

Introduction à la Physique des Plasmas I

EPFL — 2005

Cours du 18 mai 2005 et du 25 mai 2005

1 Ondes dans un plasma dans le modèle à deux fluides

Nous allons considérer les ondes dans un plasma en utilisant le modèle à deux fluides. Nous supposons que le plasma est formé d'ions (indice i) une fois chargés et d'électrons (indice e). Les équations de base sont:

Equations fluides:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \nabla \cdot (n_k \mathbf{u}_k) = 0 \quad k = i, e \quad (1)$$

$$n_k m_k \left[\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t} + (\mathbf{u}_k \cdot \nabla) \mathbf{u}_k \right] = -\nabla p_k + n_k q_k (E + \mathbf{u}_k \wedge \mathbf{B}) + \sum_{k \neq l} \mathbf{R}_{kl}, \quad k = i, e \quad (2)$$

Le terme \mathbf{R}_{kl} tient compte des collisions coulombiennes entre différentes espèces avec:

$$\mathbf{R}_{kl} = n_k m_k \nu_{kl} (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_k) = -\mathbf{R}_{lk}, \quad (3)$$

avec ν_{kl} étant la fréquence de collision entre l'espèce k et l . On avait vu que $\nu \sim T^{-3/2}$, avec T étant la température du plasma. Dans l'étude des ondes faite dans ce chapitre on va négliger ce terme ($\mathbf{R}_{kl} = 0$) ce qui se justifie par le fait que, comme on le verra, les échelles de temps typiques des ondes supportées par le plasma sont en général beaucoup plus rapides que les échelles de temps collisionnelles pour des plasmas chauds, c.à d. avec des températures élevées.

Avec cette approximation ($\mathbf{R}_{\mathbf{k}l} = 0$) on parle de plasma non-collisionnel et l'équation de Newton devient:

$$n_k m_k \left[\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t} + (\mathbf{u}_k \cdot \nabla) \mathbf{u}_k \right] = -\nabla p_k + n_k q_k (\mathbf{E} + \mathbf{u}_k \wedge \mathbf{B}), \quad k = i, e \quad (4)$$

Equation d'état :

$$\frac{d(p_k n_k^{-\gamma_k})}{dt} = 0, \quad k = i, e \quad (5)$$

Equations de Maxwell¹:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (6)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (7)$$

avec $\mathbf{j} = \sum_k q_k n_k \mathbf{u}_k$. Pour un plasma d'hydrogène on a $\mathbf{j} = e(n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e)$.

La densité de courant $j(\mathbf{x}, t)$ et la densité de charge $\rho_{el}(\mathbf{x}, t)$ sont les termes de sources des équations de Maxwell.

Le but est l'étude des diverses ondes qui peuvent se propager dans le plasma. Pour cela en principe nous devons résoudre les équations, 1,4-7, ci-dessus. Selon les problèmes, nous ferons des approximations de ces équations. Naturellement, nous devons justifier ces approximations et vérifier que les résultats obtenus sont consistants avec ces approximations². On va utiliser les différentes approximations dans l'études des ondes dans un plasma non-magnétisé.

¹Nous serons amenés à utiliser l'équation de Poisson dans certains cas pour simplifier les calculs.

²Pour l'équation de Newton, en fonction de l'échelle temporelle caractéristique ($\tau \sim 1/\omega$) de l'onde que l'on étudie on peut distinguer les situations suivantes:

1. Echelle de temps rapide:
on peut supposer certaines espèces immobiles (typiquement les ions).
2. Echelle de temps moyenne:
on inclus les effets d'inertie pour toutes les espèces.
3. Echelle de temps lentes:
on peut supposer certaines espèces proches de l'équilibre thermodynamique ce qui signifie qu'elles obéissent à une distribution de Boltzmann (typiquement pour les électrons dans leur mouvement \parallel aux lignes de champ magnétique).

Mais qu'appelons nous " étude des ondes " ? Nous entendons par là l'étude des perturbations du milieu qui ont une dépendance spatio-temporelle et qui s'y propagent. Nous supposons qu'elles ont une fréquence ω et un vecteur d'onde \mathbf{k} . Nous devons déterminer:

- la relation de dispersion $\omega = \omega(\mathbf{k})$;
- les quantités qui sont perturbées;
- la polarisation de l'onde, c'est-à-dire la direction du champ \mathbf{E} par rapport à \mathbf{k}

Les équations fluides étant non linéaires, nous allons les linéariser et de plus, nous allons simplifier le problème en passant de l'espace (\mathbf{x}, t) à l'espace de Fourier (ω, \mathbf{k}) .

1.1 Technique mathématique

On va utiliser une expansion en modes propres (superposition d'ondes planes), ce qui correspond de considérer dans un milieu infini toute quantité physique $(n(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \dots)$ dans l'espace de Fourier.

La transformée de Fourier (TF) d'une quantité $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ est définie comme:

$$\tilde{\mathbf{g}}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3x \int dt \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}, \quad (8)$$

où $\tilde{\mathbf{g}}$ est un champ vectoriel avec des composantes en général complexes. Puisque $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ représente une grandeur physique (dans le cas d'un champ vectoriel, les composantes sont réelles), $\tilde{\mathbf{g}}(\omega, \mathbf{k})$ doit satisfaire une condition de réalité:

$$\tilde{\mathbf{g}}(\omega, \mathbf{k}) = \tilde{\mathbf{g}}^*(-\omega, -\mathbf{k}) \quad (9)$$

où * est le complexe conjugué.

La transformée inverse est donnée par:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \int d^3k \int d\omega \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}, \quad (10)$$

qui est en fait une superposition d'ondes planes d'amplitude $\tilde{\mathbf{g}}(\omega, \mathbf{k})$.

Pour une onde plane monochromatique de fréquence angulaire ω_0 et de vecteur d'onde \mathbf{k}_0 :

$$\tilde{\mathbf{g}}(\omega, \mathbf{k}) = \tilde{\mathbf{A}}(\omega_0, \mathbf{k}_0) \delta(\omega - \omega_0) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \quad (11)$$

ce qui permet d'écrire $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ comme:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[\tilde{\mathbf{A}}(\omega_0, \mathbf{k}_0) e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x})} \right]. \quad (12)$$

La TF est une opération linéaire. L'idée de base de décrire les grandeurs physiques dans l'espace de Fourier est qu'on décompose un problème compliqué, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$, en plusieurs problèmes simples pour ensuite recombinaison la solution des problèmes simples (TF inverse) ce qui permet de trouver la solution complète. Cette procédure implique que le problème à résoudre doit être linéaire et donc une linéarisation des équations fluides.

