"On ne devrait cultiver les mathématiques qu'en vue du reste"
Aristote , Métaphysique.

RAPPEL DE MATHEMATIQUES

I) FORMULES D'ANALYSE VECTORIELLE

Les notations suivantes seront utilisées dans tout le cours :

- Vecteur A $= \underline{A}$
- Gradient d'une fonction f $= \underline{\nabla} f$
- Divergence d'un vecteur $\underline{A}$ $= \underline{\nabla} \bullet \underline{A}$
- Rotationnel d'un vecteur $\underline{A}$ $= \underline{\nabla} \times \underline{A}$
- Laplacien $= \nabla^2$

Les formules suivantes donnent l'expression des différents opérateurs dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques.

Coordonnées cylindriques (r,Φ,z) (Fig. I.1)

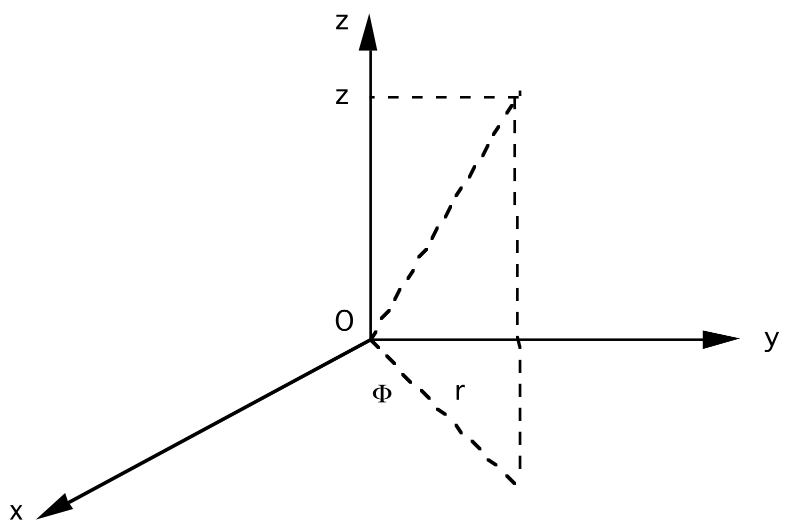


Fig. I. 1. Coordonnées cylindriques

$$\underline{\nabla} f = \underline{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \underline{e}_\Phi \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \Phi} + \underline{e}_z \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\underline{\nabla} \bullet \underline{a} \quad = \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r a_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\Phi}{\partial \Phi} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{a} \quad = \quad \underline{e}_r \left[\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \Phi} - \frac{\partial a_\Phi}{\partial z}\right]$$

$$+ \underline{e}_\Phi \left[\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right]$$

$$+ \underline{e}_z \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r\, a_\Phi) - \frac{\partial a_r}{\partial \Phi}\right]$$

$$\nabla^2 f \quad = \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Coordonnées sphériques (r,Θ,Φ) (Fig. I.2)

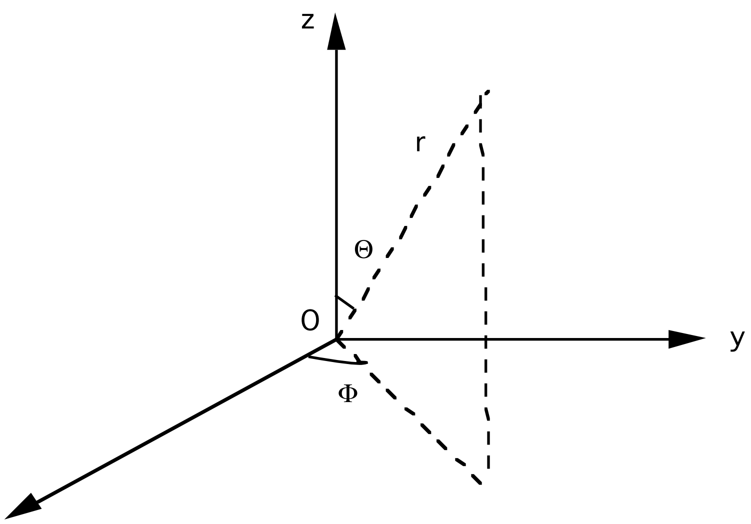


Fig. I.2. Coordonnées sphériques

$$\underline{\nabla} f \quad = \quad \underline{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \underline{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \underline{e}_\Phi \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \Phi}$$

