MOUVEMENT D'UNE PARTICULE DANS DES CHAMPS ELECTRIQUES ET MAGNETIQUES

Le plasma étant constitué de particules chargées, il est primordial de connaître leur mouvement dans diverses configurations de champs électrique, magnétique, statique ou oscillatoire. En principe, il suffit de résoudre l'équation de Newton, Nous allons dériver quelques propriétés des trajectoires de particules. Là où les calculs ne sont pas trop compliqués, nous utiliserons les équations du mouvement relativiste:

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = q\,[\,\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}\,]$$

$$\underline{v} = \frac{\underline{p}}{\gamma m}$$

$$\gamma = \frac{1}{\left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{1/2}} = \left[1 + \frac{p^2}{m^2c^2}\right]^{1/2}$$

m est la masse au repos de la particule.

I) MOUVEMENT D'UNE PARTICULE DANS UN CHAMPS ELECTRIQUE CONSTANT $\underline{E}_o$ ($\underline{B}_o = 0$)

L'équation du mouvement est:

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = q\underline{E}_o \qquad \text{(I-1)}$$

dont l'intégration est immédiate

$$\underline{p} = q\,\underline{E}_o t \qquad \text{(I-2)}$$

On voit que la vitesse $\underline{v}$ a pour valeur la limite c.

$$\underline{v} = \frac{\underline{p}}{\gamma m} = \frac{q\underline{E}_o t}{m\left[1 + \frac{(qE_o t)^2}{m^2c^2}\right]^{1/2}}$$

Pout t tendant vers l'infini,

$$p \rightarrow \infty \text{ et } v \rightarrow \frac{qE_o t\, mc}{mq\, E_o t} = c$$

On retrouve le résultat bien connu que la vitesse d'une particule ne peut pas dépasser la vitesse de la lumière.

II) MOUVEMENT D'UNE PARTICULE DANS UN CHAMP MAGNETIQUE CONSTANT $\underline{B}_o$ ($\underline{E}_o = 0$)

L'équation du mouvement est :

$$\frac{d\underline{p}}{dt} = q\,[\underline{v} \times \underline{B}_o] \qquad \text{(II-1)}$$

L'énergie γ est conservée car la force de Lorentz est perpendiculaire à $\underline{v}$. L'équation (II-1) se ramène alors à

$$\gamma m \frac{d\underline{v}}{dt} = q\,[\underline{v} \times \underline{B}_o]$$

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{v} \wedge \frac{q}{\gamma m} \qquad \underline{B}_o = \underline{v} \times \underline{\Omega}_c \qquad \text{(II-2)}$$

où $\underline{\Omega}_c = \frac{q}{\gamma m}$ $\underline{B}_o$. Ω_c est la fréquence cyclotron relativiste de la particule

concernée. Notre définition montre que Ω_c *est un nombre algébrique:* Ω_c *est positif pour les ions et négatif pour les électrons*.

L'équation (II-2) montre que, selon la direction parallèle à $\underline{\Omega}_c$, il n'y a pas de force: *le long du champ* $\underline{B}_o$ *le mouvement est uniforme*. La conservation de l'énergie implique que la magnitude de la composante de $\underline{p}$ ou de $\underline{v}$, perpendiculaire à $\underline{B}_o$, est également une constante

$$\frac{\| p_\perp \|}{\gamma m} = \| v_\perp \| = \text{constante} \qquad \text{(II-3)}$$

Choisissons $\underline{B}_o$ selon l'axe Oz. Dans le plan Oxy on a:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB_o}{\gamma m} v_y \quad \text{(II-4)} \qquad \text{(II-4)}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = - \frac{qB_o}{\gamma m} v_x \quad \text{(II-5)}$$

Les équations (II-4) et (II-5) admettent comme solutions:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = v_\perp \sin\Omega_c t \qquad \text{(II-6)}$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = v_\perp \cos\Omega_c t \qquad \text{(II-7)}$$

L'intégration de (II-6) et (II-7) donne:

$$x = - \frac{v_\perp}{\Omega_c} \cos\Omega_c t \qquad \text{(II-8)}$$

$$y = \frac{v_\perp}{\Omega_c} \sin\Omega_c t \qquad \text{(II-9)}$$

La particule décrit dans le plan Oxy un mouvement circulaire. Si q est positif, le sens de rotation est celui des aiguilles d'une montre et si q est négatif il est opposé à celui des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique). Le centre des orbites de giration des particules est appelé **centre de guidage** (en anglais "**guiding center**" ou encore "**gyro-center**")

La quantité $v_\perp / |\Omega_c|$ est le rayon de Larmor. ρ_c.

$$\rho_c = \text{Rayon de Larmor } \frac{v_\perp}{|\Omega_c|} \qquad \text{(II-10)}$$

En conclusion dans un champ magnétique uniforme $\underline{B}_o$ le mouvement d'une particule dans le plan perpendiculaire à $\underline{B}_o$ est circulaire. La composante $\underline{v}_{||}$ de $\underline{v}$ parallèle à $\underline{B}_o$ n'est pas affectée. Si $\underline{v}_{||}$ est constant, alors le mouvement de la particule est une hélice.

Comme il sera montré dans la section VI) de ce chapitre, on peut associer à la rotation de Larmor des ions et des électrons un courant microscopique I_L. Le champ magnétique généré par ce microcourant est déterminé par la loi d'Ampère et est opposé au champ magnétique externe $\underline{B}_0$ pour les deux espèces: ions et électrons. La réponse des particules chargés qui composent le plasma est telle que le **plasma** se comporte comme **un milieu diamagnétique**.

III) MOUVEMENT D'UNE PARTICULE DANS UN CHAMP MAGNETIQUE $\underline{B}_o$ ET SOUS L'ACTION D'UNE FORCE CONSTANTE $\underline{F}$

L'équation du *mouvement non relativiste* est:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{\underline{F}}{m} + \frac{q}{m}\, \underline{v} \times \underline{B}_o \qquad \text{(III-1)}$$

qui se sépare en un mouvement parallèle à $\underline{B}_o$ (noté avec //) et un mouvement perpendiculaire à $\underline{B}_o$ (noté avec $\perp$):

$$\frac{dv_{||}}{dt} = \frac{\underline{F}_{||}}{m} \qquad \text{(III-2)}$$

et

$$\frac{d\underline{v}_\perp}{dt} = \frac{\underline{F}_\perp}{m} + \frac{q}{m}(\underline{v}_\perp \times \underline{B}_o) \qquad \text{(III-3)}$$

Le mouvement parallèle à $\underline{B}_o$ est un mouvement uniformément accéléré.

Pour résoudre (III-3), introduisons une *vitesse de dérive* $\underline{v}_D$ donnée par

$$\underline{v}_D = \frac{1}{q}\frac{\underline{F}_\perp \times \underline{B}_o}{B_o^2} \qquad \text{(III-4)}$$

$\underline{v}_D$ est appelé **vitesse de dérive** et est par définition constante, car la force $\underline{F}_\perp$ et $\underline{B}_o$ sont constantes par définition. Ce terme de vitesse est introduit pour que l'on puisse éliminer $\frac{\underline{F}_\perp}{m}$ par la suite.

Réécrivons la vitesse $\underline{v}_\perp$ comme

$$\underline{v}_\perp = \tilde{\underline{v}}_\perp + \underline{v}_D \qquad \text{(III-5)}$$

Ceci est tout simplement une décomposition de $\underline{v}_\perp$ (i.e. un *changement de référentiel galiléen*).