Prenons comme exemple l'équation de continuité:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0, \quad (13)$$

où $n \equiv n(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Le terme non-linéaire dans l'équation de continuité est donné par le produit $n\mathbf{u}$.

La procédure de linéarisation et passage dans l'espace de Fourier est la suivante:

1. On choisit une condition d'équilibre, qui, dans un plasma infini homogène peut être donnée par:

$$n_0(\mathbf{x}) = n_0 \quad (\text{uniforme}), \quad \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = 0. \quad (14)$$

2. On considère une petite perturbation de l'équilibre:

$$n = n_0 + n_1(\mathbf{x}, t), \quad \text{avec,} \quad \left| \frac{n_1}{n_0} \right| \ll 1. \quad (15)$$

Puisque la vitesse fluide $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ est nulle, la vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ s'exprime comme:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t). \quad (16)$$

3. Linéarisation — on garde uniquement les termes de premier ordre pour obtenir l'équation de continuité linéarisée:

$$\frac{\partial(n_0 + n_1)}{\partial t} + \nabla \cdot ((n_0 + n_1)\mathbf{u}_1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0. \quad (17)$$

4. On considère maintenant l'expansion en modes normaux, c.à d. que l'on considère la TF des grandeurs perturbées.:

$$n_1(\mathbf{x}, t) = \int d^3k \int d\omega \tilde{n}_1(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \quad (18)$$

et de même pour $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)$.

En utilisant ces expressions, l'équation de continuité peut s'écrire comme:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int d^3k \int d\omega \tilde{n}_1(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right\} \\ & + n_0 \nabla \cdot \left\{ \int d^3k \int d\omega \tilde{\mathbf{u}}_1(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right\} \\ & = \int d^3k \int d\omega [i\omega \tilde{n}_1(\mathbf{k}, \omega)] e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \\ & + n_0 \int d^3k \int d\omega [-i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_1(\mathbf{k}, \omega)] e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} = 0. \quad (19) \end{aligned}$$

On remarque que formellement, en passant dans l'espace de Fourier on peut faire les substitutions suivantes³:

$$\nabla \cdot \rightarrow -i\mathbf{k} \cdot, \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega. \quad (21)$$

Dans notre exemple l'équation de continuité devient:

$$-i\omega \tilde{n}_1 + in_0 \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_1 = 0. \quad (22)$$

Dans ce qui suit, pour alléger la notation, on omettra le tilde.

On remarque que cette procédure à permis de transformer une équation linéaire aux dérivées partielles en une équation algébrique pour les quantités perturbées décrites dans l'espace de Fourier .

³Si on avait d'autres opérateurs de dérivation spatiales comme le rotationnel ou le gradient on aurait respectivement les substitutions suivantes: $\nabla \wedge \rightarrow -i\mathbf{k} \wedge, \nabla \rightarrow -i\mathbf{k}$

En appliquant la procédure décrite avant au système d'équations 1,4-7 on transforme le système d'équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques. On montrera que:

$$\mathbf{j}_1(\omega, \mathbf{k}) = \underline{\underline{\sigma}}(\omega, \mathbf{k})\mathbf{E}_1(\omega, \mathbf{k}) \quad (23)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}(\omega, \mathbf{k})$ est le tenseur de conductivité.

La solution du système d'équations dans l'espace de Fourier permettra de calculer les grandeurs suivantes:

- La relation de dispersion: $\omega = \omega(\mathbf{k})$.
- La vitesse de phase: $\mathbf{v}_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} \frac{\mathbf{k}}{k}$
- La vitesse de groupe: $\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$
- La polarisation de l'onde: p.ex. la direction du champ perturbé $\mathbf{E}_1(\omega, \mathbf{k})$ par rapport au vecteur d'onde \mathbf{k} .
- Les quantités perturbées: $\mathbf{E}_1(\omega, \mathbf{k}), \mathbf{B}_1(\omega, \mathbf{k}), n_1(\omega, \mathbf{k}), \mathbf{u}_1(\omega, \mathbf{k}), p_1(\omega, \mathbf{k}), \dots$

Rappelons brièvement les définitions de vitesse de phase et de groupe.

1.2 Vitesse de phase et de groupe

1.2.1 Vitesse de phase

$$\mathbf{v}_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} \frac{\mathbf{k}}{k}. \quad (24)$$

La vitesse de phase **peut** être telle que $|\mathbf{v}_{\text{ph}}| \geq c$, puisque \mathbf{v}_{ph} ne transporte pas de l'énergie, de l'information.

Exemple:

- Onde électromagnétique (EM) dans le vide:
La relation de dispersion est : $\omega = ck$, avec c étant la vitesse de la lumière.
d'où la vitesse de phase⁴: $v_{\text{ph}} = c$.

⁴Une onde non-dispersive dans un milieu infini devient en général dispersive dans un milieu fini comme par exemple une onde EM dans un guide d'onde vide.

- Onde sonore (c.f. exercices) $v_{ph} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$, avec γ le coefficient adiabatique, p_0 la pression d'équilibre et ρ_0 la densité de masse.

1.2.2 Vitesse de groupe

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \quad (25)$$

La vitesse de phase **ne peut pas** être $|\mathbf{v}_g| \geq c$, puisque l'énergie, l'information se propagent à la vitesse de groupe.

Démonstration dans le cas uni-dimensionnel:

Phénomène de battement entre deux ondes planes de même amplitude E_0 , mais de fréquence ω_1, ω_2 proches.

Ces deux ondes satisfont la relation de dispersion $\omega = \omega(\mathbf{k})$. A chacune des deux fréquences correspond un vecteur d'onde:

$$\omega_1, \quad k_1 = k_0 - \Delta k/2,$$

$$\omega_2, \quad k_2 = k_0 + \Delta k/2,$$

où k_0 est la moyenne entre k_1 et k_2 avec $\omega_0 = \omega(k_0)$.

En faisant un développement limité autour de k_0 il vient:

$$\omega_1(k_1) = \omega(k_0) - \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_0 \Delta k/2 = \omega_0 - v_g \Delta k/2, \quad (26)$$

$$\omega_2(k_2) = \omega(k_0) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_0 \Delta k/2 = \omega_0 + v_g \Delta k/2, \quad (27)$$

En supposant une polarisation linéaire selon \mathbf{e}_x et un vecteur d'onde $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_x$ (cas d'une onde électrostatique), chacune des deux ondes donne lieu à un champ électrique:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_x E_0 \left[e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} \right], \quad (28)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_x E_0 \left[e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} \right]. \quad (29)$$

Avec la superposition des deux ondes planes donnant un champ électrique total:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{\text{tot}} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_x E_0 \left[e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} \right] \\ &= \mathbf{e}_x E_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \left[e^{i(v_g \Delta k / 2 t - \Delta k / 2 x)} + e^{-i(v_g \Delta k / 2 t - \Delta k / 2 x)} \right].\end{aligned}$$

Ce qui se transforme en:

$$\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{e}_x E_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} 2 \cos \left[\Delta k / 2 (v_g t - x) \right]. \quad (30)$$

L'équation 30 correspond à la propagation d'un paquet d'onde avec une enveloppe qui se propage à la vitesse de groupe v_g . On peut généraliser ceci au cas tri-dimensionnel et pour une superposition infinie d'ondes planes ce qui permet de retrouver l'équation 25.