$$\underline{\nabla} \bullet \underline{a} \quad = \quad \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, a_\theta) + \frac{\partial a_\Phi}{\partial \Phi}$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{a} = \underline{e}_r \frac{1}{r \sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (\sin\theta \, a_\Phi) - \frac{\partial a_\theta}{\partial\Phi} \right]$$

$$+ \underline{e}_\theta \left[\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial a_r}{\partial\Phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \, a_\Phi) \right]$$

$$+ \underline{e}_\Phi \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \, a_\theta) - \frac{\partial a_r}{\partial\theta} \right]$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2 f}{\partial\Phi}$$

Les expressions pour d'autres systèmes de coordonnées peuvent être trouvées par exemple dans le livre "Mathematical Methods in Physics" de Morse et Feshbach.

On a les identités suivantes:

$$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = (\underline{a} \bullet \underline{c}) \, \underline{b} - (\underline{a} \bullet \underline{b}) \, \underline{c}$$

$$\underline{\nabla}(\underline{a} \bullet \underline{b}) = (\underline{a} \bullet \underline{\nabla}) \, \underline{b} + (\underline{b} \bullet \underline{\nabla}) \, \underline{a} + \underline{a} \times (\underline{\nabla} \times \underline{b}) + \underline{b} \times (\underline{\nabla} \times \underline{a})$$

$$\underline{\nabla} \bullet (f\underline{a}) = (\underline{\nabla} f) \bullet \underline{a} + f \, \underline{\nabla} \bullet \underline{a}$$

$$\underline{\nabla} \bullet (\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{b} \bullet (\underline{\nabla} \times \underline{a}) - \underline{a} \bullet (\underline{\nabla} \times \underline{b})$$

$$\underline{\nabla} \times (f\underline{a}) = \underline{\nabla} f \times \underline{a} + f(\underline{\nabla} \times \underline{a})$$

$$\underline{\nabla} \times (\underline{a} \times \underline{b}) = \underline{a}(\underline{\nabla} \bullet \underline{b}) - \underline{b}(\underline{\nabla} \bullet \underline{a}) + (\underline{b} \bullet \underline{\nabla}) \, \underline{a} - (\underline{a} \bullet \underline{\nabla}) \, \underline{b}$$

$$\underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{a}) = \underline{\nabla} \, (\underline{\nabla} \bullet \underline{a}) - \underline{\nabla}^2 \, \underline{a}$$

On a également les relations intégrales suivantes:

$$\int_V \underline{\nabla} f \, d^3 r = \int_S f \, \underline{n} \, d^2 r$$

$$\int_V \underline{\nabla} \bullet \underline{a} \, d^3 r = \int_S \underline{a} \bullet \underline{n} \, d^2 r$$

$$\int_V (\underline{\nabla} \times \underline{a}) \, d^3 r = \int_S (\underline{n} \times \underline{a}) \, d^2 r$$

où V est un volume entouré par la surface S. $\underline{n}$ est le vecteur unitaire normal à S et dirigé vers l'extérieur de S.

$$\int_S (\underline{n} \times \underline{\nabla} f) \, d^2 r = \int_C f \, d\underline{l}$$

$$\int_S (\underline{\nabla} \times \underline{a}) \bullet d^2r \quad = \quad \int_C \underline{a} \bullet d\underline{l}$$

S est une surface enclose par le contour C.

II) NOTATIONS COMPLEXES

On est souvent amené à faire appel à des ondes planes du type $f(\underline{r},t) = A \cos(\underline{k} \bullet \underline{r} - \omega t)$.
Il est alors plus simple d'utiliser la notation complexe

$$f(\underline{r},t) \quad = \quad A \exp\{i(\underline{k} \bullet \underline{r} - \omega t)\} \qquad \text{(II-1)}$$

Bien entendu la fonction f qui représente une quantité physique doit être réelle. Donc, selon l'expression (II-1),

$$f(\underline{r},t) \quad = \quad \mathrm{Re}\left[A \exp\{i(\underline{k} \bullet \underline{r} - \omega t)\}\right]$$

où Re[z] est la partie réelle du nombre complexe z.