On a alors

$$\frac{d\underline{v}_\perp}{dt} = \frac{d\tilde{\underline{v}}_\perp}{dt} = \frac{q}{m}\left[\tilde{\underline{v}}_\perp \times B_o\right] + \frac{1}{m}\frac{(\underline{F}_\perp \times \underline{B}_o) \times \underline{B}_o}{B_o^2} + \frac{\underline{F}_\perp}{m} \qquad \text{(III-6)}$$

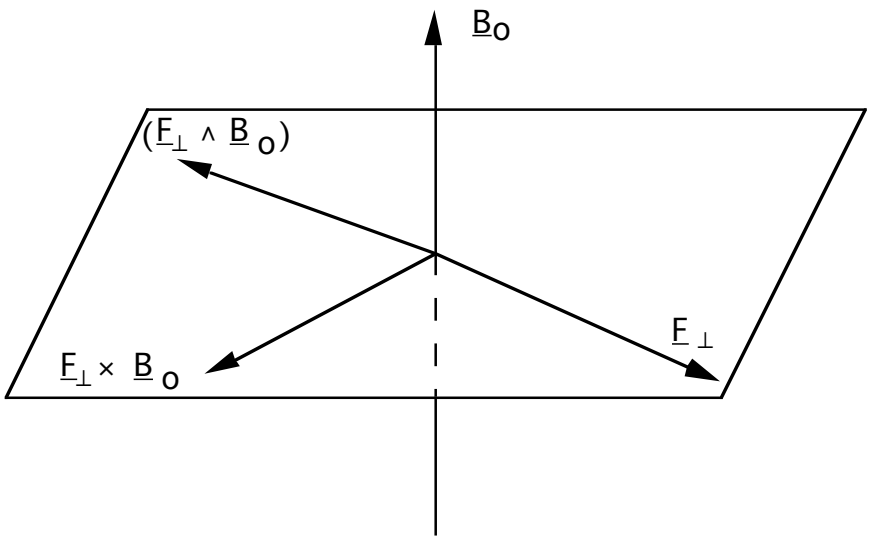

Fig. III-1

Or

$$\frac{(\underline{F}_\perp \times \underline{B}_o) \times \underline{B}_o}{B_o^2} = - \frac{\underline{B}_o \times (\underline{F}_\perp \times \underline{B}_o)}{B_o^2} = - \frac{B_o^2}{B_o^2} \underline{F}_\perp + \frac{(\underline{B}_o \bullet \underline{F}_\perp)\,\underline{B}_o}{B_o^2} = - \underline{F}_\perp$$

L'équation (III-4) se réduit à :

$$\frac{d\underline{\tilde{v}}_\perp}{dt} = \frac{q}{m}\left[\underline{\tilde{v}}_\perp \times \underline{B}_o\right] \quad \text{(III-7)}$$

Le mouvement perpendiculaire de la particule, dans le référentiel se mouvant à la vitesse $\underline{v}_D$, est donc le mouvement cyclotron. Le centre de guidage a une vitesse égale à la vitesse de dérive $\underline{v}_D$. Le mouvement perpendiculaire total est donc une cycloïde (Fig. III-1). Notons que $\underline{v}_D$ dépend de la charge: **les vitesses de dérive sont opposées pour des charges opposées lorsque la force $\underline{F}$ est indépendante de la charge** (par exemple lorsque $\underline{F}$ est une force de gravité ou analogue à cette dernière, c'est à dire du type α g).

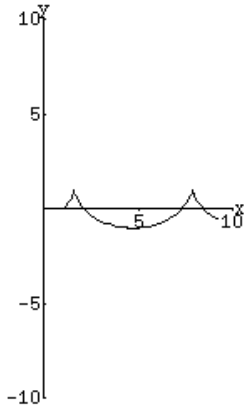

Fig. III-2

Trajectoire d'un électron sous l'action de $\underline{F}_\perp$ parallèle à $-\underline{e}_y$ dans un champ magnétique $B_o\underline{e}_z$. $\underline{e}_z$ sort de la feuille. La vitesse de dérive des électrons $\underline{V}_D$ est alors selon $\underline{e}_x$.

IV) LA DERIVE ($\underline{E} \times \underline{B}_o$)

Comme cas particulier de la force $\underline{F}_\perp$, prenons la force due à un champ électrique $\underline{E}_\perp$ perpendiculaire à $\underline{B}_o$:

$$\underline{F}_\perp = q\underline{E}_\perp \qquad \text{(IV-1)}$$

La vitesse de dérive $\underline{v}_D$ est alors

$$\underline{v}_D = \frac{\underline{F}_\perp \times \underline{B}_o}{qB_o^2} = \frac{\underline{E}_\perp \times \underline{B}_o}{B_o^2} \qquad \text{(IV-2)}$$

La dérive $\underline{v}_D$ induite par un champ électrique $\underline{E}_\perp$ perpendiculaire à $\underline{B}_o$ est indépendante de la charge de la particule.

V) APPLICATION A L'INSTABILITE RAYLEIGH TAYLOR

Cette instabilité est celle d'un liquide lourd sur un liquide léger dans le champ de gravité. La condition d'équilibre est simplement que l'interface entre les deux liquides est un plan horizontal. Notre expérience de chaque jour montre que les deux liquides inversent leur position : le liquide lourd est à la fin du processus au-dessous du liquide léger. On dit dans ce cas que

l'équilibre est instable.
Un plasma supporté par un champ magnétique dans un champ gravitationnel g est instable (Fig. V-1). On peut obtenir une image physique de l'origine de cette instabilité à partir du mouvement des ions et des électrons.

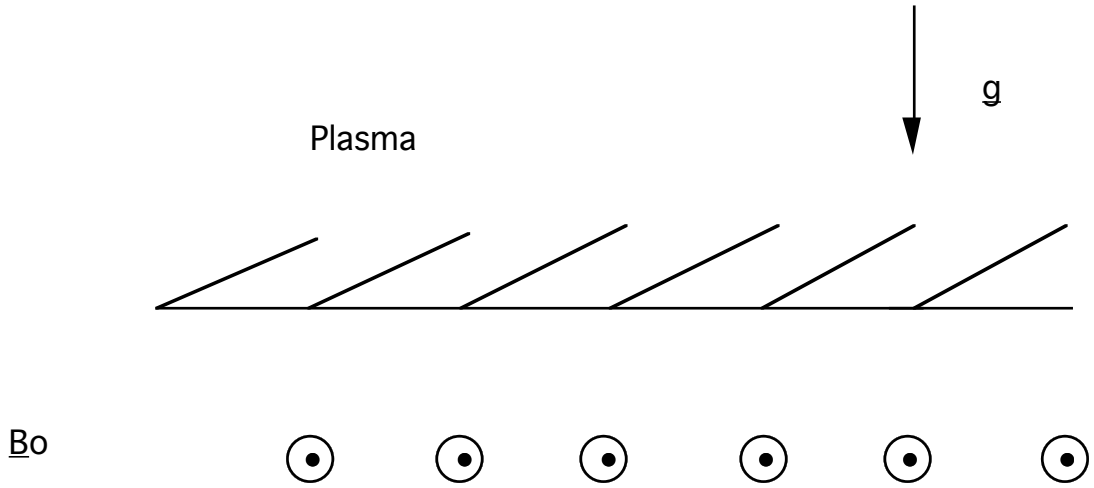

Fig. V-1

Configuration donnant lieu à une instabilité de Rayleigh-Taylor

Le champ gravitationnel g produit une force sur les ions

$$\underline{F}_{\perp i} = m_i \underline{g} \qquad \text{(V-1)}$$

et sur les électrons

$$\underline{F}_{\perp e} = m_e \underline{g} \qquad \text{(V-2)}$$

$\underline{F}_{\perp i}$ et $\underline{F}_{\perp e}$ induisent respectivement une dérive sur les ions

$$\underline{V}_{Di} = \frac{m_i}{q} \frac{\underline{g} \times \underline{B}_o}{B_o^2} \qquad \text{(V-3)}$$

et une dérive sur les électrons

$$\underline{V}_{De} = -\frac{m_e}{q} \frac{\underline{g} \times \underline{B}_o}{B_o^2} \qquad \text{(V-4)}$$

$\underline{V}_{Di}$ et $\underline{V}_{De}$ sont donc opposées et V_{Di} est m_i/m_e fois supérieure à V_{De}. Les particules positives et négatives dérivant dans des directions opposées donnent lieu à une séparation de charge et donc naissance à un champ électrique $\underline{E}$ (Fig. V-2). Le champ $\underline{E}$, perpendiculaire à $\underline{B}_o$, donne alors naissance à une dérive $\underline{V}_D$

$$\underline{V}_D = \frac{\underline{E} \times \underline{B}_o}{B_o^2} \qquad \text{(V-5)}$$

parallèle à g dans les régions où le plasma a envahi le vide et antiparallèle à g dans les régions abandonnées par le plasma. Cette dérive augmente alors la perturbation.

