

Introduction à la Physique des Plasmas I

EPFL — 2005

Cours du 15 juin 2005

1 Equilibre et stabilité de plasmas confinés magnétiquement

1.1 Introduction

Nous désirons étudier l'équilibre des forces d'un plasma confiné par des champs magnétiques. Les équations de base sont celles de la MHD idéale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (5)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} = 0 \quad (6)$$

1.2 Equilibre statique

La *condition d'équilibre* sur un élément fluide se définit par la condition $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. En plus on suppose un équilibre statique ce qui signifie que la vitesse

fluide à l'équilibre est nulle, $\mathbf{u}_0 = 0$.

Les équations d'équilibre statique seront donc:

$$\nabla p_0 = \mathbf{j}_0 \wedge \mathbf{B}_0 \quad (7)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{j}_0 \quad (8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (9)$$

Notion de surface magnétique

Une surface magnétique est une surface qui est tangente en tout point au champ magnétique (c.f. Figure 1). Soit $\Psi(\mathbf{r}) = \text{constante}$, l'équation d'une surface¹ magnétique correspondante au champ magnétique $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$. Par définition de la surface magnétique nous avons donc:

$$\nabla \Psi \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (10)$$

A l'équilibre, les surfaces $p_0(\mathbf{r}) = \text{constante}$, où p_0 est la pression, sont aussi des surfaces magnétiques:

$$\nabla p_0 \cdot \mathbf{B}_0 = (\mathbf{j}_0 \wedge \mathbf{B}_0) \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (11)$$

Les isobares (surfaces où la pression est constante) sont des surfaces magnétiques.

Si nous définissons de la même manière les surfaces de courant, nous voyons que les surfaces $p_0(\mathbf{r}) = \text{constante}$ sont aussi des surfaces de courant:

$$\nabla p_0 \cdot \mathbf{j}_0 = (\mathbf{j}_0 \wedge \mathbf{B}_0) \cdot \mathbf{j}_0 = 0 \quad (12)$$

Le courant passe donc entre deux surfaces magnétiques.

On discutera certains cas simples dans la section 2 de ce chapitre.

1.3 Conditions aux limites

Les plasmas de laboratoire étant de taille finie, il est important de considérer les solutions des équations de la MHD idéale ((1) à (6)) avec des conditions aux limites.

Dans le cas le plus général, le plasma est contenu dans une enceinte à vide qui

¹L'expression mathématique d'une surface est $f(\mathbf{r}) = f(x, y, z) = \text{constante}$ où f est une fonction scalaire.

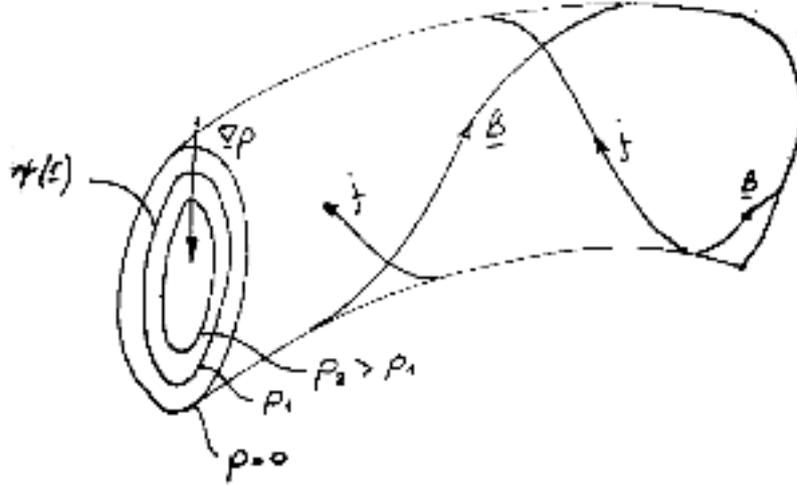


Figure 1: Surfaces magnétiques $\Psi(\mathbf{r})$, surface isobares $p_0(\mathbf{r}) = cte.$, surfaces de courant.

est constituée d'un métal conducteur. On suppose que la paroi de l'enceinte à vide a une conductibilité infinie². Dans le cas où le plasma est séparé de la paroi par une couche de vide (voir figure 2) nous devons distinguer deux groupes d'équations : celles qui décrivent le plasma et celles qui décrivent la couche de vide. Dans le plasma ce sont les équations de la MHD idéale ((1) à (6)). Dans le vide ce sont les équations de Maxwell dans le vide et à basse fréquence (on néglige le courant de déplacement):

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_v = -\frac{\partial \mathbf{B}_v}{\partial t} \quad (13)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B}_v = 0 \quad (14)$$

La situation décrite dans la figure 2 est celle d'un réacteur de fusion.

A partir des conditions d'équilibre statique, les variables dynamiques linéarisée s'expriment de la manière suivante:

² Il faut noter que dans le cas réel, la conductibilité de la coque est finie. Dans ce cas le champ magnétique diffuse dans la coque dans une échelle de temps de l'ordre de $\tau_{coque} \sim \mu_0 \sigma L^2$, avec L étant l'épaisseur de la coque. L'approximation de conductibilité parfaite de la coque est valable pourvu que les temps caractéristiques des instabilités du plasma τ_p soit beaucoup plus rapides que τ_{coque} ($\tau_p \ll \tau_{coque}$), ce qui est généralement satisfait dans le cadre du modèle de la MHD idéale. Pour des temps long par rapport à $t > \tau_{coque}$ le plasma doit être confiné par des champs magnétiques créés par des courants externes.