Tant que l'on travaille avec des expressions linéaires, l'utilisation de la notation complexe ne pose aucun problème. Lorsque l'on doit calculer des produits, il faut faire attention. Dans le doute, il vaut mieux retourner à la notation réelle. Ainsi calculons le produit $h(t) = A \cos \omega t \times B \cos(\omega t + \phi) = f(t) \times g(t)$.

$$h(t) \quad = \quad \frac{AB}{4}\left[\exp\{i\,\omega t\} + \exp\{-i\omega t\}\right] \bullet$$

$$\left[\exp\{i(\omega t + \phi)\} + \exp\{-i(\omega t + \phi)\}\right]$$

$$h(t) \quad = \quad \frac{AB}{4}$$

$$\left[\exp\{i(2\omega t+\phi)\} + \exp\{-i(2\omega t+\phi)\} + \exp\{i\phi\} + \exp\{-i\phi\}\right]$$

Si on est intéressé par la valeur moyenne de h(t) sur une période $2\pi / \omega$:

$$\bar{h}(t) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} dt\, h(t)$$

on trouve

$$\bar{h} = \frac{AB}{2} \cos\phi$$

Avec la notation complexe pour f et g on a

$$\bar{h} = \frac{f \bullet g^*}{2} \tag{II-2}$$

où g^* est le complexe conjugué de g.

La valeur moyenne $\bar{h}$ représente souvent des quantités physiques comme la puissance moyenne $\bar{P}$ dans un courant alternatif, la valeur moyenne du vecteur de Poynting d'une onde électromagnétique:

$$\bar{P} = \frac{U \bullet I^*}{2}$$

$$\underline{\bar{S}} = \frac{\underline{\bar{E}} \infty \underline{\bar{B}}^*}{2\mu_o}$$

III) <u>TRANSFORMEE DE FOURIER</u>

III.1 <u>Définition</u>

Soit une fonction $f(\underline{r},t)$ des variables spatiales et du temps t. La transformée de Fourier (TF) de f dans l'espace $\underline{k}$ et ω est

$$\tilde{f}(\underline{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3r \, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp\{i(\omega t - \underline{k} \bullet \underline{r})\} \, f(\underline{r}, \underline{t}) \tag{III-1}$$

$$f(\underline{t},r) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp\{-i(\omega t - \underline{k}\ \underline{r})\}\ \tilde{f}\ (\underline{k},\omega) \qquad \text{(III-2)}$$

Notons que nous avons défini, contrairement (peut-être) à la convention générale, $\exp\{\pm i(\omega t - \underline{k} \bullet \underline{r})\}$ et non $\exp\{\pm i(\omega t + \underline{k} \bullet \underline{r})\}$ dans (III-1) et (III-2). Cette définition doit être reliée à l'interprétation de la TF. Selon la formule (III-2), la fonction f de $\underline{r}$ et de t est exprimée comme une superposition d'ondes planes $\exp\{-i(\omega t - \underline{k} \bullet \underline{r})\}$ ayant chacune l'amplitude $\tilde{f}\ (\underline{k},\omega)$. Le choix de $\exp\{-i(\omega t - \underline{k} \bullet \underline{r})\}$ définit des ondes qui se propagent dans la direction $+\underline{k}$.

La TF d'un champ vectoriel $\underline{A}(\underline{r},t)$ est obtenue simplement comme les TF des composantes de $\underline{A}$.

III.2 Condition de Réalité

Une fonction f ou un champ vectoriel $\underline{A}$ qui représentent une quantité physique sont bien entendu des quantités réelles. Leur TF (Eq. III-1) est une quantité complexe. Pour que f soit réel (Eq. III-2) on doit avoir:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^*.$$

On a donc:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp\{-i(\omega t - kr)\} f(k,\omega)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ \exp\{i(\omega t - \underline{k} \bullet \underline{r})\}\ \tilde{f}^*(\underline{k},\omega)$$

donc

$$\tilde{\mathbf{f}}^*(-\underline{\mathbf{k}},-\omega) = \tilde{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{k}},\omega) \qquad \text{(III-3)}$$

La relation (III-3) est dite "condition de réalité". Elle assure que $f(\underline{r},t)$ est une quantité réelle, alors que sa TF $\tilde{f}(\underline{k},\omega)$ est une fonction complexe.