2 Etudes de quelques cas simple dans un plasma non-magnétisé, $\mathbf{B}_0 = 0$, modèle deux fluides.

Nous commencerons par définir un état d'équilibre qui décrit le milieu dans lequel les ondes vont se propager. Nous choisissons cet équilibre comme étant défini par:

$$\begin{aligned}n_{e,0} &= n_{i,0} = n_0 \\ \mathbf{u}_{e,0} &= \mathbf{u}_{i,0} = 0 \\ \mathbf{E}_0 &= \mathbf{B}_0 = 0\end{aligned}$$

Selon les cas nous choisirons une pression p_k nulle ou différente de 0.

Les quantités décrivant l'onde sont considérées comme de faibles perturbations de l'équilibre, ce qui nous amènera d'utiliser la technique mathématique décrite auparavant (c.f. 1.1).

2.1 Ondes électromagnétiques transverses

Nous supposons que la fréquence de l'onde est telle que seuls les électrons peuvent réagir à l'onde. Les ions ne jouent aucun rôle dans la propagation de

l'onde. De plus nous allons négliger le terme de pression p_e dans l'équation de Newton, ce qui rend superflue l'équation d'état. Cette dernière hypothèse est appelée hypothèse du **plasma froid (la pression \mathbf{p} est nulle, $\mathbf{p} = \mathbf{0}$)**.

L'onde est **transverse**, c'est-à-dire que **le champ \mathbf{E} est perpendiculaire au vecteur d'onde \mathbf{k}** .

Nous avons donc:

$$n_e = n_0 + \varepsilon n_{e1}$$

$$\mathbf{u}_e = \varepsilon \mathbf{u}_{e1}$$

$$\mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{B} = \varepsilon \mathbf{B}_1$$

La quantité ε est juste là pour nous faciliter le développement en série de perturbations et nous permettre de ne retenir que les termes au premier ordre en ε^5 . En remplaçant les quantités n_e , \mathbf{u}_e , \mathbf{E} et \mathbf{B} dans les équations de base et en ne gardant que les termes ne contenant que ε , nous avons:

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_{e1} = 0 \quad (31)$$

$$n_0 m_e \frac{\partial \mathbf{u}_{e1}}{\partial t} = -e n_0 \mathbf{E}_1 \quad (32)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_1 = \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \quad (33)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B}_1 = \mu_0 (-e n_0 \mathbf{u}_{e1}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (34)$$

On passe ensuite dans l'espace de Fourier en faisant les substitutions décrites auparavant ⁶.

L'onde étant transverse (**\mathbf{k} est perpendiculaire à \mathbf{E}**), en utilisant l'équation de Poisson nous avons:

$$-\varepsilon_0 i \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1 = -n_{e1} e = 0 \quad (35)$$

⁵Il ne faut pas confondre cet ε qui est simplement utilisé pour indiquer le développement en série de perturbation avec la fonction diélectrique relative $\varepsilon(\omega, k)$.

⁶On rappelle que l'utilisation des opérateurs ci-dessus signifie que les grandeurs perturbées sont décrites dans l'espace de Fourier. Dans les équations 35 à 38, les grandeurs perturbées dépendent de ω et \mathbf{k} [p.ex. $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1(\omega, k)$] et pas de t et \mathbf{x} comme dans les équations 31 à 34 où $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1(t, x)$.

Il n'y a pas de perturbation de densité associée à l'onde électromagnétique transverse ($n_{e1} = 0$) et l'équation de continuité ne nous est pas utile.

Les équations 32 à 34 donnent:

$$i\omega \mathbf{u}_{e1} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}_1 \quad (36)$$

$$i\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_1 = i\omega \mathbf{B}_1 \quad (37)$$

$$-i\mathbf{k} \wedge \mathbf{B}_1 = -\mu_0 n_0 e \mathbf{u}_{e1} + \frac{1}{c^2} i\omega \mathbf{E}_1 \quad (38)$$

En combinant les équations 36 à 38 nous arrivons à l'équation suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_1) &= \frac{1}{c^2} \left(\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e} - \omega^2 \right) \mathbf{E}_1 \\ (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{k} - k^2 \mathbf{E}_1 &= \frac{1}{c^2} \left(\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e} - \omega^2 \right) \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_1 \left(k^2 c^2 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e} - \omega^2 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (39)$$

Dans l'équation 39, pour éviter la solution triviale $\mathbf{E}_1 = 0$, il faut que le facteur multiplicatif soit nul, c'est-à-dire:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2 \quad (40)$$

avec

$$\omega_{pe}^2 = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e} \quad (41)$$

L'équation 40 est la relation de dispersion des ondes électromagnétiques transverses dans un plasma. ω_{pe} est appelé fréquence de plasma électronique:

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}} \quad (42)$$

Pour résumer, l'onde électromagnétique transverse dans un plasma a les caractéristiques suivantes:

Polarisation: $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{k}$

Relation de dispersion: $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2$

Quantités perturbées: \mathbf{u}_{e1} , \mathbf{E}_1 , \mathbf{B}_1

\mathbf{u}_{e1} parallèle à \mathbf{E}_1 ; $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{B}_1$.

Toutes les quantités perturbées peuvent être exprimées en fonction de \mathbf{E}_1 .

Pas de perturbation de densité n_{e1} .

Les ions ne sont pas affectés par l'onde. En effet en examinant la relation de dispersion (équation 40 et figure 1) nous voyons que l'onde a une fréquence supérieure à ω_{pe} , fréquence telle que le mouvement des ions n'est pas affecté à cause de leur inertie : selon l'équation 36, la vitesse fluide \mathbf{u}_{i1} est proportionnelle à $1/\omega m_i$, c'est à dire proportionnelle à m_e/m_i , quantité petite. Si nous avons tenu compte des ions la relation de dispersion 40 serait modifiée par l'ajout du terme $\omega_{pi}^2 = \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m_i}$, pour devenir:

$$\omega^2 = (\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2) + k^2 c^2$$

Il est clair que l'on peut négliger ω_{pi} devant ω_{pe} .