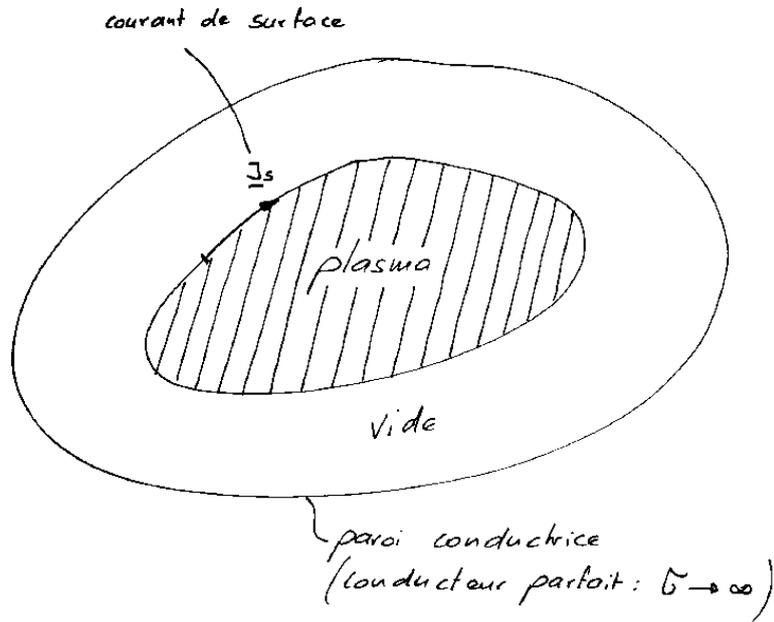


Figure 2: Plasma séparé de la coque conductrice par une couche de vide.

- dans le plasma³:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= 0 + \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) \\
 p(\mathbf{r}, t) &= p_0(\mathbf{r}_0) + p_1(\mathbf{r}, t) \\
 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 0 + \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \\
 \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0(\mathbf{r}_0) + \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) \\
 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{J}_0(\mathbf{r}_0) + \mathbf{J}_1(\mathbf{r}, t)
 \end{aligned} \tag{15}$$

où l'indice 0 indique la valeur d'équilibre et l'indice 1 la perturbation par rapport à l'équilibre.

- dans le vide

$$\mathbf{B}_v(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_{v0}(\mathbf{r}_0) + \mathbf{B}_{v1}(\mathbf{r}, t) \tag{16}$$

³Puisqu'on a supposé un équilibre statique (c.à.d $\mathbf{u}_0 = 0$), à partir de l'équation de la MHD idéale on a que le champ électrique à l'équilibre est nul ($\mathbf{E}_0 = 0$).

1.3.1 Conditions aux limites interface vide-coque

Soit \mathbf{n}_w le vecteur normal à la paroi pointant vers l'extérieur. Sur cette interface, la continuité de la composante tangentielle du champ électrique est:

$$\mathbf{n}_w \wedge \mathbf{E}_{v1}|_{paroi} = 0 \quad (17)$$

puisque dans la coque le champ électrique est nul vu que l'on suppose la coque comme un conducteur parfait (conductibilité infinie).

A partir de l'équation $\nabla \wedge \mathbf{E}_{v1} = -\partial_t \mathbf{B}_{v1}$, (17) devient:

$$\mathbf{n}_w \cdot \partial_t \mathbf{B}_{v1} = 0 \quad (18)$$

En supposant $\mathbf{B}_{v1}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{B}}_{v1}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$ (19) devient:

$$i\omega \mathbf{n}_w \cdot \tilde{\mathbf{B}}_{v1} = 0 \quad (19)$$

ce qui signifie que la composante normale de la perturbation de champ magnétique est nulle.

1.3.2 Conditions aux limites interface plasma-vide

A partir des équations $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ et $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$, les conditions de continuité des composantes normales et tangentielles de \mathbf{B} sont respectivement:

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}]_p^v \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_v - \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_p = 0 \quad (20)$$

$$[\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}]_p^v = \mu_0 \mathbf{J}_s \text{ où } \mathbf{J}_s \text{ est un courant de surface} \quad (21)$$

Si $\mathbf{J}_s = 0$, on a la continuité des composantes tangentielles de \mathbf{B} :

$$[\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}]_p^v = 0 \quad (22)$$

A partir de l'équation de Newton on peut montrer qu'il y a aussi continuité de la pression totale:

$$\left[p + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right]_p^v = 0 \quad (23)$$

Dans le référentiel d'un élément fluide qui bouge avec l'interface plasma-vide, la continuité des composantes tangentielles de \mathbf{E}'_1 devient⁴:

$$[\mathbf{n}_0 \wedge \mathbf{E}'_1]_p^v = \mathbf{n}_0 \wedge \mathbf{E}'_{v1} - \mathbf{n}_0 \wedge \mathbf{E}'_{p1} = \mathbf{n}_0 \wedge \mathbf{E}'_{v1} = 0 \quad (24)$$

⁴Il faut faire attention que la surface du plasma peut se déformer et donc le vecteur normal à cette surface n'est pas constant. On note la normal à la surface non-déformée par \mathbf{n}_0 .

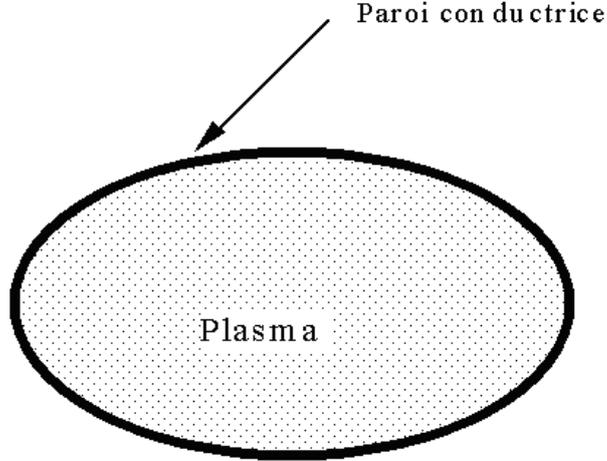


Figure 3: Plasma touchant l'enceinte parfaitement conductrice

puisque dans la MHD idéale $\mathbf{E}'_{p1} = 0$.

