} = \lambda_D = \left( \frac{\epsilon_0 k_B T}{n e^2} \right)^{1/2} \quad (13)$$

Pour  $b_{\min}$  on remarquons que nous avons considéré seulement des faibles déflections  $\Delta\theta$ . On peut choisir arbitrairement  $b_0$ .

On voit que les valeurs exactes de  $b_{\max}$  et  $b_{\min}$  ne sont pas importantes car elles apparaissent comme argument d'un logarithme.

Sur un temps  $t$ , l'électron subit  $n_i \pi b_{\max}^2 v t$  sur les ions. Puisqu'on a des processus indépendant, il vient:

$$\langle \Delta\theta^2 \rangle(t) = \langle \Delta\theta^2 \rangle_{1col} n_i \pi b_{\max}^2 v t = 8\pi n_i \pi b_0^2 \ln(\Lambda) v t \quad (14)$$

En posant  $t = \tau_{90}$ , on trouve la condition pour une deflexion de 90 degrés due à des multiples déflections à petit angle:

$$\langle \Delta\theta^2 \rangle(t) = \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 = 8\pi n_i \pi b_0^2 \ln(\Lambda) v \tau_{90}$$

La fréquence de collision pour une déflexion à 90 degrés est donc:

$$\nu_{90} = \frac{1}{\tau_{90}} = \frac{32}{\pi} n_i b_0^2 \ln(\Lambda) v$$

A partir de la relation  $\nu_{90} = n_i \sigma_{90} v$  on trouve

$$\sigma_{90^\circ} = \frac{32}{\pi} b_0^2 \ln(\Lambda) \quad (16)$$

Calculons une valeur numérique de  $\sigma_{90}$ . Les valeurs de  $\ln\Lambda$  sont typiquement de l'ordre de 10-20 pour les plasmas d'intérêt.

Température	Densité n		
	10 <sup>9</sup> cm <sup>-3</sup>	10 <sup>12</sup> cm <sup>-3</sup>	10 <sup>15</sup> cm <sup>-3</sup>
10 <sup>4</sup> ° K	12.8	5.97	5.97
10 <sup>6</sup> ° K	19.3	15.9	12.4
10 <sup>8</sup> ° K	24	20.6	17

Valeur de  $\ln\Lambda$  en fonction de la température T et de la densité n

Le rapport entre la section efficace  $\sigma_{90}$  et celle correspondante à une collision donnant lieu à une grand angle de déflexion ( $\geq 90$  degrés),  $\sigma(\geq 90)_{col}$ , est:

$$\frac{\sigma_{90}}{\sigma(\geq 90)_{col}} = \frac{32}{\pi^2} \ln(\Lambda)$$

Pour  $\ln\Lambda = 20$ , on a

$$\sigma_{90} = \frac{2.6 \times 10^{-16}}{E_{cin}^2 [eV]} [m^2]$$

ce qui est environ à 65 fois la valeur de la section efficace correspondante à des collisions donnant lieu à une grande déflexion.

*Dans un plasma, les petites déflexions donnant lieu d'une manière cumulée à une grande déflexion sont plus nombreuses que les collisions qui donnent lieu en une fois à une grande déflexion.*

Le libre parcours moyen  $\lambda_{mfp}$  est donc :

$$\lambda_{mfp} = \frac{1}{n\sigma_{90^\circ}} = \frac{2\pi\epsilon_0^2 m_e^2 v_0^4}{ne^4 \ln \Lambda}$$

La fréquence de collision  $\nu$  est alors :

$$\nu = \frac{v_0}{\lambda_{mfp}} = \frac{ne^4 \ln \Lambda}{2\pi\epsilon_0^2 m_e^2 v_0^3}$$



*La fréquence de collision varie comme  $1/v_0^3$  : les particules tests de très grande vitesse ne ressentent plus les collisions coulombiennes !*

### III) Fréquence de collisions dans un plasma

Dans un plasma le calcul des fréquences de collisions doit tenir compte de plusieurs facteurs. Pour se fixer les idées, discutons du cas des collisions coulombiennes des électrons (particules test) avec de ions (particules cibles). Tout d'abord, même si la masse des ions est beaucoup plus grande que celle des électrons, les ions lors de la collision ne restent pas immobiles. Donc  $\underline{r} = \underline{r}_1 - \underline{r}_2$  ne décrit pas le mouvement de la particule test (les électrons), et en particulier  $\theta_c$  n'est plus l'angle de déflexion. (Ce problème est traité dans les cours de mécanique générale). Mais la complexité ne vient pas principalement de ce point. Dans un plasma, les électrons et les ions ont une distribution de vitesse et tous les calculs doivent tenir compte de ce fait.