Discussion

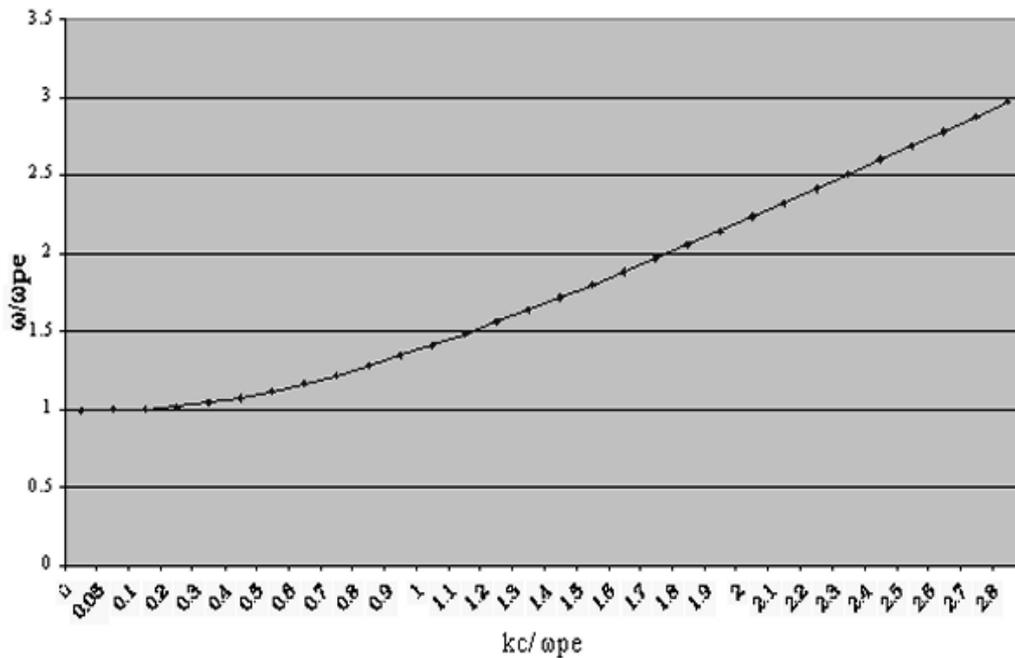


Figure 1: Relation de dispersion des ondes électromagnétiques transverses dans un plasma non magnétisé froid. L'axe vertical est ω/ω_{pe} et l'axe horizontal kc/ω_{pe} .

Fréquence de coupure

Selon la relation de dispersion 40, pour $k \geq 0$, la fréquence est plus grande ou égale à ω_{pe} (voir figure 1). Dit autrement, il n'y a pas d'onde qui se propage en dessous de la fréquence de plasma ω_{pe} .

ω_{pe} est fréquence de coupure pour les ondes électromagnétiques transverses dans un plasma non magnétisé.

Vitesse de groupe et vitesse de phase

La vitesse de phase v_{ph} est:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{\omega_{pe}^2 + k^2 c^2}}{k} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{pe}^2}} > c \quad (43)$$

La vitesse de phase 43 est parallèle à \mathbf{k} et sa valeur supérieure à c . Pour ω tendant vers l'infini, la vitesse de phase tend vers c .

La vitesse de groupe v_g est:

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial \sqrt{\omega_{pe}^2 + k^2 c^2}}{\partial k} \quad (44)$$

$$v_g = c \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega_{pe}^2}{k^2 c^2} + 1}} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}} < c$$

La vitesse de groupe est inférieure à c , comme il se doit. Elle est nulle pour $\omega = \omega_{pe}$, fréquence de coupure.

Nous définissons l'indice n comme:

$$n = \frac{kc}{\omega} \quad (45)$$

Selon les relations constitutives de l'électrodynamique, nous avons:

$$n = \varepsilon^{1/2} \quad (46)$$

où $\varepsilon(\omega, k)$ est la fonction diélectrique. En insérant l'expression 43 dans 46 nous trouvons la fonction diélectrique $\varepsilon(\omega, k)$ correspondant à un plasma où seuls les électrons sont impliqués:

$$\varepsilon(\omega, k) = \frac{\omega^2 - \omega_{pe}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \quad (47)$$

ε tend vers 1 lorsque ω tend vers l'infini. Le plasma se comporte comme le vide à très haute fréquence car les électrons (d'une manière générale les

particules), à cause de leur inertie, n'arrivent plus à " suivre " le mouvement causé par le champ électrique \mathbf{E}_1 .

Notons que l'expression 47 est la même que celle vue au cours de Physique du solide lorsque nous étudions les propriétés électriques d'un conducteur. Les électrons de conduction du métal peuvent librement bouger alors que les ions sont immobiles aux noeuds du réseau cristallin.

Application: Interférométrie pour mesurer la densité n_0 du plasma

Reprenons l'expression du vecteur d'onde k en fonction de la fréquence:

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{pe}^2}}{c} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}}}{c} \quad (48)$$

A une fréquence ω donnée, le vecteur d'onde k est une fonction de la densité n_0 . Si une onde traverse un plasma sur une longueur L , le déphasage $\Delta\Phi$ entre cette onde et une onde de même fréquence qui se propage dans le vide (voir figure 2) est:

$$\Delta\Phi = kL - \frac{\omega}{c}L = \frac{L}{c} \left(\sqrt{\omega^2 - \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}} - \omega \right) \quad (49)$$

Connaissant ω et L , la mesure de $\Delta\Phi$ permet de tirer la valeur de n_0 . Pour mesurer $\Delta\Phi$, la technique utilisée est celle de l'interférométrie. (Cf. Exercices)

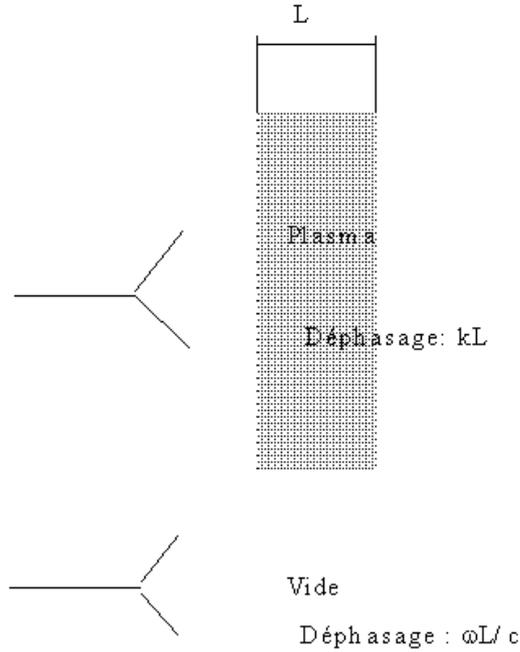


Figure 2:

2.2 Ondes longitudinales (ou électrostatiques) à haute fréquence. Ondes de Langmuir ou Ondes de plasma

2.2.1 Relation de dispersion

Nous appelons **onde longitudinale ou onde électrostatique** une onde ayant le vecteur d'onde \mathbf{k} parallèle à \mathbf{E}_1 . Nous notons tout de suite que pour une telle polarisation le champ magnétique perturbé \mathbf{B}_1 est nul car:

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_1 = \omega \mathbf{B}_1$$

Pour l'étude des ondes électrostatiques, il est alors plus simple d'utiliser l'équation de Poisson $\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{\rho_{el1}}{\varepsilon_0}$ qui dans l'espace de Fourier devient:

$$-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{\rho_{el1}}{\varepsilon_0} \quad (50)$$

Nous avons directement linéarisé les équations et défini la densité de charge perturbée comme ρ_{el1} .