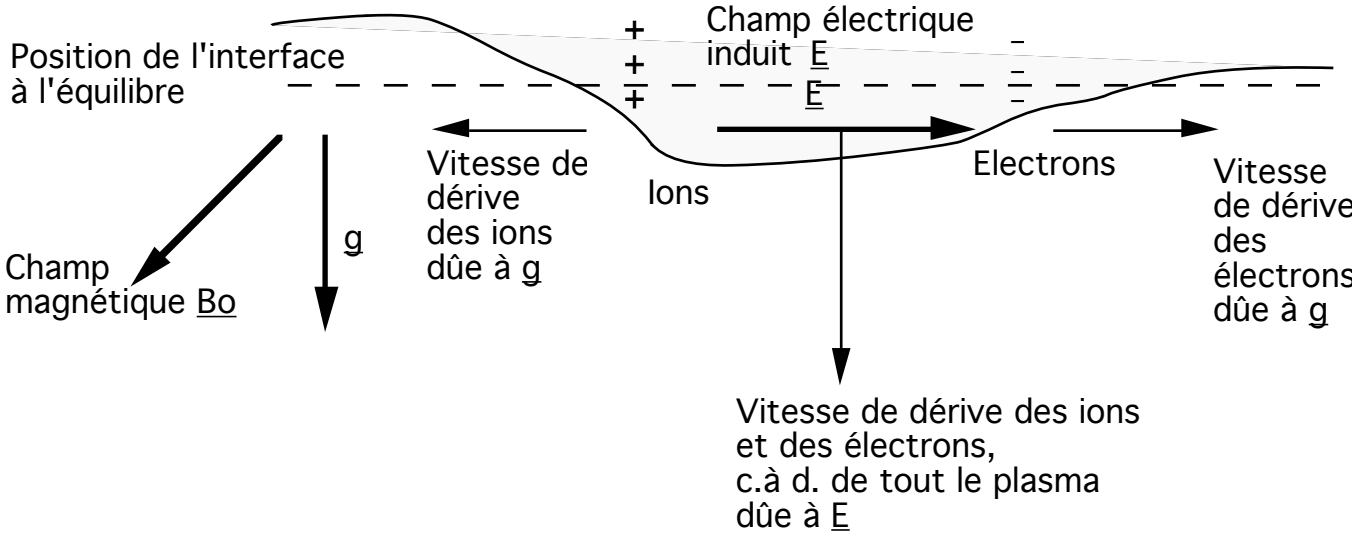

Fig. V-2

Schéma indiquant les vitesses de dérives $\underline{v}_{Di}$ et $\underline{v}_{De}$, le champ électrique $\underline{E}$ induit et la vitesse de dérive résultant $\underline{v}_D$..

VI) MOUVEMENT D'UNE PARTICULE DANS UN CHAMP MAGNETIQUE LENTEMENT VARIABLE DANS LE TEMPS B = $\underline{B}_o(t)$

Supposons que le champ magnétique *varie lentement dans le temps* c.-à-d.

$$\frac{1}{B_o\,|\Omega_c|}\left|\left|\frac{\partial \underline{B}_o}{\partial t}\right|\right| \quad << \quad 1 \qquad \text{(VI-1)}$$

Nous n'allons pas calculer la trajectoire de la particule, mais une *constante du mouvement*.
La variation du champ magnétique change le rayon de Larmor: l'orbite de la particule change et l'énergie cinétique transverse varie. Cette variation d'énergie est donnée ou absorbée par le champ électrique induit $\underline{E}$:

$$\underline{\nabla} \times \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}_o}{\partial t} \qquad \text{(VI-2)}$$

En effet

$$\frac{dW_\perp}{dt} \quad = \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} m v_\perp^2\right] \quad = m\underline{v}_\perp \bullet \frac{d\underline{v}_\perp}{dt} = \quad q\underline{v}_\perp \bullet \underline{E} \qquad \text{(VI-3)}$$

En écrivant

$$\underline{v}_\perp \quad = \quad \frac{d\underline{l}}{dt}$$

où $d\underline{l}$ est un élément de longueur le long de la trajectoire, l'équation (VI-3) devient

$$\frac{dW_\perp}{dt} \quad = \quad q\ \underline{E} \bullet \frac{d\underline{l}}{dt} \qquad \text{(VI-4)}$$

Moyennée sur une orbite, la variation de l'énergie cinétique perpendiculaire est

$$\delta W_\perp = q \int_0^{2\pi/\Omega_c} E . \frac{d\underline{l}}{dt} dt \qquad \text{(VI-5)}$$

Si les changements des orbites sont faibles, on peut remplacer l'intégrale

sur le temps par une intégrale curviligne sur une orbite

$$\delta W_\perp = q \oint \underline{E} \bullet d\underline{l} = q \int_s (\underline{\nabla} \times \underline{E}) \bullet d\underline{S}$$

$$= - q \int_s \frac{\partial \underline{B}_o}{\partial t} d\underline{S}$$

$$\cong |q| \pi \rho_c^2 \frac{\partial \underline{B}_o}{\partial t} \qquad \text{(VI-6)}$$

On notera que le signe – a disparu puisque pour les charges positives (q>0), $\underline{B_0}.d\underline{S}$ <0 et pour les charges négatives (q>0), $\underline{B_0}.d\underline{S}$ >0. Ceci est une conséquence de la définition de $d\underline{l}$ considérée ici qui change de signe entre q>0 et q<0.

En une période $2\pi/\Omega_c$ le changement de B est

$$\delta \underline{B} = \frac{\partial \underline{B}_o}{\partial t} \frac{2\pi}{\Omega_c} \qquad \text{(VI-7)}$$

En insérant (VI-7) dans (VI-6) on obtient

$$\delta W_\perp = \frac{q\pi v_\perp^2}{\Omega_c^2} \frac{\partial \underline{B}_o}{\partial t}$$

$$\delta W_\perp = \frac{W_\perp}{B_o} \delta B \qquad \text{(VI-8)}$$

soit $$\frac{\delta W_\perp}{B_o} - \frac{W_\perp}{B_o^2} \delta B = 0$$

$$\delta \left[\frac{W_\perp}{B_o} \right] = 0 \qquad \text{(VI-9)}$$

La quantité $(W_\perp/B_o)$ est donc une constante du mouvement lorsque le champ $\underline{B_o}$ varie lentement.

Donnons maintenant une interprétation de $W_\perp/B_o$. Rappelons d'abord que le

moment magnétique μ d'une boucle de courant I_L de rayons ρ_c est

$$\mu = \pi I_L \rho_c^2 \qquad \text{(VI-10)}$$

Une particule tournant sur orbite de Larmor à la fréquence cyclotron Ω_c crée un courant

$$I_L = \frac{q\Omega_c}{2\pi} \qquad \text{(VI-11)}$$

et le moment magnétique est

$$\mu = \frac{\pi q\, \Omega_c}{2\pi} \frac{v_\perp^2}{\Omega_c^2} \qquad \text{(VI-12)}$$

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{mv_\perp^2}{B_o} = \frac{W_\perp}{B_o} \qquad \text{(VI-13)}$$

L'équation (9) décrit **donc la conservation du moment magnétique μ** lorsque le champ B_o est faiblement variable

$$\delta[\mu] = 0 \qquad \text{(VI-14)}$$

On dit que **le moment magnétique μ est un invariant adiabatique**. Par là on entend que μ est invariant lorsque la variation de $B_o(t)$ est adiabatique, c.-à-d. lente.

L'équation (8) montre aussi que $\delta W_\perp$ est augmenté lorsque l'on augmente B_o d'une manière adiabatique. Ceci est donc une méthode de chauffage du plasma, connu sous le nom de *chauffage par compression adiabatique*. Le terme compression vient du fait que lorsque B_o est augmenté, le plasma est également comprimé *(Pourquoi?)*.