Dans la référentiel du laboratoire on a:

$$\mathbf{E}'_{v1} = \mathbf{E}_{v1} + \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{B}_v \quad (25)$$

et (24) devient:

$$\mathbf{n}_0 \wedge \mathbf{E}_{v1} = -\mathbf{n}_0 \wedge (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{B}_v) \quad (26)$$

1.3.3 Cas où la surface du plasma touche la paroi conductrice

La géométrie est illustrée dans la figure 3. Cette situation n'est pas celle dans un réacteur à fusion. Le contact avec la paroi conductrice amènerait à la formation d'impuretés qui diffuseraient dans le plasma et qui amèneraient à un refroidissement. Nous supposons que la paroi est à une conductibilité électrique infinie. Soit \mathbf{n}_w le vecteur normal à la paroi pointant vers l'extérieur.

Les conditions sur la coque de conductibilité infinie sont:

- la composante tangentielle du champ électrique perturbé, \mathbf{E}_{p1} , est nulle

$$(\mathbf{n}_w \wedge \mathbf{E}_{p1})_{Paroi} = 0 \quad (27)$$

- la composante normale de \mathbf{B}_{p1} est nulle

$$(\mathbf{n}_w \cdot \mathbf{B}_{p1})_{Paroi} = 0 \quad (28)$$

A partir de l'équation d'Ohm (6) nous dérivons une condition sur la perturbation de la vitesse \mathbf{u}_1 sur la paroi.

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_w \wedge \mathbf{E}_{p1} &= -\mathbf{n} \wedge (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{B}_{p1}) = -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_{p1})\mathbf{u}_1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{B}_{p1} = 0 \\ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1)_{Paroi} &= 0\end{aligned}\tag{29}$$

La composante normale de \mathbf{u}_1 sur la paroi est nulle. Il n'y a pas d'écoulement vers la paroi.

Dans le cas général le plasma est séparé par une couche de vide entre le plasma et la coque. Pour le domaine de validité de l'approximation d'un coque avec conductibilité infinie se référer à la note 2.

2 Quelques équilibres linéaires

Dans ce paragraphe on va se restreindre à des configurations de champs qui peuvent être décrites en coordonnées cylindriques et qui sont telles que:

$$\partial_z = 0; \partial_\theta = 0; \partial_r \neq 0$$

on peut donc écrire:

$$\partial_r = \frac{d}{dr}$$

Les grandeurs avec un indice 0 sont des grandeurs imposées de l'extérieur. Toutes les grandeurs \mathbf{B} , p , \mathbf{J} qui sont solution des équations d'équilibre n'ont pas d'indice.

2.1 Le θ pinch

C'est une configuration linéaire, où le seul champ est un champ axial B_z imposé de l'extérieur. Un schéma de la configuration expérimentale d'un θ pinch est montré dans la figure 4. Le champ B_z induit un courant diamagnétique J_θ :

$$J_\theta = \left(\frac{\nabla \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \right)_\theta = -\frac{1}{\mu_0} \frac{dB_z}{dr}\tag{30}$$

C'est à cause de la direction du courant dans le plasma que l'on a appelé ce type de machine θ pinch (voir figure 5).

Dans un θ pinch, la seule dépendance est la dépendance radiale.

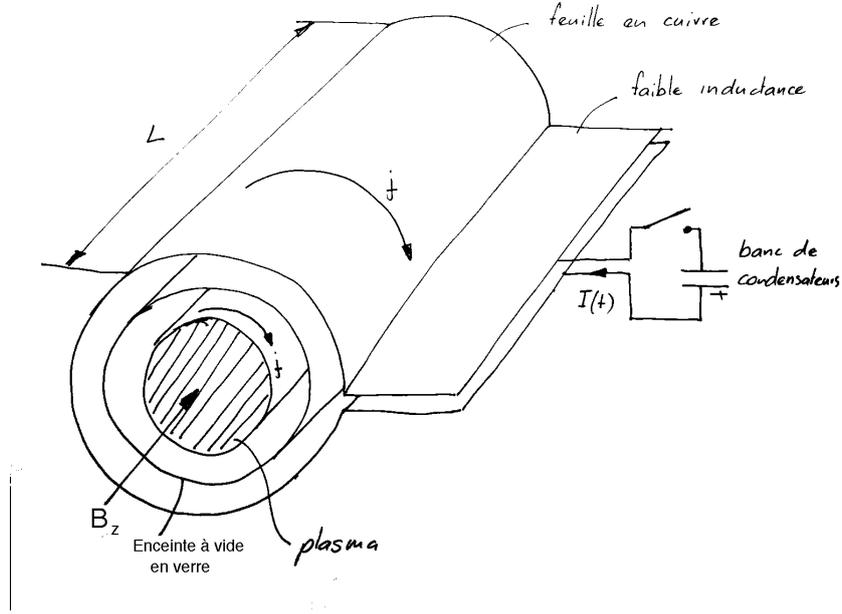


Figure 4: Configuration expérimentale d'un θ pinch. L'enceinte à vide en verre permet au champ de pénétrer à l'intérieur. Cette configuration est la première qui a produit un nombre substantiel de neutrons de fusion avec des paramètres du plasma: $T_i \sim 1 - 4\text{keV}$, $n \sim 1 - 2 \times 10^{22}\text{m}^{-3}$. Le plasma est pulsé avec une durée de vie $\tau_{plasma} \sim 10 - 50\mu\text{s}$. Le temps de confinement du plasma est de l'ordre $\tau_{conf} \sim \frac{L}{v_{th}} \sim 10\mu\text{s}$. Cette configuration magnétique est marginalement stable.

L'équation d'équilibre devient simplement⁵:

$$\frac{dP}{dr} = J_\theta B_z = -\frac{B_z}{\mu_0} \frac{dB_z}{dr}$$

⁵En coordonnées cylindriques, l'équation $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ devient:

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \left(\frac{\partial B_z}{r \partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z}, \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}, \frac{\partial(r B_\theta)}{r \partial r} - \frac{\partial B_r}{r \partial \theta} \right)$$

, La seule composante non nulle est:

$$\mu_0 j_\theta = -\frac{\partial B_z}{\partial r}$$

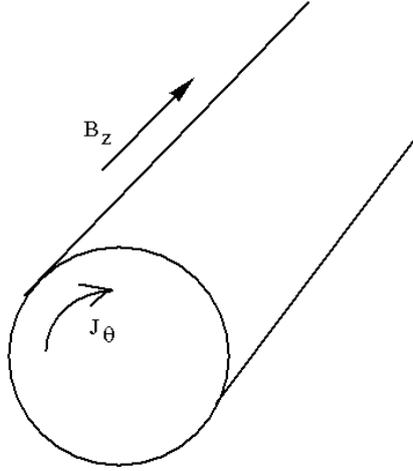


Figure 5: Géométrie d'un θ pinch

soit

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) = 0 \quad (31)$$

$$p(r) + \frac{B_z^2}{2\mu_0} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \quad (32)$$

B_0 est le champ appliqué.