Pour l'étude des ondes de Langmuir, nous supposons que **les ions ne sont**

pas affectés par l'onde, ils sont donc immobiles. Les équations fluides linéarisées pour les électrons sont:

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_{e1} = 0 \quad (51)$$

$$n_0 m_e \frac{\partial \mathbf{u}_{e1}}{\partial t} = -\nabla p_{e1} - n_0 e \mathbf{E}_1 \quad (52)$$

$$n_0^{-\gamma_e} \frac{\partial p_{e1}}{\partial t} - \gamma_e n_0^{-\gamma_e-1} p_{e0} \frac{\partial n_{e1}}{\partial t} = 0 \quad (53)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = -\frac{n_{e1} e}{\varepsilon_0} \quad (54)$$

En considérant des ondes planes (c'est-à-dire en prenant une dépendance selon $\exp[i(\omega t - kz)]$ ⁷, les équations précédentes se ramènent à:

$$\omega n_{e1} - k n_0 u_{e1} = 0 \quad (55)$$

$$n_0 m_e i \omega u_{e1} = i k p_{e1} - n_0 e E_1 \quad (56)$$

$$p_{e1} = \gamma_e \frac{p_{e0}}{n_0} n_{e1} \quad (57)$$

$$-i k E_1 = -\frac{n_{e1} e}{\varepsilon_0} \quad (58)$$

Le système d'équations 55 à 58 forme un système d'équations linéaires sans second membre. Pour éviter la solution triviale $E_1 = n_{e1} = u_{e1} = p_{e1} = 0$, il faut que le déterminant des coefficients soit nul:

$$\begin{vmatrix} \omega & -k n_0 & 0 & 0 \\ 0 & n_0 m_e i \omega & -i k & n_0 e \\ \gamma_e \frac{p_{e0}}{n_0} & 0 & -1 & 0 \\ \frac{e}{\varepsilon_0} & 0 & 0 & -i k \end{vmatrix} = 0 \quad (59)$$

soit:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 \left(\frac{\gamma_e p_{e0}}{n_0 m_e} \right) = \omega_{pe}^2 + k^2 \gamma_e v_{the}^2 \quad (60)$$

avec $v_{the}^2 = \frac{k_B T_e}{m_e}$, en utilisant la relation $p_{e0} = n_0 k_B T_e$. La quantité v_{the} est la vitesse thermique des électrons. La relation de dispersion 60 peut aussi être écrite comme:

$$\frac{\omega^2}{\omega_{pe}^2} = 1 + \gamma_e k^2 \lambda_{De}^2 \quad (61)$$

⁷La direction z est celle du champ électrique, du vecteur vitesse fluide et du vecteur d'onde $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z$.

λ_{De} est la longueur de Debye électronique.

Il nous reste à discuter de la valeur de γ_e . La théorie fluide ne nous donne pas sa valeur. Dans le cadre de la **théorie cinétique**, nous pouvons montrer que γ_e **vaut 3**. La relation de dispersion devient donc:

$$\omega = \omega_{pe}(1 + 3k^2\lambda_{De}^2)^{1/2} \quad (62)$$

Cette relation de dispersion est connue sous le nom de relation de dispersion de Bohm et Gross. Pour de faibles valeurs de $k\lambda_{De}$, nous pouvons développer la racine carrée, ce qui nous donne:

$$\omega = \omega_{pe}\left(1 + \frac{3}{2}k^2\lambda_{De}^2\right) \quad (63)$$

De nouveau nous constatons que le fait que nous avons négligé le mouvement des ions est parfaitement justifié, car la fréquence des ondes est supérieure à ω_{pe} .

La vitesse de phase de cette onde est:

$$v_{ph} = \sqrt{3} v_{the} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{pe}^2}} \quad (64)$$

avec une valeur asymptotique pour $\omega \rightarrow \infty$ de $v_{ph} = \sqrt{3} v_{the}$.

Ce résultat est très important puisque pour une fonction de distribution de vitesse Maxwellienne de température d'équilibre T_{e0} pour les électrons, $f_e(\mathbf{v})$, il peut y avoir certains électrons qui ont une vitesse $v_e \simeq v_{ph}$ (ne pas confondre la vitesse des électrons v_e avec la vitesse fluide u_e). Ce point est crucial lorsqu'on fait un **modèle cinétique** où l'on montre que pour la classe des particules avec $v_e \simeq v_{ph}$ il peut y avoir une **interaction onde-particule en absence de collisions**. Pour une Maxwellienne on montrera (c.f. Cours de Physique des Plasma II) que l'onde est amortie (**amortissement Landau**) ce qui signifie que pour un vecteur d'onde k réel on trouve une fréquence angulaire complexe $\omega = \omega_r + i\omega_i$ avec $\omega_r = \omega_{pe}(1 + 3k^2\lambda_{De}^2)^{1/2}$ et $\omega_i > 0$ qui dépend de la température T_{e0} .