DIAMAGNETISME

Vectoriellement le moment magnétique de chaque particule s'écrit comme:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} q\, \vec{r}_L \wedge \vec{v}_\perp = -\frac{\frac{1}{2} m v_\perp^2}{B} \vec{e}_B = -\frac{\frac{1}{2} m v_\perp^2}{B} \frac{\vec{B}}{B} \qquad \text{(VI-15)}$$

ou le signe – indique que l'orientation du moment dipolaire est opposée au champ externe.

Calculons maintenant dans un plasma l'intensité d'aimentation macroscopique M résultant de l'ensemble des moments magnétiques orbitaux des particules individuelles. En désignant par n_e, n_i les densités, par T_e, T_i les températures électroniques et ioniques on obtient:

$$\vec{M} = -\frac{M}{B} \vec{B}$$

avec

$$M = \sum_{e,i} \frac{\frac{1}{2} m v_\perp^2}{B}$$

et pour chaque particule on a:

$$\left\langle \tfrac{1}{2} m v_\perp^2 \right\rangle = \left\langle \tfrac{1}{2} m v_x^2 \right\rangle + \left\langle \tfrac{1}{2} m v_y^2 \right\rangle = k_B\, T$$

d'où le résultat final:

$$M = \frac{n_e k_B T_e + n_i k_B T_i}{B}$$

ce qu'on écrit souvent en supposant $T_e = T_i$ et en posant $n = (n_e + n_i)$:

$$\vec{M} = -\frac{n k_b T}{B^2} \vec{B} \qquad \text{(VI-16)}$$

Comme dans tout milieu magnétique, il existe un courant de magnétisation, $\vec{J}_M = \nabla \wedge \vec{M}$. Ce courant est nul dans plasma uniforme; il existe par contre dans les régions présentant des gradients, par exemple au bord d'un plasma

limité (de taille finie). En considérant les courant libres et les courants liés qui peuvent exister dans le plasma, la loi d'Ampère s'écrit alors:

$$\frac{\nabla \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \vec{J} + \vec{J}_M = \vec{J} + \nabla \wedge \vec{M}$$

Le champ magnétique B dans le plasma est donc obtenu à partir du champ appliqué $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$ qui existerait en l'absence de plasma par la relation:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} = \vec{B}_0 - \mu_0 \frac{n k_B T}{B^2}\vec{B} = \vec{B}_0 - \frac{1}{2}\frac{p}{\frac{B^2}{2\mu_0}}\vec{B} = \vec{B}_0 - \frac{1}{2}\beta\vec{B} \qquad \text{(VI-17)}$$

où on a utilisé le paramètre β introduit au chapitre précédent qui est le rapport entre la pression cinétique $p = n k_B T$ et la pression magnétique $p_{mag} = \frac{B^2}{2\mu_0}$.

A partir de l'équation (VI-17) il vient que:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{H}}{(1 + \beta/2)}$$

ce qui montre que l'amplitude du champ magnétique dans le plasma est plus petite que l'amplitude du champ appliqué $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$. On en conclut donc que le plasma est un milieu diamagnétique.

VII) MOUVEMENT D'UNE PARTICULE DANS UN CHAMP MAGNETIQUE STATIQUE $\underline{B}_O$ ET UN CHAMP ELECTRIQUE VARIABLE $\underline{E}(t)$

Nous allons distinguer deux cas selon la valeur de la variation de E pendant une période cyclotron. Si cette variation est faible, on peut utiliser les résultats dérivés de la théorie adiabatique. Le deuxième cas étudié est celui où $\underline{E}(t)$ varie à une fréquence proche de la fréquence cyclotron.

A) Variation adiabatique

La condition de validité est:

$$\frac{1}{E\,|\Omega_c|}\left|\left|\frac{d\underline{E}}{dt}\right|\right| \ll 1 \qquad \text{(VII-1)}$$

Nous supposons que $\underline{E}$ est perpendiculaire à $\underline{B}_o$. Le mouvement parallèle à $\underline{B}_o$ est trivial. *Si $\underline{E}$ était statique*, le mouvement de la particule serait la combinaison d'un mouvement cyclotron et d'un mouvement de dérive $\underline{v}_D^0$

$$\underline{v}_D^0 = \frac{\underline{E} \times \underline{B}_o}{B^2} \qquad \text{(VII-2)}$$

L'introduction d'un champ $\underline{E}$ variable dans le temps va modifier cette vitesse de dérive $\underline{v}_D^0$. Pour résoudre l'équation du mouvement

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{q}{m}\,[\underline{E}(t) + \underline{v} \times \underline{B}_o] \qquad \text{(VII-3)}$$

nous allons de nouveau décomposer $\underline{v}$:

$$\underline{v} = \underline{v}_D^0 + \underline{u} \qquad \text{(VII-4)}$$

$\underline{u}$ contient maintenant non seulement le mouvement de giration (comme nous l'avons

vu pour le cas $\underline{E}$ statique) mais également la dérive due à la variation temporelle de $\underline{E}$. Substituons (VII-4) dans (VII-3)

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = \frac{q}{m} \underline{u} \times \underline{B}_o - \frac{d\, \underline{v}_D^0}{dt} \qquad \text{(VII-5)}$$

L'équation (VII-5) se résout par un changement de variable

$$\underline{u} = \tilde{\underline{u}} + \underline{v}_D^P \qquad \text{(VII-6)}$$

où

$$\underline{v}_D^P = -\frac{m}{q\, B_o^2} \left[\frac{d\, \underline{v}_D^0}{dt} \times \underline{B}_o \right] \qquad \text{(VII-7)}$$

En effet, *en négligeant les dérivées secondes de $\underline{E}(t)$*

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = \frac{d\, \tilde{\underline{u}}}{dt} = \frac{q}{m} \left[\tilde{\underline{u}} \times \underline{B}_o \right] \qquad \text{(VII-8)}$$

Le terme $\underline{v}_D^P$ est appelé **vitesse de dérive due à la polarisation** et vaut

$$\underline{v}_D^P = -\frac{m}{qB_o^4} \left[\frac{d\underline{E}}{dt} \times \underline{B}_o \right] \times \underline{B}_o \qquad \text{(VII-9)}$$

$$\underline{v}_D^P = \frac{m}{qBo^2} \frac{d\underline{E}}{dt} \qquad \text{(VII-10)}$$

$\underline{v}_D^P$ dépend du signe de la charge et de la dérivée temporelle du champ

électrique $\underline{E}(t)$. La dérive totale est

$$\underline{v}_D = \underline{v}_D^0 + \underline{v}_D^P = \frac{\underline{E} \times \underline{B}_o}{B_o^2} + \frac{m}{qBo^2}\frac{d\underline{E}}{dt} \qquad \text{(VII-11)}$$

Il y a deux résultats intéressants à considérer. Tout d'abord, $\underline{v}_D^0$ est perpendiculaire à $\underline{E}$: il n'y a donc pas d'échange d'énergie entre le champ et les particules. Toutefois, on constate que $\underline{v}_D^0$, mesurée entre deux instants, varie car $\underline{E}$ change: il y a donc changement de l'énergie cinétique associée à $\underline{v}_D^0$. Cette énergie provient du travail W exécuté par le champ $\underline{E}$ sur la particule lorsqu'elle dérive selon $\underline{v}_D^P$:

$$\delta W = \int_{t_i}^{t_2} q\underline{E} \bullet \underline{v}_D^P \, dt = \frac{m}{B_o^2} \int_{t_1}^{t_2} \underline{E} \bullet \frac{d\underline{E}}{dt} \, dt \qquad \text{(VII-12)}$$

La variation d'énergie cinétique $\frac{1}{2}m\left(\underline{v}_D^0\right)^2$ est:

$$\delta\left(\frac{1}{2} m\left(\underline{v}_D^0\right)^2\right) = \frac{m}{B_o^2} \int_{t_1}^{t_2} \underline{E} \bullet \frac{d\underline{E}}{dt} \, dt \qquad \text{(VII-13)}$$

La comparaison de (VII-12) et (VII-13) montre que la variation d'énergie cinétique $\frac{1}{2}m\left(\underline{v}_D^0\right)^2$ est égale au travail de la force électrique sur la particule lors de son mouvement de dérive $\underline{v}_D^P$.