Nous n'allons pas faire le calcul en détail (c.f. Goldston "Introduction to Plasma Physics" chap. 11.2), mais simplement donner les diverses fréquences de collisions, en prenant des fonctions de distribution maxwellienne :

Fréquence de collision électron – ions  $\nu_{e-i}$ :

$$\nu_{ei} = \frac{\sqrt{2} n_i Z^2 e^4 \ln \Lambda}{12 \pi^{3/2} \epsilon_0^2 m_e^{1/2} T_e^{3/2}}$$

où  $n_i$  est la densité ionique,  $Z$  la charge des ions,  $m_e$  la masse des électrons et  $T_e$  la température électronique exprimé en eV.

Fréquence de collision électron-électron  $\langle \nu_{e-e} \rangle$  :

$$\langle \nu_{e-e} \rangle = \frac{n_e e^4 \ln \Lambda}{\epsilon_0^2 m_e^{1/2} T_e^{3/2}} = \frac{\nu_{e-i}}{n_i Z^2 / n_e}$$

$n_e$  étant la densité électronique et  $\langle \dots \rangle$  indique que la moyenne est prise sur une fonction de distribution maxwellienne.

Fréquence de collision ion-ion  $\langle \nu_{i-i} \rangle$ :

$$\langle \nu_{i-i} \rangle = \frac{n_i Z^4 e^4 \ln \Lambda}{12 \pi^{3/2} \epsilon_0^2 m_i^2 T_i^{3/2}} = \frac{\langle \nu_{e-i} \rangle Z^2}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2}$$

où  $m_i$  est la masse des électrons et  $T_i$  la température ionique exprimée en eV.

Pour un plasma d'hydrogène avec une densité  $n$  et  $\ln \Lambda$  de l'ordre de 20, nous avons :

$$\langle \nu_{e-e} \rangle [\text{s}^{-1}] = \langle \nu_{e-i} \rangle [\text{s}^{-1}] = 5 \times 10^{-11} n [\text{m}^{-3}] / T_e^{3/2}$$

$$\langle \nu_{i-i} \rangle [\text{s}^{-1}] = 10^{-12} n [\text{m}^{-3}] / T_i^{3/2}$$

#### IV) Phénomènes de transport

Les phénomènes de collisions que nous avons décrits auparavant nous permettent maintenant de définir les coefficients de transport dans un plasma.

##### A) Résistivité électrique

Considérons le cas de la résistivité électrique  $\eta^1$  :

$$\underline{E} = \eta \underline{j}$$

La densité de courant électrique  $\underline{j}$  est définie par :

$$\underline{j} = -ne \underline{u}_e$$

où  $\underline{u}_e$  est la vitesse des électrons. A l'équilibre, la relation entre le champ électrique  $\underline{E}$  et  $\underline{u}_e$  est :

$$-e\underline{E} - m_e \langle v_{e-i} \rangle \underline{u}_e = 0 \quad (17)$$

L'équation 17 exprime simplement que le champ électrique  $\underline{E}$  doit compenser la perte d'impulsion due aux collisions. Nous avons donc immédiatement :

$$\underline{j} = -ne\underline{u}_e = -e^2 n \underline{E} / m_e \langle v_{e-i} \rangle = \underline{E} / \eta$$

$$\eta = m_e \langle v_{e-i} \rangle / (ne^2)$$

$$\eta = \frac{\sqrt{2} m_e^{1/2} Z e^2 \ln \Lambda}{12 \pi^{3/2} \epsilon_0 T_e^{3/2}} \quad (18)$$

La résistivité  $\eta$ , selon l'équation 18, est inversement proportionnelle à  $T_e^{3/2}$  : plus le plasma est chaud, moins il est résistif. Ce fait est différent de la résistivité électrique dans les métaux qui augmente avec la température et rend impraticable le chauffage par effet Joule d'un plasma jusqu'au domaine de température où les réactions de fusion ont lieu.