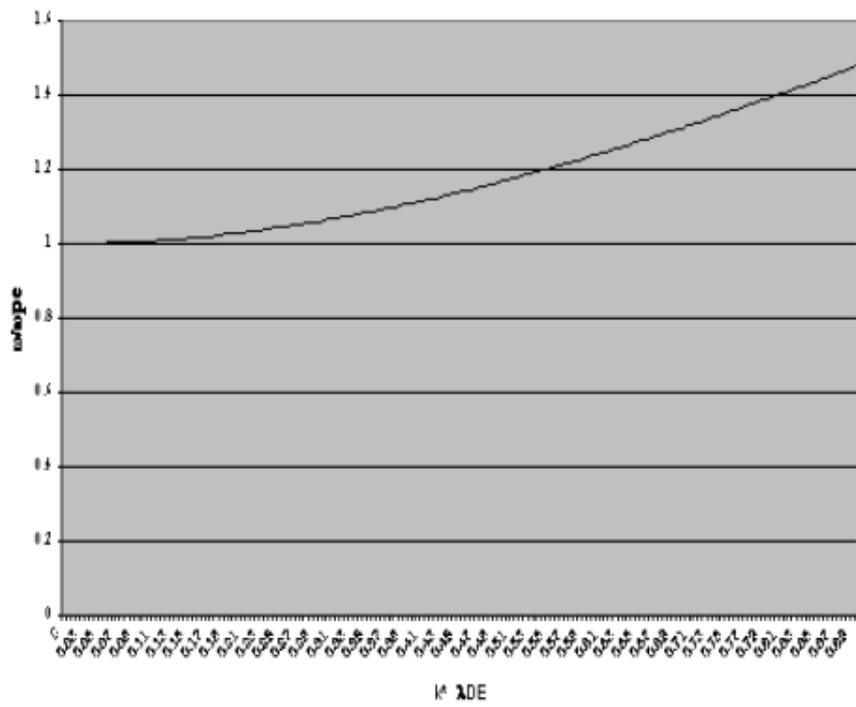


Figure 3: Relation de dispersion de Bohm et Gross. L'axe vertical est ω/ω_{pe} et l'axe horizontal $k\lambda_{De}$

L'onde que nous avons étudiée est connue sous le nom d'**onde de Langmuir** ou encore d'**onde de plasma**. Ses caractéristiques sont:

- Le champ électrique de l'onde est parallèle au vecteur d'onde \mathbf{k} . Il n'y a donc pas de champ magnétique associé à l'onde.
- La relation de dispersion est celle de Bohm et Gross (équation 61)
- Les quantités perturbées sont, outre le champ électrique, la densité électronique, la pression électronique et la vitesse fluide électronique.

2.2.2 Fonction diélectrique

Exprimons n_{e1} en fonction de E_1 grâce aux équations 55 à 58:

$$n_{e1}(-e) = ik\varepsilon_0 \left(-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \gamma_e k^2 v_{the}^2} \right) E_1 \quad (65)$$

Le membre de gauche de l'équation 65 n'est autre que la densité de charge ρ_{e1} due à l'onde. Nous connaissons d'autre part les relations:

$$\nabla \cdot \mathbf{P}_1 = -\rho_{e1}(\mathbf{x}, t) \quad (66)$$

qui dans l'espace de Fourier peut s'écrire comme:

$$\mathbf{P}_1(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_0 \chi_e(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}_1(\omega, \mathbf{k}) \quad (67)$$

où χ_e est la susceptibilité électronique et \mathbf{P}_1 la polarisation électrique. Nous avons donc la relation:

$$\begin{aligned} \chi_e(\omega, k) &= -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \gamma_e k^2 v_{the}^2} \\ \varepsilon(\omega, k) &= 1 + \chi_e = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \gamma_e k^2 v_{the}^2} \end{aligned} \quad (68)$$

La fonction diélectrique $\varepsilon(\omega, k)$ est donnée par la relation 68. Nous retrouvons la formule 47 lorsque le plasma est froid ($T_e = v_{the} = 0$). La connaissance de la fonction diélectrique nous permet de retrouver la relation de dispersion des ondes de Langmuir grâce à l'équation de Poisson:

$$-ikD_1(\omega, k) = 0 \quad (69)$$

avec $D_1(\omega, k) = \varepsilon(\omega, k)E_1$

\mathbf{D}_1 est le vecteur déplacement électrique.

Pour éviter la solution triviale $E_1 = 0$, il faut donc que $\varepsilon(\omega, k)$ soit nul, c'est-à-dire

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \gamma_e k^2 v_{the}^2} = 0$$

soit

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \gamma_e k^2 v_{the}^2$$

Pour une onde électrostatique, la relation de dispersion est obtenue en annulant la fonction diélectrique $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ ⁸.

2.3 Fonction diélectrique: cas général

En exprimant les équations de Maxwell (Eq.6-7) dans l'espace de Fourier nous avons:

$$-i\mathbf{k} \wedge \mathbf{E} = -i\omega\mathbf{B} \quad (70)$$

$$-i\mathbf{k} \wedge \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + \frac{i\omega}{c^2}\mathbf{E} \quad (71)$$

En multipliant (70) par $-i\mathbf{k} \wedge$ et en utilisant (71) on obtient:

$$\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}) = i\mu_0\omega\mathbf{j} - \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}. \quad (72)$$

en utilisant la relation constitutive:

$$\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) = \boldsymbol{\sigma}(\omega, \mathbf{k}) \cdot \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}), \quad (73)$$

et en remplaçant cette dernière équation dans (72), il vient:

$$\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}) = \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{i\boldsymbol{\sigma}(\omega, \mathbf{k})}{\epsilon_0\omega} - \mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{\epsilon}(\omega, \mathbf{k}) \cdot \mathbf{E}. \quad (74)$$

où \mathbf{I} est le dyadique identité:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{ij}. \quad (75)$$

⁸Ce n'est pas le cas pour une onde transverse. Cf. relation de dispersion des ondes transverses.

Le tenseur $\epsilon(\omega, \mathbf{k})$ est le tenseur diélectrique qui est relié à la conductibilité σ et à la susceptibilité χ de la manière suivante:

$$\epsilon = \mathbf{I} - \frac{i\sigma}{\epsilon_0 \omega} = \mathbf{I} + \chi. \quad (76)$$

En développant le double produit vectoriel on peut réécrire le membre de gauche de l'équation (74) comme:

$$\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})\mathbf{k} - k^2\mathbf{E} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{E} \quad (77)$$

avec $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})$ étant un tenseur⁹.

Avec ces définitions, l'équation (74) prend la forme:

$$\left[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega, \mathbf{k}) \right] \cdot \mathbf{E} = \mathbf{M}(\omega, \mathbf{k}) \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (78)$$

La solution non-triviale de cette équation ($\mathbf{E} \neq 0$) se trouve en posant:

$$\det \left[\mathbf{M}(\omega, \mathbf{k}) \right] = 0, \quad (79)$$

ce qui donne,

$$D(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (80)$$

la relation de dispersion.