III.3) Propriétés des TF

Soit $f(\underline{r},t)$ une fonction et $\tilde{f}(\underline{k},\omega)$ sa TF.

Fonction	Transformée de Fourier
$f(\underline{r},t)$	$\tilde{f}(\underline{k},\omega)$
$\dfrac{\partial f}{\partial t}$	$-\, i\omega\ \tilde{f}(\underline{k},\omega)$
$\underline{\nabla} f$	$i\underline{k}\ \tilde{f}(\underline{k},\omega)$
$\nabla^2 f$	$-\, k^2 \tilde{f}(\underline{k},\omega)$

Si $\underline{A}$ est un champ vectoriel et $\underline{\tilde{A}}\ (\underline{k},\omega)$ sa TF alors

Vecteur	Transformée de Fourier
$\underline{A}(\underline{r},t)$	$\underline{\tilde{A}}(\underline{k},\omega)$
$\dfrac{\partial \underline{\underline{A}}}{\partial t}$	$-\, i\omega\ \underline{\tilde{A}}(\underline{k},\omega)$
$\underline{\nabla} \bullet \underline{A}$	$+\, i\underline{k} \bullet \underline{\tilde{A}}(\underline{k},\omega)$
$\underline{\nabla} \times \underline{A}$	$+\, i\underline{k} \times \underline{\tilde{A}}(\underline{k},\omega)$
$\underline{\nabla}^2\ \underline{A}$	$-k^2\ \underline{\tilde{A}}(\underline{k},\omega)$

Avec les définitions (1) et (2), on a la correspondance simple

$$\frac{\partial}{\partial t} \quad \rightarrow \quad -\, i\omega$$

$$\underline{\nabla} \quad \rightarrow \quad +\, i\underline{k}$$

La fonction $f(t) = \exp\{i\omega_o t\}$ admet comme TF;

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \{i(\omega + \omega_o)t\}$$

$$\tilde{f}(\omega) = \delta(\omega + \omega_o)$$

$\delta(\omega)$ est la distribution de Dirac.

La TF étant linéaire, la TF d'une combinaison linéaire de fonction est la combinaison linéaire des TF de ces fonctions. Par contre, **la TF d'un produit h(t) = f(t).g(t) est le produit de convolution des TF**:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega'' \{-i(\omega' + \omega'')t\} \tilde{f}(\omega) \; \tilde{g}(\omega'')$$

$$\tilde{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \, d\omega'' \exp\{+ i[\omega - (\omega' + \omega'')]t\} \tilde{f}(\omega') \; \tilde{g}(\omega'')$$

$$= \int d\omega' \, d\omega'' \, \delta[\omega - (\omega' + \omega'')] \; \tilde{f}(\omega') \; \tilde{g}(\omega'')$$

$$\tilde{h}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \; \tilde{f}(\omega') \; \tilde{g}(\omega' - \omega)$$

La formule de Parseval s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3r \, f^*(\underline{r}) \, g(\underline{r}) = (2\pi)^3 \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \tilde{f}^*(\underline{k}) \; \tilde{g}(\underline{k})$$

IV) <u>TRANFORMEE DE LAPLACE</u>

La transformée de Laplace est importante lorsque vous étudierez la théorie cinétique des plasmas.

Soit f(t) une fonction dépendante du temps

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ f(t) & t \geq 0 \end{cases} \qquad \text{(IV-1)}$$

f(t) satisfait la condition de causalité: au temps t négatif il n'y a pas de signal.

La transformée de Laplace (T.L.) $\mathcal{F}(\omega)$ est

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{o}^{\infty} dt \exp(i\,\omega\, t)\, f(t) \qquad \text{(IV-2)}$$

où ω est complexe

$$\omega = \omega_r + i\omega_i \qquad \text{(IV-3)}$$

La partie imaginaire ω_i est positive et est choisie telle l'intégrale converge si :

$$f(t) \rightarrow e^{\alpha t} \text{ lorsque } t \rightarrow \infty \text{ avec } \alpha > 0.$$

On a donc:

$$\boldsymbol{\omega_i > \alpha}.$$

En se reférant à la TF on remarque que

- f(t) est définie par hypothèse comme nulle pour t < 0. **Les cas que l'on traite avec la transformée de Laplace correspondent à un problème causal**. Le phénomène n'a pas lieu à t < 0. En t = 0, on l'enclanche et on suit son évolution.