B) Variation temporelle du champ électrique E à une fréquence ω proche de Ω_c

Nous supposerons

$$\underline{E}(t) = \underline{\tilde{E}}\exp(i\omega t) \quad \text{(VII-14)}$$

L'équation de Newton est alors

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{q}{m}\left[\underline{\tilde{E}}\exp(i\omega t) + \underline{v}\times\underline{B}_o\right] \quad \text{(VII-15)}$$

Intuitivement nous nous attendions à trouver une solution qui dépende de exp{iωt}. Essayons alors l'ansatz suivant:

$$\underline{v} = \underline{v}_M + \underline{v}_E\exp(i\omega t) \quad \text{(VII-16)}$$

où $\underline{v}_M$ a une dépendance temporelle autre que exp(iωt). Insérant (VII-16) dans (VII-15), nous donne :

$$\frac{d\underline{v}_M}{dt} + i\omega\underline{v}_E\exp(i\omega t) = \frac{q}{m}\left[\underline{\tilde{E}}\exp(i\omega t) + \underline{v}_M\times\underline{B}_o + \left[\underline{v}_E\times\underline{B}_o\right]\exp(i\omega t)\right] \quad \text{(VII-17)}$$

L'équation (VII-17) se sépare en deux équations, une première indépendante de ω

$$\frac{d\underline{v}_M}{dt} = \frac{q}{m}(\underline{v}_M\times\underline{B}_o) \qquad \text{(Mvt. cyclotron)} \quad \text{(VII-18)}$$

et une seconde qui dépend de ω

$$i\omega\underline{v}_E = \frac{q}{m}\left[\underline{\tilde{E}} + \underline{v}_E\times\underline{B}_o\right] \quad \text{(VII-19)}$$

L'équation (VII-18) décrit de nouveau le mouvement cyclotron. L'équation (VII-19) décrit le mouvement forcé à la fréquence ω:

$$\left[i\omega + \frac{q}{m} \underline{B}_o \times \right] \quad \underline{v}_E = \frac{q}{m} \underline{\tilde{E}} \qquad \text{(VII-20)}$$

Pour résoudre l'équation (VII-20), multiplions les deux membres par l'opérateur $\left[i\omega - \frac{q}{m} \underline{B}_o \times \right]$

$$\left[i\omega - \frac{q}{m} \underline{B}_o \times \right] \left\{ \left[i\omega + \frac{q}{m} \underline{B}_o \times \right] \underline{v}_E \right\} = \frac{q}{m} \left[i\omega - \frac{q}{m} \underline{B}_o \times \right] \underline{\tilde{E}} \qquad \text{(VII-21)}$$

$$\left[-\omega^2 \underline{v}_E - \frac{q^2}{m^2} \underline{B}_o \times \left(\underline{B}_o \times \underline{v}_E \right) \right] = \frac{q}{m} \left[i\omega - \frac{q}{m} \underline{B}_o \times \right] \underline{\tilde{E}} \qquad \text{(VII-22)}$$

Soit $\underline{\tilde{E}} = \underline{E}_{\parallel} + \underline{E}_{\perp}$ (VII-23)

où les indices parallèle et perpendiculaire se réfèrent au champ magnétique $\underline{B}_o$.

Le mouvement parallèle est alors:

$$- \omega^2 \underline{v}_{E\parallel} + \frac{q^2}{m^2} B_o^2 \underline{v}_{E\parallel} - \frac{q^2}{m^2} B_o^2 \underline{v}_{E\parallel} = \frac{q}{m} i\omega \underline{E}_{\parallel}$$

soit

$$\underline{v}_{E\parallel} = - \frac{i\, q}{m\omega} E_{\parallel} \qquad \text{(VII-24)}$$

Le mouvement perpendiculaire est donné par

$$\left[-\omega^2 + \frac{q^2}{m^2}B_o^2\right] \qquad \underline{v}_{E\perp} = \frac{q}{m}\left[i\omega - \frac{q}{m}\underline{B}_o x\right] \qquad \underline{E}_\perp$$

soit

$$\underline{v}_{E\perp} = \frac{\frac{q}{m}\left[i\omega - \underline{\Omega}_c \times\right] \underline{E}_\perp}{\Omega_c^2 - \omega^2} \qquad \text{(VII-25)}$$

où

$$\underline{\Omega}_c = \frac{q}{m} \underline{B}_o$$

Pour étudier plus en détail l'équation (VII-25), nous allons décomposer $\underline{E}_\perp$ qui est linéairement polarisée en somme de deux vecteurs circulairement polarisés

$$\underline{E}_\perp = \frac{1}{2}\left[\underline{E}_\perp + i\frac{\underline{\Omega}_c \times \underline{E}_\perp}{\Omega_c}\right] + \frac{1}{2}\left[\underline{E}_\perp - i\frac{\underline{\Omega}_c \times \underline{E}_\perp}{\Omega_c}\right]$$

$$= \underline{E}_L + \underline{E}_R \qquad \text{(VII-26)}$$

Examinons chaque terme de la somme (VII-25). Prenons par exemple $\underline{E}_L$. Ses composantes sont:

$$\underline{E}_L = \frac{\tilde{E}_\perp}{2}\left[\underline{e}_x \, \mathrm{Re}\left(\exp(i\omega t)\right) + \underline{e}_y \, \mathrm{Re}\left(\exp\left(i\omega t + \frac{i\pi}{2}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{E_\perp}{2} \cos \omega t \, \underline{e}_x - \frac{E_\perp}{2} \sin \omega t \, \underline{e}_y \qquad \text{(VII-26)}$$

On voit que $\underline{E}_L$ est polarisé circulairement. Son sens de giration est gauche lorsque l'on regarde en direction de Oz, soit en direction de $\underline{B}_o$. De même $\underline{E}_R$

est donnée par

$$\underline{E}_R = \frac{E_\perp}{2} \cos \omega t \, \underline{e}_x + \frac{E_\perp}{2} \sin \omega t \, \underline{e}_y \qquad \text{(VII-28)}$$

$\underline{E}_R$ est polarisée circulairement droite lorsque l'on regarde en direction de $\underline{B}_o$. Calculons la valeur du numérateur de (VII-25) avec la composante $\underline{E}_L$

$$\frac{q}{m}[i\omega - \underline{\Omega}_c \times] \quad \underline{E}_L = \frac{q}{2m}\left[i\omega - \Omega_c \times\right]\left[E_\perp + i\frac{\Omega_c \times E_\perp}{\Omega_c}\right]$$

$$= \frac{q}{2m}\left[i\omega E_\perp - \Omega_c \times E_\perp - \omega\frac{\Omega_c \times E_\perp}{\Omega_c} - i\frac{\Omega_c \times (\Omega_c \times E_\perp)}{\Omega_c}\right]$$

$$= \frac{q}{2m}\left[i\omega E_\perp - \Omega_c \times E_\perp - \frac{\omega}{\Omega_c}(\Omega_c \times E_\perp) + i\Omega_c E_\perp\right]$$

$$= \frac{q}{2m} \; i(\omega + \Omega_c)\left[E_\perp + i\frac{\Omega_c \times E_\perp}{\Omega_c}\right]$$

$$\frac{q}{m}[i\omega - \underline{\Omega}_c \times] \quad \underline{E}_L = \frac{q}{m} \; i\,(\omega + \Omega_c)\,\underline{E}_L \qquad \text{(VII-29)}$$

De même

$$\frac{q}{m}[i\omega - \underline{\Omega}_c x] \quad \underline{E}_R = + \frac{qi}{m}(\omega - \Omega_c) \quad \underline{E}_R \qquad \text{(VII-30)}$$

Les relations (VII-29) et (VII-30) montrent que $\underline{E}_L$ et $\underline{E}_R$ sont les vecteurs propres associés à l'opérateur $(i\omega - \underline{\Omega}_c x)$. A chacun de ces vecteurs propres $\underline{E}_L$

et $\underline{E}_R$ correspond donc respectivement aux vitesses $\underline{v}_{EL}$ et $\underline{v}_{ER}$ données par

$$\underline{v}_{EL} = \frac{iq}{m} \frac{\underline{E}_L}{\omega - \Omega_c} \qquad \text{(VII-31)}$$

$$\underline{v}_{ER} = \frac{iq}{m} \frac{\underline{E}_R}{\omega + \Omega_c} \qquad \text{(VII-32)}$$

Pour un ion positif, Ω_c est positif. La formule (VII-31) montre alors que la vitesse perpendiculaire $\underline{v}_{EL}$ devient infinie pour $\omega = \Omega_c$ en présence d'un champ électrique gauche E_L (opposé au sens trigonométrique). Une charge négative a le même comportement en présence d'une onde droite $\underline{E}_R$.