Pour un profil de pression $p(r)$ donné, le profil de champ magnétique devient:

$$B_z(r) = B_0 \sqrt{1 - \frac{p(r)}{\frac{B_0^2}{2\mu_0}}} = B_0 \sqrt{1 - \beta(r)} \quad (33)$$

L'effet diamagnétique, qui est une propriété intrinsèque à un plasma magnétisé (c.f section: "Mouvement d'une particule dans un champ magnétique lentement variable dans le temps $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0(t)$ "), est utilisé comme diagnostic pour la mesure de l'énergie thermique du plasma.

2.2 Le Z pinch

C'est une configuration où le champ magnétique est purement selon la direction θ et est créé par un courant dans la direction z (d'où le nom de Z pinch). La relation entre J_z et B_θ est:

$$J_z = \frac{1}{\mu_0 r} \frac{d}{dr} (r B_\theta) \quad (34)$$

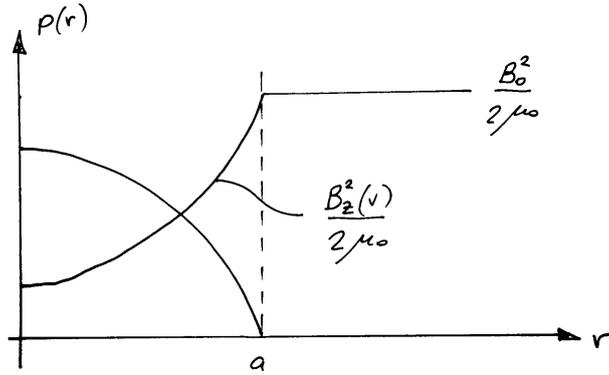


Figure 6: Profil de champ magnétique dans un θ -pinch pour un profil de pression donné et un champ magnétique B_0 donné.

L'équation d'équilibre est:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= -J_z B_\theta = -\frac{1}{\mu_0 r} B_\theta \frac{d}{dr}(r B_\theta) = -\frac{d}{dr} \left(\frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) - \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} \\ \frac{d}{dr} \left(P + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

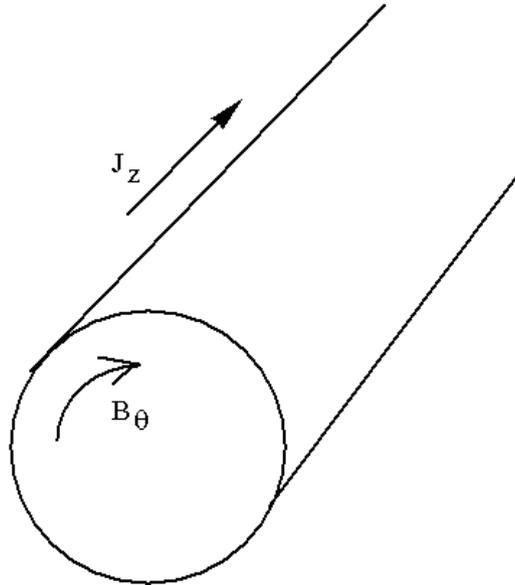


Figure 7: Géométrie du Z pinch

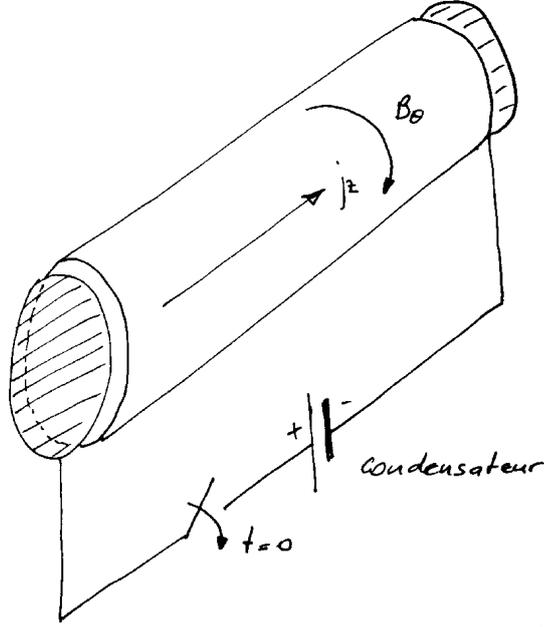


Figure 8: Configuration expérimentale d'un z -pinch.

Le profil de pression $P(r)$ est lié au profil de B_θ (donc en fait au profil de courant J_z). Pour illustrer cela prenons le profil de B_θ appelé profil du pinch de Bennett:

$$B_\theta = \mu_0 \frac{I}{2\pi} \frac{r}{r^2 + a^2} \quad (36)$$

où I est le courant total qui passe à travers le pinch.

Par une simple application de la relation (34), nous trouvons le profil de courant J_z :

$$J_z = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{r} \left(\frac{2r}{r^2 + a^2} - \frac{2r^3}{(r^2 + a^2)^2} \right) = \frac{I}{\pi} \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^2} \quad (37)$$

Le profil de pression $P(r)$ est alors:

$$P(r) = -\frac{B_\theta^2}{2\mu_0} - \frac{1}{\mu_0} \int_{-\infty}^r dr \frac{B_\theta^2}{r} = \mu_0 \frac{I^2}{8\pi^2} \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^2} \quad (38)$$

L'énergie thermique, W_{th} , totale dans le plasma est:

$$W_{th} = \int_0^\infty dr 2\pi r P(r) = \mu_0 \frac{I^2}{8\pi}$$

Cette énergie thermique est comparable à l'énergie magnétique:

$$W_B = \int_0^\infty dr 2\pi r \frac{\mathbf{B}_\theta^2(r)}{2\mu_0}$$

En faisant une analyse de stabilité on peut montrer que ce type d'équilibre est fortement instable.