Dans le cas particulier des **ondes électrostatiques** on a $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) = 0$ et le tenseur $\mathbf{M}(\omega, \mathbf{k})$ se simplifie comme:

$$\mathbf{M}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega, \mathbf{k}) \quad (81)$$

ce qui donne une relation de dispersion pour les **ondes électrostatiques** :

$$\det \left[\epsilon(\omega, \mathbf{k}) \right] = 0. \quad (82)$$

⁹Le double produit vectoriel peut être écrit sous forme dyadique:

$$\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}) = \left[\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} - \mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{E},$$

avec la forme explicite de $\mathbf{k}\mathbf{k}$ en coordonnées cartésiennes étant:

$$\mathbf{k}\mathbf{k} = [k_i k_j] = \begin{pmatrix} k_x^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & k_y^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & k_z^2 \end{pmatrix}$$

2.4 Ondes électrostatiques à basse fréquence: Ondes acoustiques ioniques

2.4.1 Relation de dispersion

Jusqu'à maintenant nous n'avons considéré que des ondes à haute fréquence, ce qui nous avait permis de négliger le mouvement des ions. Nous allons maintenant considérer les ondes à basse fréquence, ce qui nous oblige à considérer le mouvement des ions. Pour simplifier les calculs, nous prenons les équations suivantes:

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_{i1} = 0 \quad (83)$$

$$n_0 m_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} = n_0 e \mathbf{E}_1 \quad (84)$$

$$k_B T_e \nabla n_{e1} = -n_0 e \mathbf{E}_1 \quad (85)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = e \frac{n_{i1} - n_{e1}}{\varepsilon_0} \quad (86)$$

L'équation 83 est l'équation de continuité pour les ions. L'équation 84 est l'équation de Newton dans laquelle nous avons négligé le terme de pression. L'équation 85 est l'équation de Newton pour les électrons dans laquelle nous avons négligé l'inertie des électrons et pris le facteur γ_e comme étant égal à 1. Finalement l'équation 86 est l'équation de Poisson.

En utilisant les ondes planes $\exp[i(\omega t - kz)]$ ¹⁰ nous trouvons:

$$i\omega n_{i1} - ikn_0 u_{i1} = 0 \quad (87)$$

$$i\omega u_{i1} - \frac{eE_1}{m_i} = 0 \quad (88)$$

$$k_B T_e ikn_{e1} - n_0 e E_1 = 0 \quad (89)$$

$$-ik\varepsilon_0 E_1 - en_{i1} + en_{e1} = 0 \quad (90)$$

C'est de nouveau un système d'équations linéaires sans second membre. Pour éviter la solution triviale nous devons donc avoir:

$$\begin{vmatrix} i\omega & -ikn_0 & 0 & 0 \\ 0 & i\omega & -\frac{e}{m_i} & 0 \\ 0 & 0 & -n_0 e & k_B T_e ik \\ -e & 0 & -ik\varepsilon_0 & e \end{vmatrix} = 0 \quad (91)$$

¹⁰Cf. notes sur les ondes de Langmuir sur la direction z.

soit:

$$\omega^2 = \frac{k_B T_e k^2}{m_i} \frac{1}{1 + k^2 \lambda_{De}^2} = c_s^2 k^2 \frac{1}{1 + k^2 \lambda_{De}^2}$$

$$\omega = k \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_i}} \sqrt{\frac{1}{1 + k^2 \lambda_{De}^2}} \quad (92)$$

$$\omega = \omega_{pi} \frac{k \lambda_{De}}{\sqrt{1 + k^2 \lambda_{De}^2}} \quad (93)$$

L'équation 92 est la relation de dispersion d'une onde électrostatique que

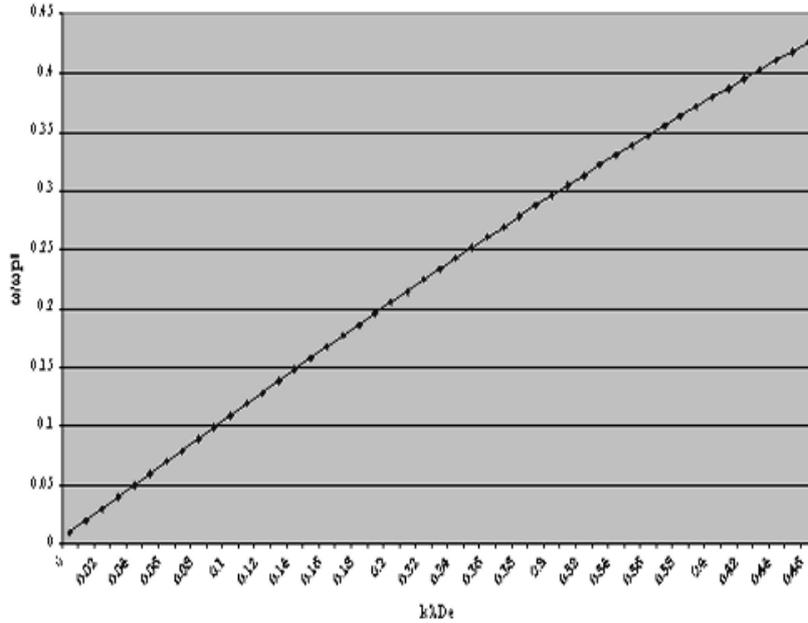


Figure 4: Relation de dispersion des ondes ioniques acoustiques. L'axe vertical est ω/ω_{pi} et l'axe horizontal est $k\lambda_{De}$.

nous appelons **onde acoustique ionique**. Le terme acoustique provient du fait que pour de grandes longueurs d'onde (faibles valeurs de k) la relation de dispersion est celle d'une onde acoustique avec la vitesse sonique égale à:

$$c_s = (k_B T_e / m_i)^{1/2}. \quad (94)$$

La pression est donnée par la pression électronique, mais la masse est celle des ions.

Comme le montre la figure 4 la relation de dispersion des ondes acoustiques

ioniques est linéaire pour de faible valeur de $k\lambda_{De}$. En développant le terme $1/(1 + (k\lambda_{De})^2)^{1/2}$ pour de faibles valeurs de $k\lambda_{De}$, nous obtenons:

$$\omega = k\sqrt{\frac{k_B T_e}{m_i}} \left(1 - \frac{1}{2} k^2 \lambda_{De}^2 \right) \quad (95)$$

2.4.2 Discussion

a) Valeurs de \mathbf{n}_{i1} et \mathbf{n}_{e1} pour \mathbf{k} tendant vers $\mathbf{0}$

Lorsque k tend vers 0 la relation de dispersion des ondes acoustiques ioniques est linéaire:

$$\omega = k(k_B T_e / m_i)^{1/2}$$

Calculons n_{i1} et n_{e1} dans cette limite en utilisant 87 à 89:

$$n_{e1} = n_{i1} = -i \frac{n_0 e}{k_B T_e k} E_1 \quad (96)$$

Pour de petits k , les perturbations de densité ionique et électronique sont égales et la fluctuation de charge électrique totale est nulle.