- la fréquence ω a une partie imaginaire positive. Cette remarque est très importante lorsque l'on rencontre, au cours des calculs, des singularités pour ω réel.

La transformée de Laplace inverse est définie comme

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\beta}^{\infty+i\beta} d\omega\, \mathcal{F}(\omega) \exp(-i\omega t) \qquad \text{(IV-4)}$$

β est choisi supérieur à α. Le parcours d'intégration passe donc au dessus de tous les pôles de $\mathcal{F}(\omega)$.

Pour $t < 0$, on évalue (IV-4) en fermant le contour par un demi-cercle de rayon ∞ dans le demi-plan supérieur du plan complexe ω. Comme par définition, tous les pôles sont dans le demi-plan inférieur, $f(t < 0)$ est nul. On retrouve notre résultat de départ.

Pour $t > 0$, le contour est montré sur la Fig. IV.1. On a:

$$f(t) = \sum_{\omega_j} \text{Residus}\left[\mathcal{F}(\omega)\exp(-i\omega t)\right] \quad t > 0 \tag{IV-5}$$

où ω_j sont les pôles de $\mathcal{F}(\omega)$. Les pôles ω_j avec une partie imaginaire positive correspondent à des variations exponentiellement croissantes. On les appelle "instabilités". Lorsque la partie imaginaire de ω_j est négative, la solution correspondante est exponentiellement décroissante.

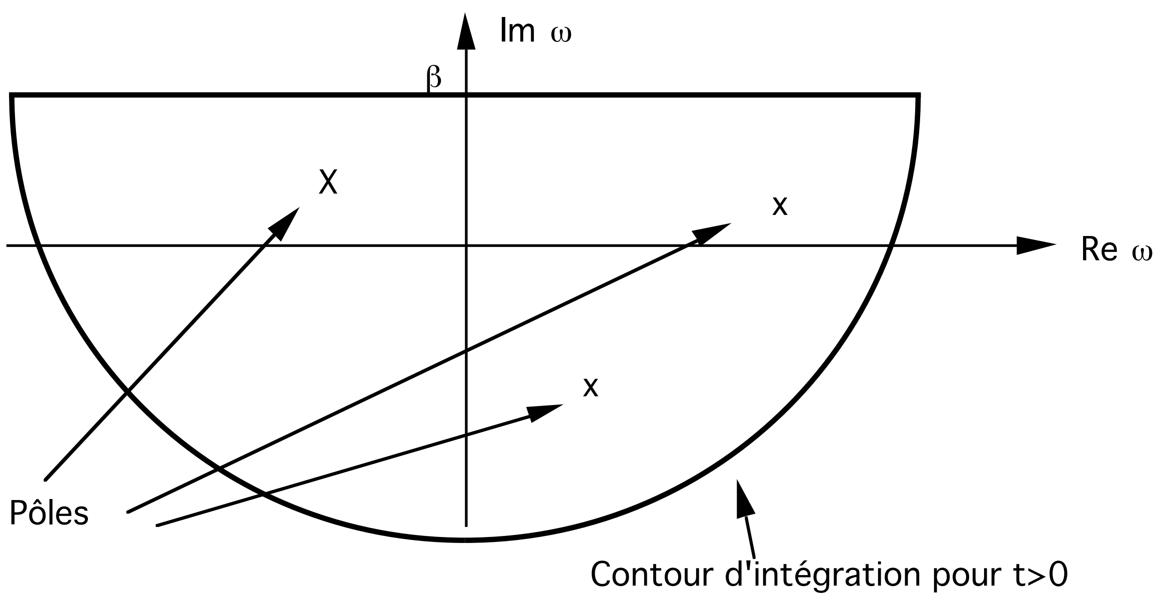


Fig. IV-1. Contour d'intégration dans le plan complexe ω lors de l'inversion de la transformée de Laplace

Finalement, notons que la TL de la dérivée $g(t)$ d'une fonction $f(t)$ est :

$$\mathcal{G}(\omega) = -f(t=0) - i\omega\mathcal{F}(\omega) \tag{IV-6}$$

Dans l'expression de la TL d'une dérivée apparait la valeur de la fonction au temps t initial.