2.3 Le screw pinch ou "Tokamak droit"

La configuration linéaire qui se rapproche le plus de la configuration de champ magnétique du Tokamak, c'est une combinaison du θ -pinch et du Z-pinch. Comme illustré dans la figure 9, cette configuration "équivalent" à dérouler le tore de longueur $2\pi R_0$ en un cylindre droit de longueur $L = 2\pi R_0$.

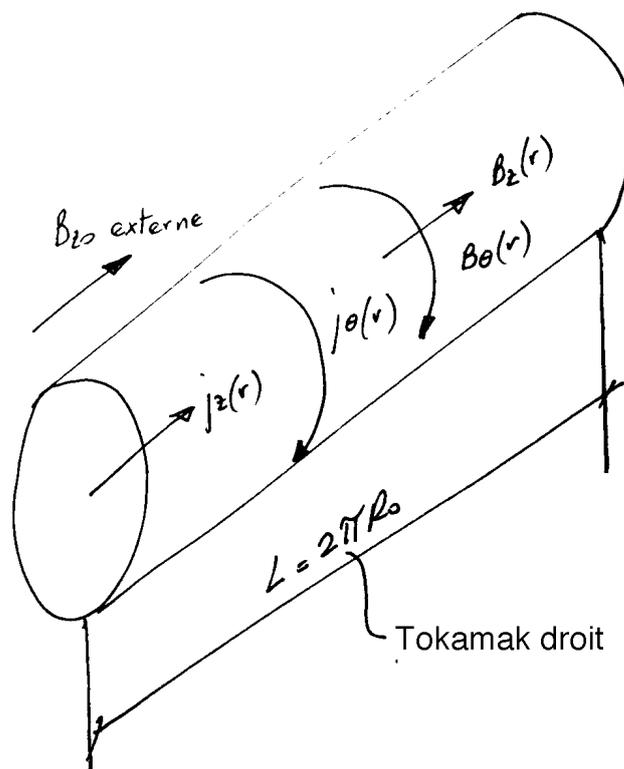


Figure 9: Configuration de champs magnétiques et de courants dans un "screw-pinch" ou Tokamak droit.

Dans cette configuration on impose le champ magnétique externe, $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$, et on génère un courant axial $\mathbf{j} = j_z \mathbf{e}_z$ (par exemple en appliquant un champ électrique axial externe).

Comme pour le Z-pinch la densité de courant j_z génère un champ magnétique azimuthal B_θ .

La combinaison des deux composantes de champ magnétique B_z et B_θ génère des lignes de champs hélicoidales.

$$\mathbf{B}(r) = [0, B_\theta(r), B_z(r)]$$

L'équation d'équilibre est:

$$\frac{dP}{dr} = J_\theta B_z - J_z B_\theta \quad (39)$$

En remplaçant les expressions des densités de courant, il vient:

$$\frac{d}{dr} \left(P + \frac{B_z^2}{2\mu_0} + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) = -\frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} \quad (40)$$

Contrairement au cas du θ -pinch, dans le "screw-pinch" le courant j_θ peut être soit diamagnétique ou paramagnétique en fonction de l'amplitude du gradient de pression. Pour montrer cela réécrivons l'équation (39) de la manière suivante:

$$j_\theta = \frac{\frac{dp}{dr} + j_z B_\theta}{B_z} \quad (41)$$

En général le profil de pression est monotone et piqué au centre $\Rightarrow dp/dr < 0$. Pour $B_z > 0$ et $j_z > 0$ (imposés extérieurement), le signe de j_θ dépend donc du signe du numérateur dans l'équation (41).

- à basse pression:

$$\left| \frac{dp}{dr} \right| < j_z B_\theta \Rightarrow j_\theta > 0,$$

la densité de courant j_θ renforce le champ externe $B_z \Rightarrow$ **effet paramagnétique**.

- à haute pression:

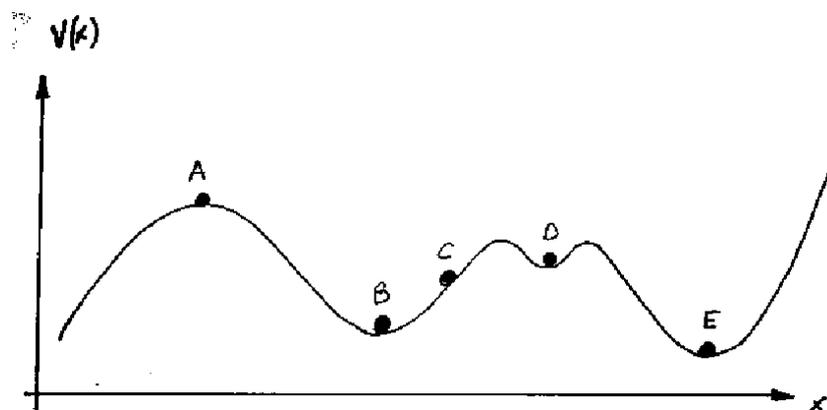
$$\left| \frac{dp}{dr} \right| > j_z B_\theta \Rightarrow j_\theta < 0,$$

la densité de courant j_θ diminue le champ externe $B_z \Rightarrow$ **effet diamagnétique**.

3 Stabilité linéaire d'un équilibre dans le modèle de la MHD idéale

3.1 Approche intuitive: analogie mécanique

Soit une particule de masse m dans un potentiel $V(x)$.



Puisque la force qui agit sur la particule dérive d'un potentiel on a:

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad \Rightarrow \quad F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (42)$$

A, B, D et E sont des positions d'équilibre puisque $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$. C n'est pas une position d'équilibre et les positions d'équilibre A et B sont très différentes.

La stabilité linéaire d'un équilibre est donnée par la dynamique du système par rapport à des déplacements infinitésimaux (perturbations). Par rapport à cette définition de stabilité linéaire, le point D est linéairement stable, mais non-linéairement instable.