Cette résonance peut être expliquée de la manière suivante. Un ion positif a un mouvement de giration dans le sens gauche à la fréquence Ω_c. Un champ électrique polarisé circulairement gauche et de fréquence Ω_c est toujours en phase avec la particule donnant ainsi lieu à une accélération continue.

VIII) MOUVEMENT D'UNE PARTICULE DANS UN CHAMP MAGNETIQUE INDEPENDANT DU TEMPS ET LENTEMENT VARIABLE DANS L'ESPACE $\underline{B}_o(r)$ ($\underline{E}_o = 0$)

Nous allons supposer que le champ $\underline{B}_o(\underline{r})$ est inhomogène

$$\underline{B}_o(\underline{r}) = \underline{B}_o(\underline{r}_o) + (\underline{r} \bullet \underline{\nabla}_o)\underline{B}_o \qquad \text{(VIII-1)}$$

$\underline{\nabla}_o$ signifie que la dérivation doit être prise en $\underline{r} = \underline{r}_o$, position du centre de guidage. Le champ est lentement variable, c'est-à-dire:

$$\|\underline{B}_o(r_o)\| >> \|(\underline{r} \bullet \underline{\nabla}_o)\, \underline{B}_o\| \qquad \text{(VIII-2)}$$

Cette faible inhomogénéité a pour conséquence que les orbites sont proches des orbites circulaires correspondantes au cas du champ $\underline{B_o}$ uniforme.
L'équation du mouvement est:

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{q}{m}\left[\underline{v} \times \underline{B}_o + (\underline{v} \times (\underline{r} \bullet \underline{\nabla}_o)\underline{B}_o)\right] \qquad \text{(VII-3)}$$

Le terme $(\underline{v} \times (\underline{r} \bullet \underline{\nabla}_o)\underline{B}_o)$ est considéré comme perturbation au premier ordre. On développe $\underline{v}$ en série

$$\underline{v} = \underline{v}_o + \underline{v}^{(1)} \qquad \text{(VIII-3)}$$

A l'ordre 0 on a

$$\frac{d\underline{v}_o}{dt} = \frac{q}{m}(\underline{v}_o \times \underline{B}_o)$$

$$\frac{d\underline{v}^{(1)}}{dt} = \frac{q}{m}(\underline{v}^{(1)} \times \underline{B}_o) + \frac{q}{m}(\underline{v}_o \times (\underline{R} \bullet \underline{\nabla}_o)\underline{B}_o) \qquad \text{(VIII-4)}$$

Dans le terme $\underline{v} \times (\underline{r} \bullet \underline{\nabla}_o)\underline{B}_o$, $\underline{v}$ a été remplacé par $\underline{v}_o$ car $(\underline{r} \bullet \underline{v}_o)\underline{B}_o$ est un terme du premier ordre. De plus $\underline{r}$ a été remplacé par $\underline{R}$, orbite de giration de la particule à l'ordre 0. Cette dernière substitution a été également faite pour que le terme $(\underline{R} \bullet \underline{\nabla}_o)\underline{B}_o$ soit d'ordre 1. L'équation (VIII-4) est du type

$$\frac{d\underline{v}^{(1)}}{dt} = \frac{q}{m}[\underline{v}^{(1)} \times \underline{B}_o] + \frac{\underline{F}}{m} \qquad \text{(VIII-5)}$$

c'est à dire une équation que nous avons résolue auparavant, lorsque $\underline{F}$ est constante. Dans le cas de l'équation (VIII-5), *$\underline{F}$ n'est pas constante car il dépend de $\underline{R}$.*

Nous n'allons pas résoudre l'équation VIII-5 en fonction du temps, mais étudier le mouvement sur des échelles de temps de l'ordre de la période cyclotron.

Calculons **la moyenne de $\underline{F}$ au cours d'une orbite de giration:**

$$<\underline{F}> \quad = \quad < q\,\underline{v}_o \times (\underline{R} \bullet \underline{\nabla}_o)\,\underline{B}_o > \qquad \text{(VIII-6)}$$

Dans un système de coordonnées cylindriques avec l'axe Oz parallèle à $\underline{B}_o$ (VIII-6) se simplifie

$$<\underline{F}> \quad = \quad \left\langle q\underline{v}_o \times R\,\frac{\partial_o}{\partial r}\underline{B}_o \right\rangle \qquad \text{(VIII-7)}$$

La vitesse $\underline{v}_o$ est tangente à l'orbite: $\underline{v}_o$ ne possède qu'une composante azimutale v_θ. Par conséquent, la composante B_{oz} va donner naissance à une force perpendiculaire $\underline{F}_\perp$ et B_{or} à une composante parallèle $\underline{F}_\parallel$ à $\underline{B}_o$:

$$<\underline{F}_\perp> \quad = \quad \left\langle q\underline{v}_o \times R\,\frac{\partial_o B_{oz}}{\partial r}\underline{e}_z \right\rangle \qquad \text{(VIII-8)}$$

$$<\underline{F}_\parallel> \quad = \quad \left\langle q\underline{v}_o \times \underline{R}\,\frac{\partial_o}{\partial r}B_{or} \right\rangle \qquad \text{(VIII-9)}$$

Examinons d'abord $<\underline{F}_\parallel>$. $q\underline{v}_o \times \underline{R}$ est un vecteur parallèle à Oz dont la magnitude est égale au double du moment magnétique

$$<\underline{F}_\parallel> \quad = \quad 2\,\mu_m \left\langle \frac{\partial_o B_{or}}{\partial r} \right\rangle \quad \underline{e}_z \qquad \text{(VIII-10)}$$

Evaluons $\left\langle \frac{\partial_o B_{or}}{\partial r} \right\rangle$. L'équation de Maxwell $\underline{\nabla} \bullet \underline{B}$ s'écrit en coordonnées cylindriques

$$\underline{\nabla} \bullet \underline{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{B_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{(VIII-11)}$$

La moyenne de $\frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta}$ est

$$\left\langle \frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \right\rangle = \frac{1}{2\pi R}\int \frac{1}{R}\frac{\partial B}{\partial \theta} R\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi R}\int \frac{\partial B}{\partial \theta} d\theta = 0 \qquad \text{(VIII-12)}$$

Estimons B_r/r pour de petits r:

$$B_r = B_r(r = 0) + \frac{\partial B_r}{\partial r} r \qquad \text{(VIII-13)}$$

Par choix même des axes de coordonnées, en r = 0 le champ $\underline{B}$ est dirigé selon Oz. (VIII-13) devient alors

$$B_r = \frac{\partial B_r}{\partial r} r$$

soit

$$\frac{B_r}{r} = \frac{\partial B_r}{\partial r} \quad (r \rightarrow 0) \qquad \text{(VIII-13)}$$

On a donc,

$$2\left\langle \frac{\partial B_r}{\partial r} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial B_z}{\partial z} \right\rangle = - \frac{\partial B_z}{\partial z} \qquad \text{(VIII-14)}$$

L'expression de $\underline{F}_{\|}$ devient alors

$$\mathbf{<F_{\|}>} \quad = \quad - \mu_m \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad \underline{e}_z \qquad \text{(VIII-14)}$$