V) FONCTION DE BESSEL

Soit l'équation différentielle suivante:

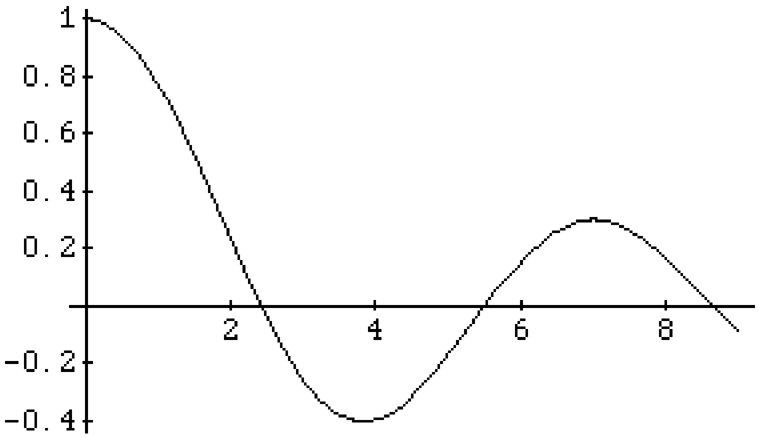
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\; r\frac{df}{dr} + \left[k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right] f = 0 \qquad \text{(V.1)}$$

On suppose k^2 positif et n entier. Cette hypothèse n'est toutefois pas nécessaire pour la théorie générale des fonctions de Bessel.

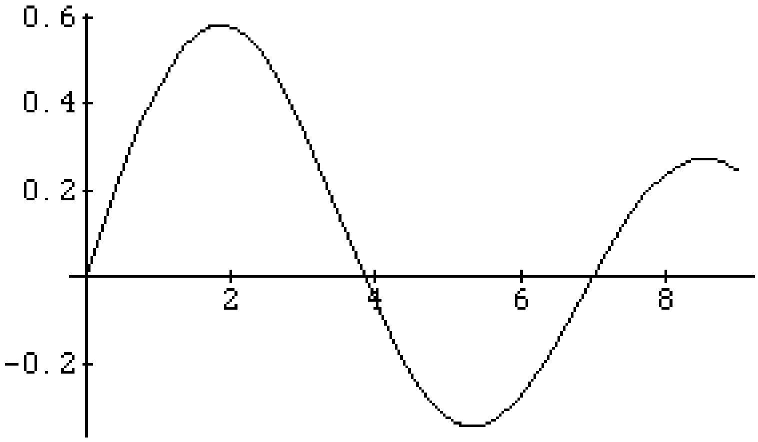
L'équation V.1 est appelée équation de Bessel. On retrouve toujours l'équation de Bessel lorsqu'on traite des phénomènes décrits par un Laplacien en coordonnées cylindriques. En effet, par application de la méthode de la séparation des variables, l'équation selon la coordonnées radiale est l'équation de Bessel, les constantes k^2 et n^2 provenant de la physique et de la séparation des variables.

L'équation de Bessel (V.1) admet deux solutions indépendantes appelées fonction de Bessel de la première et de la seconde espèce, respectivement $J_n(kr)$ et $Y_n(kr)$. La fonction $Y_n(kr)$ est aussi appelée fonction de Neumann et est également dénotée $N_n(kr)$. L'indice n est l'ordre de la fonction de Bessel. Il existe de nombreuses propriétés importantes des fonctions de Bessel. Contentons-nous de rappeler ici quelques-unes d'utilité courante pour un physicien moyen!