3.1.1 Critères de stabilité linéaire dans le cas 1D

1. Pour déterminer la stabilité linéaire d'un point d'équilibre, on étudie le mouvement par rapport à une perturbation infinitésimale.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0} (x - x_0) + \dots$$

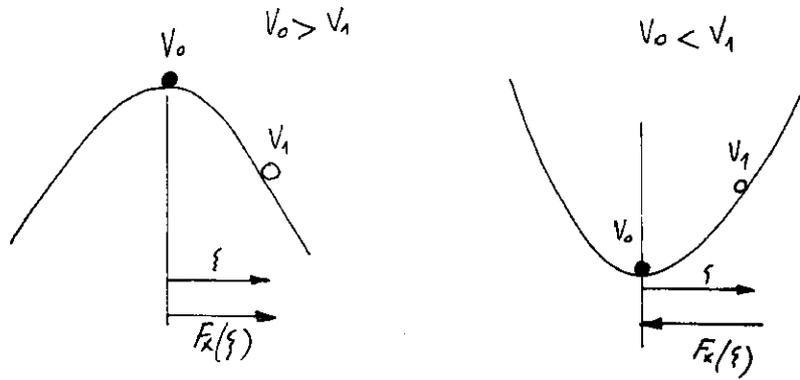


Figure 10: ξ est le déplacement infinitésimal par rapport à la position d'équilibre.

Or x_0 est un point d'équilibre, donc $F(x_0) = 0$.
Ainsi, pour un déplacement infinitésimal:

$$\xi = x - x_0, \quad m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = F'(x_0) \xi, \quad \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \underbrace{\frac{F'(x_0)}{m}}_{+\omega^2} \xi = 0$$

$$\Rightarrow \xi(t) = \xi_0 \exp \left[\left(\frac{F'(x_0)}{m} \right)^{1/2} t \right] = \xi_0 \exp[i\omega t]$$

$$\begin{aligned} F'(x_0) > 0 &\Rightarrow \omega^2 < 0 \Rightarrow \xi(t) \propto \exp[|\omega|t] \quad \text{instable} \\ F'(x_0) < 0 &\Rightarrow \omega^2 > 0 \Rightarrow \xi(t) \propto \exp[i\omega t] \quad \text{stable} \end{aligned}$$

Le taux de croissance τ de l'instabilité est donné par $\tau = 1/\omega$.

2. Une autre manière d'étudier la stabilité d'un équilibre est d'étudier le signe de la perturbation de potentiel V_1 par rapport à V_0 (en posant $V_0 = 0$).

$$\begin{cases} V_1 > 0 & \text{équilibre linéairement stable} \\ V_1 = 0 & \text{équilibre linéairement marginalement stable} \\ V_1 < 0 & \text{équilibre linéairement instable} \end{cases}$$

Le critère de stabilité linéaire est valable pour des petites perturbation par rapport à la situation d'équilibre. Pour des perturbations importantes, telles

que l'approximation linéaire n'est plus valable, on peut avoir des situations où un équilibre linéairement stable devient non-linéairement instable ou vice-versa. Pour un potentiel uni-dimensionnel, ces situations sont illustrées, dans la figure 11.

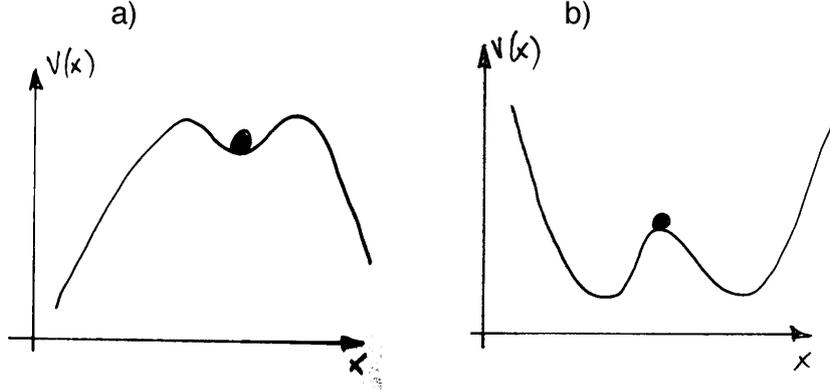


Figure 11: Figure a): équilibre linéairement stable et non-linéairement instable. Figure b): équilibre linéairement instable et non-linéairement stable.

3.2 Linéarisation des équations de la MHD idéale

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \quad (43)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (44)$$

$$\frac{d}{dt} (p \rho^{-\gamma}) = 0 \quad (45)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) \quad (46)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (47)$$

où dans (46) on a utilisé : $\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} = 0$.

De l'équation (44) on obtient:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho (\nabla \cdot \mathbf{u})}_{\frac{d\rho}{dt}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (48)$$

en utilisant ce résultat dans (45) il vient:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) &= \frac{dp}{dt}\rho^{-\gamma} - \gamma\rho^{-\gamma-1}\frac{d\rho}{dt}p \Rightarrow \frac{dp}{dt} - \frac{\gamma}{\rho}\frac{d\rho}{dt}p = 0 \\ \Rightarrow \frac{dp}{dt} &= \frac{\gamma}{\rho}\frac{d\rho}{dt}p = -\frac{\gamma}{\rho}\rho(\nabla \cdot \mathbf{u})p = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} &= -\mathbf{u} \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (49)$$

En utilisant (48) et (49) le système d'équations devient:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \quad (50)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (51)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) \quad (52)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \quad (53)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (54)$$

avec $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ comme condition initiale.

3.2.1 Conditions d'équilibre [$\partial_t = 0$, $\mathbf{u}_0 = 0$]

$$\begin{aligned} \nabla p_0 &= \mathbf{j}_0 \wedge \mathbf{B}_0 \\ \nabla \wedge \mathbf{B}_0 &= \mu_0 \mathbf{j}_0 \end{aligned}$$

La solution de ces équations permet de partiellement de déterminer les quantités $p_0(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$, et $\mathbf{j}_0(\mathbf{r})$.