Si le champ B_z augmente avec z, une force $<F_{\|}>$ s'exerce sur la particule dans le sens opposé. Montrons que sous l'action de $<F_{\|}>$ la vitesse parallèle peut s'annuler. Pour cela, on utilise la conservation de l'énergie cinétique (la force magnétique est perpendiculaire au déplacement et ne contribue pas à la variation de l'énergie) et la constance du moment magnétique. Cette dernière résulte de l'adiabaticité du mouvement. La configuration du champ magnétique est donnée à la figure (VIII-1): c'est celle des machines miroirs. Le champ B_z est plus élevé aux deux bouts de la machine. Soit $z = z_o$ le plan de symétrie de la machine. Appelons z_t l'endroit où la vitesse parallèle s'annule. La conservation de l'énergie cinétique nous donne alors:

$$W_{\perp}(z_o) + W_{\|}(z_o) \quad = \quad W_{\perp}(z_t) \qquad \text{(VIII-15)}$$

et la constance du moment magnétique:

$$\frac{W_{\perp}(z_o)}{B(z_o)} \quad = \quad \frac{W_{\perp}(z_t)}{B(z_t)} \qquad \text{(VIII-16)}$$

Combinant (VIII-15 et VIII-16) on obtient

$$\frac{B(z_o)}{B(z_t)} \quad = \quad \frac{W_{\perp}(z_o)}{W_{\perp}(z_t)} \qquad \frac{W_{\perp}(z_o)}{W_{\perp}(z_o) + W_{\|}(z_o)}$$

$$\frac{B(z_o)}{B(z_t)} \quad = \quad \frac{v_{\perp}^2(z_o)}{v_{\perp}^2(z_o) + v_{\|}^2(z_o)} \qquad \text{(VIII-17)}$$

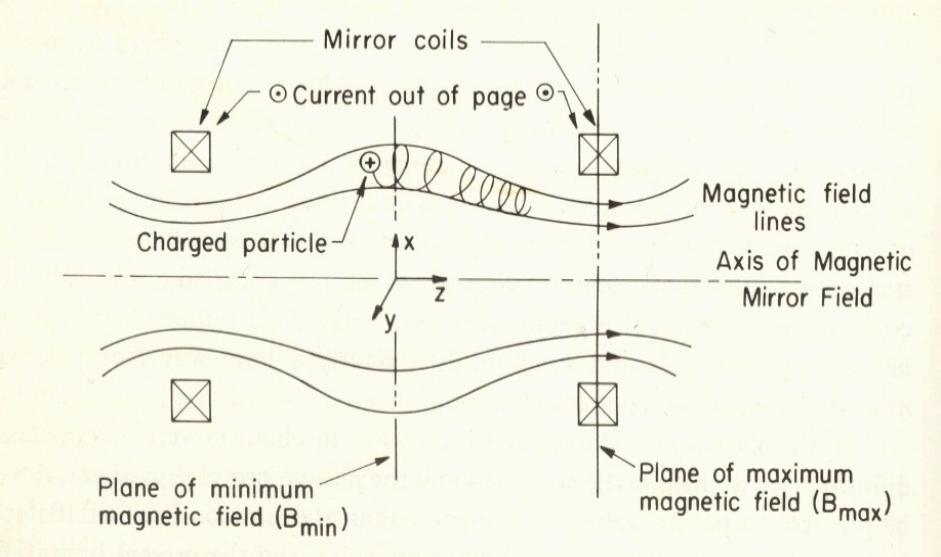

FIG. III-1

Ligne de champ dans une machine miroir
(Tiré de "Principle of Plasma Physics " de Krall et Trivelpiece)

Dénotant θ_o l'angle en $\underline{v}$ et $\underline{B}(z_o)$, on a

$$\frac{B(z_o)}{B(z_t)} = \sin^2\theta_o \qquad \text{(VIII-18)}$$

L'équation (VIII-19) montre alors que toutes les particules issues de z_o et possédant le même θ_o seront réfléchies en z_t et ceci quelle que soit leur vitesse. Soit B_{max} le champ maximum, le rapport

$$\frac{\mathbf{B(z_o)}}{\mathbf{B_{max}}}$$ **est appelé rapport miroir**.

Le confinement par une machine miroir n'est pas parfait. En effet, seules les

particules pour lesquelles

$$\sin^2\theta \geq \frac{B(z_o)}{B_{max}} \qquad \text{(VIII-19)}$$

seront confinées. Les particules avec $\theta < \theta_c$ sortent de la machine. Rappelons $\sin\theta = v_\perp/v$: la condition (VIII-19) définit alors un cône dans l'espace des vitesses. Toute particule rentrant dans ce cône (appelé *cône de perte*) ne sera pas confiné. Cette perte fait que les fonctions de distribution dans l'espace de vitesse des particules n'est jamais isotrope. Notons également que ni la charge, ni la masse n'interviennent dans la définition du cône de perte: les ions et les électrons ont le même comportement en absence de collision.

A part l'application dans les machines miroirs, la réflexion des particules par un champ magnétique miroir est également la cause de l'existence de la *ceinture de Van Allen*. Les particules de la ceinture de Van Allen sont confinées par le champ magnétique terrestre. Ce dernier est plus intense aux pôles qu'à l'équateur formant ainsi un miroir naturel.

Calculons maintenant la force perpendiculaire due à une variation perpendiculaire du champ $\underline{B}_o = (0,0,B_o)$

$$\langle \underline{F}_\perp \rangle = \left\langle q\underline{v}_o \times R \frac{\partial_o}{\partial r} B_{oz}\, \underline{e}_z \right\rangle \qquad \text{(VIII-20)}$$

On voit (Fig. III-2) que $\underline{v}_o \times \underline{e}_z = -(\underline{R}/R)v_o$. On a donc

$$\langle \underline{F}_\perp \rangle = -\left\langle \underline{R} \frac{\partial_o B_{oz}}{\partial r} \right\rangle q\, v_o \qquad \text{(VIII-21)}$$

Pour évaluer $\langle \underline{F}_\perp \rangle$, utilisons les coordonnées cartésiennes :

$$\underline{R} = R\cos\phi\, \underline{e}_x + R\sin\phi\, \underline{e}_y \qquad \text{(VIII-22)}$$

$$x = r\cos\phi,\ y = r\sin\phi \qquad \text{(VIII-23)}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{dx}{dr}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dr}\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos\phi\frac{\partial}{\partial x} + \sin\phi\frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{(VIII-24)}$$

$$\langle \underline{F}_\perp \rangle =$$

$$-q\,v_o \left\langle (R\cos\phi\,\underline{e}_x + R\sin\phi\,\underline{e}_y)\left(\cos\phi\frac{\partial}{\partial x}B_{oz} + \sin\phi\frac{\partial}{\partial y}B_{oz}\right)\right\rangle$$

$$= -q v_o R\left\{\underline{e}_x\left[\left\langle\cos^2\phi\frac{\partial}{\partial x}B_{oz}\right\rangle + \left\langle\sin\phi\cos\phi\frac{\partial}{\partial y}B_{oz}\right\rangle\right]\right\}$$

$$+\underline{e}_y\left[\left\langle\sin^2\phi\frac{\partial}{\partial y}B_{oz}\right\rangle + \left\langle\sin\phi\cos\phi\frac{\partial}{\partial x}B_{oz}\right\rangle\right]$$

(VIII-25)