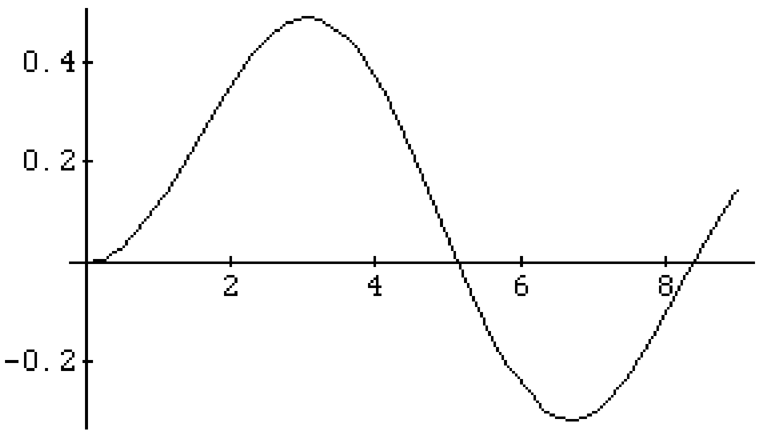
Tout d'abord comme le montre les figures V.1 et V.2, la fonction $J_n(kr)$ est bornée à l'origine r=0, alors que $Y_n(kr)$ ne l'est pas. Cette remarque est importante lorsque nous devons chercher une solution valable dans un domaine qui comprend l'origine r=0: on ne peut dans ce cas garder la solution $Y_n(kr)$.



a) Variation de $J_0(x)$

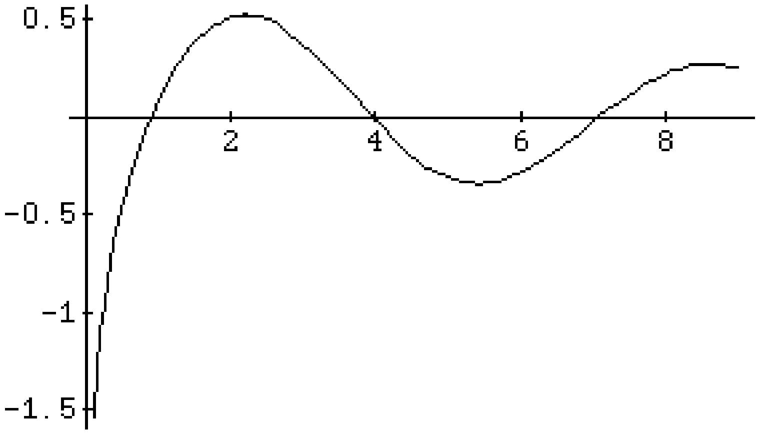


b) Variation de $J_1(x)$

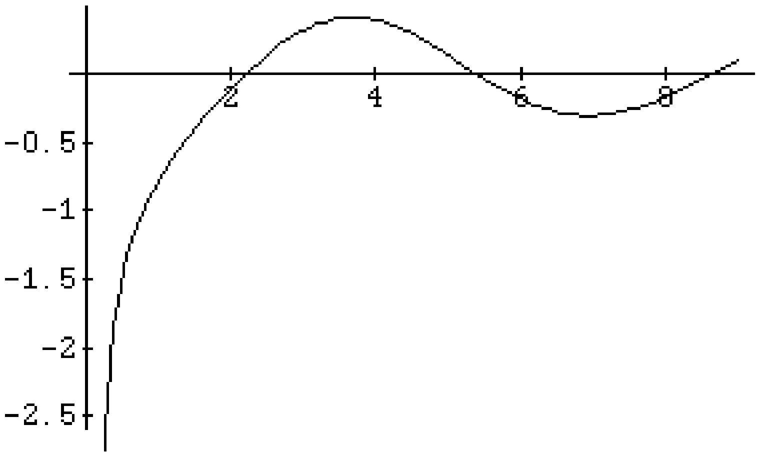


c) Variation de $J_2(x)$

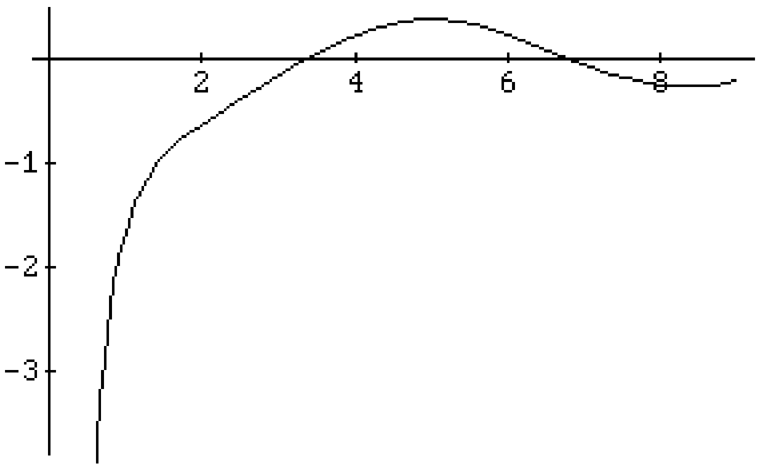
Fig. V.1. Variation de quelques fonctions de Bessel $J_n(x)$