Par exemple dans une configuration à symétrie cylindrique nous avons la condition d'équilibre:

$$\left[p + \frac{1}{2\mu_0}(B_z + B_\theta)^2 \right]' = -\frac{B_\theta^2}{r}$$

\Rightarrow nous avons trois profils $p(r)$, $B_z(r)$, $B_\theta(r)$, desquels deux peuvent être choisis arbitrairement.

3.2.2 Conditions au bord

Modèle: pour simplifier le problème on considère un plasma dans une coque de conductibilité infinie sans interface plasma-vide (c.f. Figure 3).

Nous avons donc comme conditions au bord les équations (27), (28) et (29) que l'on rappelle ici:

$$\mathbf{n}_w \wedge \mathbf{E}_1 = 0 \quad (55)$$

$$\mathbf{n}_w \cdot \partial_t \mathbf{B}_1 = 0 \quad (56)$$

$$\mathbf{n}_w \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \quad (57)$$

où n_w est un vecteur normal à la surface de la coque.

3.2.3 Equations linéarisées et conditions au bord linéarisées

En remplaçant les équations (15) dans (50)-(54) il vient:

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{u}_1 = -\nabla p_1 + \mathbf{j}_0 \wedge \mathbf{B}_1 + \mathbf{j}_1 \wedge \mathbf{B}_0 \quad (58)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\mathbf{u}_1 \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 \quad (59)$$

$$\partial_t \mathbf{B}_1 = \nabla \wedge (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{B}_0) \quad (60)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}_1) \quad (61)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{j}_1 \quad (62)$$

Avec les conditions au bord (55)-(57)⁶.

Dans le système d'équations ci-dessus on remarque que l'équation du mouvement dépend essentiellement du champ de vitesse $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$, en effet:

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{u}_1 = -\nabla p_1 + \mathbf{j}_0 \wedge \mathbf{B}_1 + \mathbf{j}_1 \wedge \mathbf{B}_0 \quad (63)$$

avec $p_1 = p_1(\mathbf{u}_1)$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_1(\mathbf{u}_1)$, $\rho_1 = \rho_1(\mathbf{u}_1)$ et $\mathbf{j}_1 = \mathbf{j}_1[\mathbf{B}_1(\mathbf{u}_1)]$ à partir des autres équations.

⁶ Dans ce modèle (coque conductrice autour du plasma) \mathbf{n}_w est constant et il n'est pas nécessaire de le linéariser. Ceci n'est plus vrai dans un modèle où il y aurait une interface plasma-vide.

En différentiant l'équation de mouvement on pourrait faire apparaître explicitement la seule dépendance en \mathbf{u}_1 . C'est la méthode utilisée pour déterminer la relation de dispersion dans un plasma infini uniforme.

Dans un plasma fini et non-uniforme, l'intégration de ces équations se révèle plus intéressante.

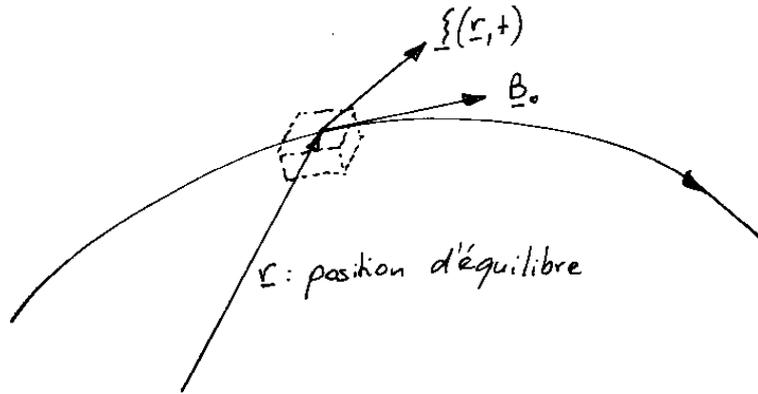


Figure 12: Vecteur déplacement $\xi(\mathbf{r}, t)$ d'un élément fluide par rapport à sa position d'équilibre.

On introduit une nouvelle variable:

un champ vectoriel de déplacement Lagrangien $\xi(\mathbf{r}, t)$.

$$\mathbf{u} = \frac{D\xi}{Dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\xi \quad (64)$$

qui est une expression hautement non-linéaire.

Dans le cadre d'une théorie linéaire, au premier ordre on aura:

$$\mathbf{u} \cong \frac{\partial \xi}{\partial t} = \mathbf{u}_1$$

⇒ en utilisant cette expression dans les équations linéarisées il vient:

$$\begin{aligned} p_1 &= -\xi \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \xi \\ \mathbf{B}_1 &= \nabla \wedge (\xi \wedge \mathbf{B}_0) \\ \rho_1 &= -\nabla \cdot (\rho_0 \xi) \end{aligned}$$

Notons que $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ est automatiquement satisfaite.

En introduisant ces équations dans l'équation du mouvement, il vient:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \mathbf{F}(p_1(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{B}_1(\boldsymbol{\xi})) \quad (65)$$

avec la condition au bord:

$$\mathbf{n}_w \cdot \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (66)$$

\mathbf{F} est un opérateur de force:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) = -\nabla \Pi + \mu_0 (\nabla \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{Q} + \mu_0 (\nabla \wedge \mathbf{Q}) \wedge \mathbf{B} \quad (67)$$

où on définit les grandeurs p_1 et \mathbf{B}_1 de la manière suivante:

$$p_1 \equiv \Pi = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} \quad (68)$$

et

$$\mathbf{B}_1 \equiv \mathbf{Q} = \nabla \wedge (\boldsymbol{\xi} \wedge \mathbf{B}) \quad (69)$$

Les définitions de Π et \mathbf{Q} permettent d'omettre l'indice 0 des grandeurs d'équilibre.

Dans le problème linéaire on a un système de 3 équations à 3 inconnues ($\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_3$).

Dans le problème non-linéaire on avait les inconnues \mathbf{v} , \mathbf{B} , et p .