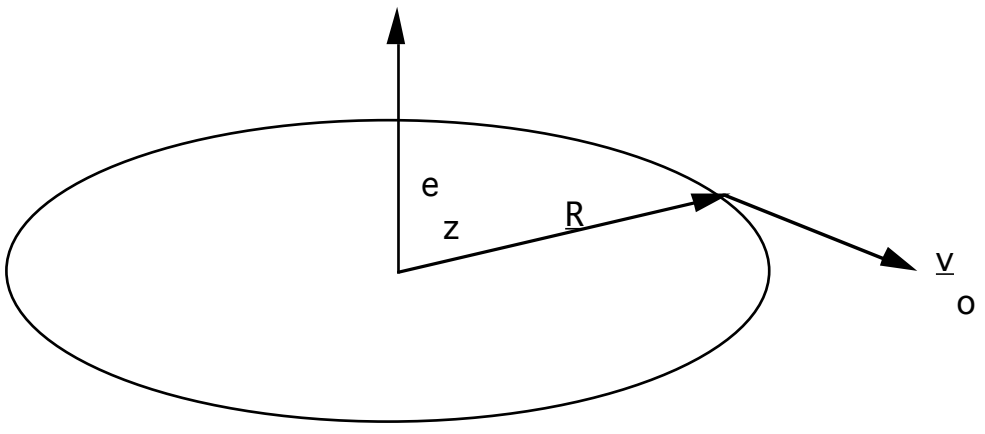

FIG. III-2

On peut choisir le système de coordonnées de telle façon que $\frac{\partial B_{oz}}{\partial y}$ est nul. De plus, on considère que $\frac{\partial}{\partial x}$ B_{oz} est constant sur une orbite ce qui permet d'écrire

$$\langle \underline{F}_\perp \rangle = -q\, v_o R \underline{e}_x \left\{ \left[\langle \cos^2\phi \rangle B_{oz} \right] + \langle \sin\phi \cos\phi \rangle \frac{\partial}{\partial x} B_o x \right\}$$

$$= -\frac{1}{2} \quad q\, v_o R \quad \frac{\partial}{\partial x} \quad B_{oz}\, \underline{e}_x \qquad \text{(VIII-26)}$$

$$= -\mu_m \frac{\partial}{\partial x} \quad B_{oz}\, \underline{e}_x \qquad \text{(VIII-27)}$$

$$\langle \underline{F}_\perp \rangle = -\frac{\mu_m}{2} \frac{1}{B_o} \frac{\partial B_o^2}{\partial x} \qquad \text{(VIII-28)}$$

(B_{oz} est la composante dominante dans l'expression de B_o)

Comme nous avons choisi arbitrairement la coordonnée x, nous pouvons écrire (VIII-28) avec l'ordre de l'opérateur $\underline{\nabla}_\perp$

$$\langle \underline{F}_\perp \rangle = -\mu_m \frac{1}{2B_o} \quad \underline{\nabla}_\perp B_o^2 \qquad \text{(VIII-29)}$$

Cette force perpendiculaire $\langle \underline{F}_\perp \rangle$ va donc donner lieu à une vitesse de dérive

$$\underline{v}_D = \frac{\mu_m}{2B_o^3 q}\left(\underline{B}_o \times \underline{\nabla}_\perp B_o^2\right) \qquad \text{(VIII-30)}$$

La vitesse de dérive due à un gradient perpendiculaire du champ magnétique dépend de la charge de la particule: les ions et les électrons dérivent dans des directions opposées.

IX) MOUVEMENT D'UNE PARTICULE DANS UN CHAMP MAGNETIQUE PRESENTANT UN RAYON DE COURBURE R

Soit un champ magnétique dont les lignes de champ ont un rayon de courbure R constant. Deux effets vont se superposer: le premier est celui de la force centrifuge ressentie par le centre de guidage d'une particule lors de son mouvement le long de la ligne de champ. Le deuxième effet provient de la variation du champ B dans la direction radiale.

Soit $v_\parallel$ la vitesse parallèle. La force centrifuge est alors

$$\underline{F}_c = \frac{mv_\parallel^2}{R}\,\underline{e}_r = \frac{mv_\parallel^2}{R^2}\underline{R} \qquad \text{(IX-1)}$$

où $\underline{e}_r$ est le vecteur unité selon la direction radiale. $\underline{F}_c$ perpendiculaire aux lignes de champ va induire une dérive

$$\underline{v}_{D1} = \frac{1}{q}\,\frac{\underline{F}_c \times \underline{B}_o}{B_o^2} = \frac{mv_\parallel^2}{q}\,\frac{\underline{R} \times \underline{B}_o}{R^2 B_o^2} \qquad \text{(IX-2)}$$

$\underline{v}_{D1}$ dépend donc de la charge q et est perpendiculaire à $\underline{B}_o$ et $\underline{F}_c$. Examinons maintenant l'effet de la variation radiale de $\underline{B}$. Le champ B décroît comme 1/R. La dérive perpendiculaire est alors

$$\underline{v}_{D2} = - \frac{\mu m}{B_o^2 q}\left(\underline{\nabla}_\perp B_o \times \underline{B}_o\right) \qquad \text{(IX-3)}$$

$$\underline{v}_{D2} = \frac{m v_\perp^2}{2 B_o^3 q} \frac{B_o}{R^2} \left(\underline{R} \times \underline{B}_o\right) \qquad \text{(IX-4)}$$

$$\underline{v}_{D2} = \frac{m v_\perp^2}{2 B_o^2 q} \frac{\underline{R} \times \underline{B}_o}{R^2} \qquad \text{(IX-5)}$$

Pour obtenir (IX-4), nous avons utilisé

$$\underline{\nabla}_\perp B = - \frac{B_o}{R^2} \underline{R} \qquad \text{(IX-6)}$$

La dérive totale est donc

$$\underline{V}_D = \underline{v}_{D1} + \underline{v}_{D2} = \frac{m}{q} \frac{1}{R^2 B_0^2}\left(\underline{R} \times \underline{B}_o\right)\left[v_\parallel^2 + \frac{1}{2} v_\perp^2\right] \qquad \text{(IX-7)}$$

Les deux dérives s'additionnent et dépendent de la charge. Ce résultat est important car il montre qu'on ne peut utiliser un champ purement torique pour confiner le plasma.

Considérons, en effet, un champ purement toroïdale (Fig. IX-2). Les ions et les électrons, à cause de la courbure du champ, vont dériver dans les directions opposées. Un champ électrique $\underline{E}$ va donc être induit. Ce champ $\underline{E}$, à son tour, va induire une dérive radiale $(\underline{E} \times \underline{B})/B^2$ indépendante de la charge qui amènera à une perte du plasma sur la paroi.

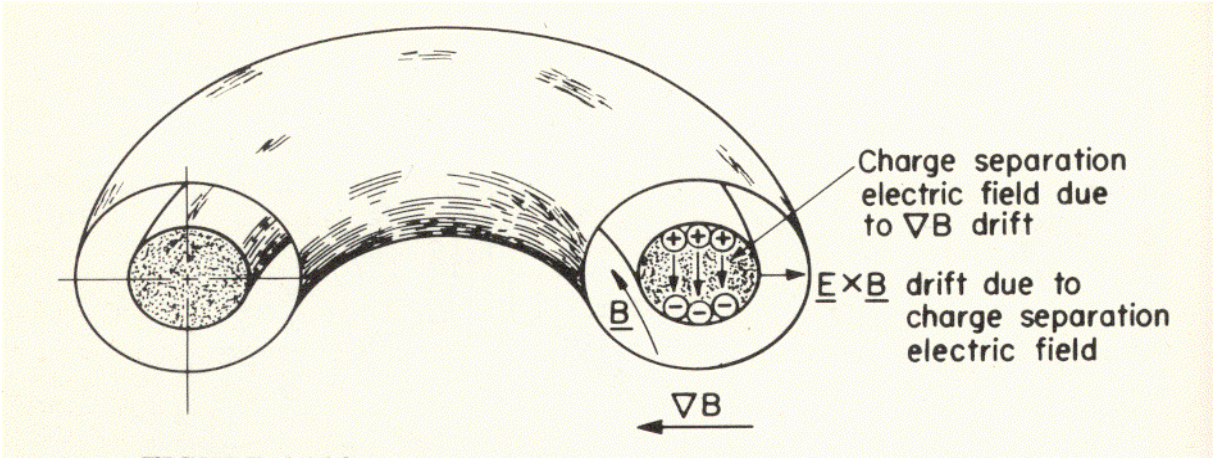

FIG. IX-2

Structure magnétique purement toroïdale montrant les différentes dérives (Tiré de "Principles of Plasma Physics" de Krall et Trivelpiece)