b) Validité de l'hypothèse de $\mathbf{T}_i = 0$

Nous avons négligé le terme de pression ionique p_i . Du point de vue physique, cette hypothèse est pleinement justifiée grâce à la théorie cinétique qui montre que **les ondes acoustiques ioniques ne sont faiblement amorties que si:**

$$(\mathbf{k}_B \mathbf{T}_i / \mathbf{m}_i)^{1/2} \ll \omega / \mathbf{k} \ll (\mathbf{k}_B \mathbf{T}_e / \mathbf{m}_e)^{1/2} \quad (97)$$

La première inégalité n'est satisfaite que si $T_e \gg T_i$. Ceci justifie de négliger le terme de pression ionique.

c) Fonction diélectrique $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$

La méthode de calcul utilisée pour calculer ε dans le cas des ondes de Langmuir peut naturellement être généralisée pour inclure les ions. Nous trouvons alors:

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \gamma_e k^2 v_{the}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \gamma_i k^2 v_{thi}^2} \quad (98)$$

v_{thi} vaut $(k_B T_i / m_i)^{1/2}$. Notez que nous avons choisi des valeurs différentes pour γ_e et γ_i même si nous parlons de la même onde¹¹. Dans l'hypothèse que

¹¹ Naturellement les valeurs de γ dépendent des ondes. Ainsi γ_e vaut 3 pour les ondes de Langmuir (électrons adiabatiques) et 1 pour les ondes acoustiques ioniques (électrons isothermes). Si nous avons fait les calculs avec une valeur de T_i non nulle la théorie cinétique nous donne $\gamma_i = 3$ pour les ondes acoustiques ioniques.

nous avons faite ($T_i = 0$), ε se ramène à:

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - k^2 v_{the}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}$$

Nous avons pris $\gamma_e = 1$. De plus nous pouvons négliger ω^2 devant $k^2 v_{the}^2$ (Inégalité 97). Nous retrouvons alors la relation de dispersion des ondes acoustiques ioniques en annulant ε :

$$\omega^2 = \frac{1}{\omega_{pi}^2} \frac{k^2 \lambda_{De}^2}{1 + k^2 \lambda_{De}^2} = k^2 \left(\frac{k_B T_e}{m_i} \right) \frac{1}{1 + k^2 \lambda_{De}^2}$$

d) **Remarque générale sur les valeurs de $k\lambda_{De}$**

Cette remarque porte sur les ondes de Langmuir et sur les ondes acoustiques ioniques. Nous constatons que le vecteur d'onde est normalisé à $1/\lambda_{De}$ et que sur les graphes (figures 3 et 4) nous n'avons pas calculé ω pour des valeurs de $k\lambda_{De}$ supérieures à 1. La raison est, là encore, liée à la théorie cinétique qui nous apprend que **les ondes de Langmuir et les ondes acoustiques ioniques sont fortement amorties¹² lorsque $k\lambda_{De}$ est proche de 1.**

2.4.3 Résumé des relations de dispersion dérivée du modèle à deux fluides pour $B_0 = 0$, $T \neq 0$ (Figure 5)

On suppose que l'onde se propage dans la direction z .

On notera que le modèle fluide n'est plus valable pour $k^2 \lambda_D^2 > 1$.

Onde électromagnétique, onde transverse "t"

$$E_x, E_y \neq 0, E_z = 0 \quad \omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2 \quad (99)$$

Onde électrostatique, onde longitudinale "l"

$$E_x, E_y = 0, E_z \neq 0 \quad \omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{the}^2 \quad \text{"Onde de Langmuir"} \quad (100)$$

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 \quad (101)$$

$$\omega^2 \simeq \omega_{pi}^2 \quad \text{"Onde ionique acoustique"} \quad (102)$$

$$\omega^2 \simeq \omega_{pi}^2 + k^2 v_{thi}^2 \gamma \quad (103)$$

¹²Notez que dans le cadre de la théorie que nous avons faites les ondes ne sont pas amorties. Le vecteur d'onde et la fréquence sont des nombres réels et $\exp[i(\omega t - kz)]$ est purement oscillant.

Summary of dispersion relation derived for

- $B_0 = 0$
- $T \neq 0$
- Two-fluid model

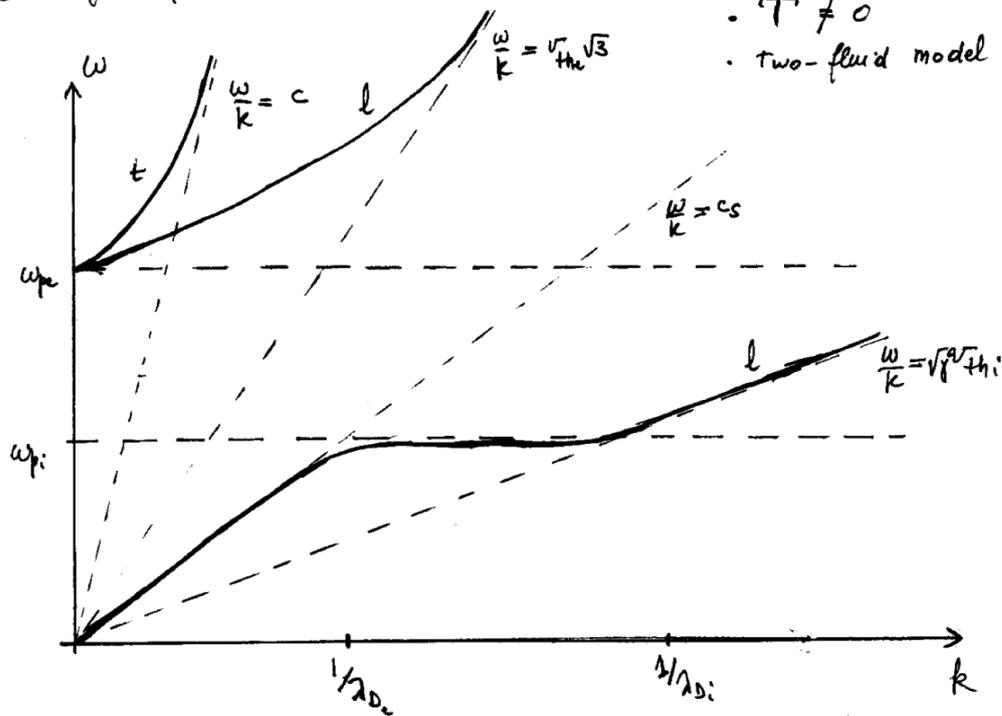


Figure 5: Résumé pour $B_0 = 0$, $T \neq 0$, modèle à deux fluides

On notera que l'onde ionique acoustique peut se propager si $T_e \gg T_i$, autrement on a une interaction résonnante onde-particule et un fort amortissement. Si $T_e \gtrsim T_i$ les ondes avec $\omega < \omega_{pi}$ ne se propagent pas.