Puisque les grandeurs d'équilibre $p(\mathbf{r})$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ne dépendent pas du temps on peut écrire:

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t) = \hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \quad (70)$$

$$\Rightarrow -\rho \omega^2 \hat{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) \quad (71)$$

L'équation (71) avec la condition au bord (66) à la structure d'un problème aux valeurs propres:

$$-\omega^2 \hat{\boldsymbol{\xi}} = \rho^{-1} \mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) \quad (72)$$

où ω^2 sont les valeurs propres de l'opérateur $\rho^{-1} \mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\xi}})$.

On peut montrer que l'opérateur $\rho^{-1} \mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\xi}})$ est auto-adjoint, donc les valeurs propres ω^2 sont réelles, ce qui implique que ω est soit purement réel (si $\omega^2 \geq 0$), soit purement imaginaire (si $\omega^2 < 0$). L'illustration graphique de ce résultat est montrée dans la figure 13.

Pour donner une interprétation physique aux différents termes de l'opérateur $\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})$ réécrivons-le sous la forme suivante:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) = + \underbrace{\nabla(\gamma p \nabla \cdot \boldsymbol{\xi})}_A + \underbrace{\mu_0 (\nabla \wedge \mathbf{Q}) \wedge \mathbf{B}}_B + \underbrace{\nabla(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}}_C$$

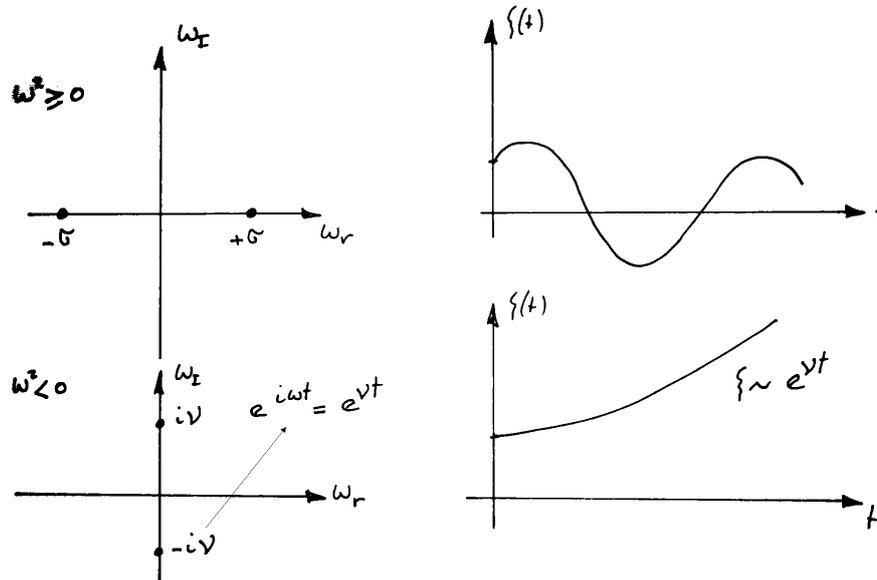


Figure 13: Relation entre les valeurs propres et la dépendance temporelle du vecteur $\xi(\mathbf{x}, t)$. Graphiques du haut: $\omega^2 > 0$, valeur propre stable. Graphique du bas: $\omega^2 < 0$ valeur propre instable.

A est associé aux ondes acoustiques, B aux ondes d'Alfvén; ces deux termes existent dans un plasma isotrope et infini. Ils sont stabilisants puisqu'on a vu que dans un plasma infini on obtient des valeurs propres $\omega^2 > 0$.

C représente des termes qui apparaissent uniquement dans un plasma inhomogène. Ce sont la présence de gradients de pression et de courant qui sont responsables d'instabilités dans des plasmas inhomogènes (exemple: plasma de fusion thermonucléaire).

3.2.4 Principe d'énergie dans la MHD idéale

On a vu que le modèle de la MHD idéale satisfait la loi de conservation d'énergie suivante:

$$\int \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 dV + \int \left[\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} \right] dV = \text{constante}$$

où la première intégrale représente l'énergie cinétique et la deuxième l'énergie potentielle.

La linéarisation de l'énergie cinétique s'obtient en utilisant la définition du déplacement lagrangien (64) on a:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad |\mathbf{u}|^2 &= \frac{\partial \boldsymbol{\xi}^*}{\partial t} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + 0(\boldsymbol{\xi}^3) \\ \Rightarrow \quad T &= \frac{1}{2} \int \rho |\dot{\boldsymbol{\xi}}|^2 dV \end{aligned} \quad (73)$$

La linéarisation de l'énergie potentielle s'obtient de la manière suivante:

à partir de l'équation $\rho \ddot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})$ multiplions à gauche et à droite par $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ et intégrons sur le volume.

$$\underbrace{\int \rho \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \ddot{\boldsymbol{\xi}} dV}_{\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int \rho |\dot{\boldsymbol{\xi}}|^2 dV \right] = \frac{dT}{dt}} = \int \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) dV$$

De la conservation de l'énergie on a:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dV}{dt} = \int \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) dV$$

et en utilisant la propriété (opérateur auto-adjoint)

$$\int \eta \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) dV = \int \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}(\eta) dV$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \int \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) dV &= \frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) dV + \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}(\dot{\boldsymbol{\xi}}) dV \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) dV \right] = -\frac{dV}{dt} \\ \Rightarrow \quad V(\boldsymbol{\xi}) &= -\frac{1}{2} \int \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) dV \end{aligned}$$

$$V \geq 0 \quad [\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) \leq 0] \quad \text{stable}$$

$$V < 0 \quad [\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) > 0] \quad \text{instable}$$

$$V(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \int \left[\underbrace{\gamma p |\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}|^2}_{\text{énergie acoustique}} + \underbrace{|Q|^2}_{\text{énergie magnétique}} + \underbrace{(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} + \mathbf{j} \cdot (\boldsymbol{\xi} \wedge \mathbf{Q})}_{K} \right] dV$$

$>0 \text{ stable}$

Le terme K est l'énergie associée aux gradients de pression, ∇p , et courant, \mathbf{j} . Ce terme peut être négatif donc donner lieu à des instabilités.