---

<sup>1</sup> En général la résistivité est un tenseur. La conductibilité  $\sigma$  est définie comme  $1/\eta$ .

Lorsque l'on calcule précisément la résistivité, on constate que le résultat (18) est une surestimation d'un facteur 2. Ceci provient du fait que la fréquence de collision  $\langle v_{e-i} \rangle$  a été calculée avec de fonctions de distribution maxwellienne, alors que dans la réalité en présence de courant celles ci sont déformées. *La valeur correcte de la résistivité est donc :*

$$\eta = \frac{\sqrt{2} m_e^{1/2} Z e^2 \ln \Lambda}{24 \pi^3 \epsilon_0^2 T_e^{3/2}} \quad [\Omega m]$$

où  $T_e$  est exprimé en eV et  $Z$  la charge du ion<sup>2</sup>. Pour un plasma d'hydrogène ( $Z = 1$ ), la résistivité est donnée par :

$$\eta = 5 \times 10^{-5} \ln \Lambda / T_e^{3/2} \quad [\Omega m]$$

Pour  $T_e = 100$  eV, il a une conductibilité comparable à celle de l'acier ( $7 \times 10^{-7} \Omega m$ ). A 1 keV, la conductibilité est inférieure à celle du cuivre ( $2 \times 10^{-8} \Omega m$ ).

### B) Transfert d'énergie

Dans un plasma qui n'est pas encore à l'équilibre thermodynamique, nous pouvons nous poser la question à quelles échelles de temps les diverses composantes (électrons et ions) se thermalisent.

Nous donnons ici seulement sans démonstration les divers temps de thermalisation :

- Temps  $\tau_{eq\ ee}$  pour que les électrons se thermalisent entre eux :

---

<sup>2</sup> Pour un plasma contenant plusieurs espèces d'ions,  $Z$  est remplacé par  $Z_{eff}$  :

$$Z_{eff} = \frac{\sum_j n_j Z_j^2}{\sum_j n_j Z_j}$$

$$\tau_{\text{eq ee}} = 1.22 \times 10^6 \frac{T_e^{3/2}}{n \ln \Lambda} \text{ [s]},$$

$$[T_e] = \text{eV}, [n] = \text{cm}^{-3}$$

$$\nu_{\text{eq ee}} = \frac{1}{\tau_{\text{eq ee}}} = 8.2 \times 10^{-7} n \ln \Lambda T_e^{-3/2}, \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

- Temps  $\tau_{\text{eq ii}}$  pour que les ions se thermalisent entre eux :

$$\tau_{\text{eq ii}} = 5.26 \times 10^7 \frac{T_i^{3/2}}{n Z^2 \mu^{-1/2} \ln \Lambda} \text{ [s]},$$

$$\text{avec } [T_e] = \text{eV}, [n] = \text{cm}^{-3}, \mu = m_i/m_{\text{proton}}$$

$$\nu_{\text{eq ii}} = \frac{1}{\tau_{\text{eq ii}}} = 1.9 \times 10^{-8} n Z^2 \mu^{-1/2} \ln \Lambda T_e^{-3/2}, \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

- Temps  $\tau_{\text{eq}}$  pour que les électrons et les ions se thermalisent entre eux :

$$\tau_{\text{eq}} = 3.13 \times 10^8 \frac{T^{3/2}}{n Z^2 \mu^{-1} \ln \Lambda} \text{ [s]},$$

$$[T] = \text{eV}, [n] = \text{cm}^{-3}, \mu = m_i/m_{\text{proton}}$$

$$\nu_{\text{eq}} = \frac{1}{\tau_{\text{eq}}} = 3.2 \times 10^{-9} n Z^2 \mu^{-1} \ln \Lambda T^{-3/2}, \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

On note que :

$$\tau_{\text{eq ee}} < \tau_{\text{eq ii}} < \tau_{\text{eq}}$$