a) Variation de $Y_0(x)$



b) Variation de $Y_1(x)$



c) Variation de $Y_2(x)$

Fig. V.2. Variation de quelques fonctions $Y_n(x)$

Les développements en série de $J_n(kr)$ et $Y_n(kr)$ sont:

$$kr \ll 1 \quad J_n(kr) \rightarrow \frac{1}{n!}\left[\frac{kr}{2}\right]^n$$

$$Y_0(kr) \rightarrow \frac{2}{\pi}\left[\ln\left[\frac{x}{2}\right] + \gamma\right]$$

$$Y_n(kr) \rightarrow -\frac{(n-1)!}{\pi}\left[\frac{2}{kr}\right]^n \qquad n \neq 0$$

$\gamma = 0.5772$ est la constante d'Euler.

Pour de grande valeur de r ($r \rightarrow \infty$), on a les développements suivants:

$$J_n(kr) = \left[\frac{2}{\pi kr}\right]^{1/2} \cos\left[kr - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right]$$

$$Y_n(kr) = \left[\frac{2}{\pi kr}\right]^{1/2} \sin\left[kr - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right]$$

Pour des grand arguments les fonctions de Bessel $J_n(kr)$ et $Y_n(kr)$ tendent vers des fonctions sinusoïdales.

Les fonctions $J_n(kr)$ et $Y_n(kr)$ admettent une infinité de racines. Dans la pratique nous sommes surtout intéressés par les racines x_{nm} de $J_n(x)$:

n=0, x_{0m} = 2.405, 5.520, 8.654,...
n=1, x_{1m} = 3.832, 7.016, 10.173,...
n=2 x_{2m} = 5.136, 8.417, 11.620,...

Dans certains problèmes, ce sont les racines x'_{nm} de la dérivée $J_n'(x)$ qui sont nécessaires:

n=0 x'_{0m} = 3.832, 7.016, 10.173,...
n=1 x'_{1m} = 1.841, 5.331, 8.536,...
n=2 x'_{2m} = 3.054, 6.706, 9.970,...

On rencontre également la situation où n est négatif. On a alors:

$$J_{-n}(kr) = (-1)^n J_n(kr)$$

On définit les fonctions de Hankel de première et de seconde espèce par:

$$H_n^1(kr) \quad = \quad J_n(kr) + i\, Y_n(kr) \tag{V.2}$$

$$H_n^2(kr) \quad = \quad J_n(kr) - i\, Y_n(kr) \tag{V.3}$$

Pour des grands arguments ($r \rightarrow \infty$), les fonctions de Hankel peuvent être approximées par:

$$H_n^1(kr) \quad = \quad \left[\frac{2}{\pi kr}\right]^{1/2} \exp\left[i\left[kr - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right]\right]$$

$$H_n^2(kr) \quad = \quad \left[\frac{2}{\pi kr}\right]^{1/2} \exp\left[-i\left[kr - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right]\right]$$

Les fonctions de Hankel sont utiles pour décrire des ondes propageantes. En effet si la dépendance temporelle est selon $\exp(i\omega t)$, la perturbation est alors du type $\exp\left[i\omega t \pm i\left[kr - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right]\right]$: ce sont des ondes progressives ou rétrogrades.

Nous avons les formules de récurrence suivantes:

$$xZ_n'(x) = n\, Z_n(x) - x\, Z_{n+1}(x) = -n\, Z_n(x) + x\, Z_{n-1}(x) \tag{V.4}$$

$Z_n(x)$ désigne $J_n(x)$,$Y_n(x)$, $H_n^1(x)$ ou $H_n^2(x)$ et le signe ' la dérivation par rapport à x. Une application immédiate de (V.4) nous permet de calculer la dérivée de $Z_0(x)$:

$$Z_0'(x) \quad = \quad -Z_1(x)$$

Citons finalement deux relations intégrales:

$$\int^x dx'\, x'\, Z_n(kx')\, Z_n(lx') = \frac{x}{k^2 - l^2}\left[\, k\, Z_n(kx) Z_{n+1}(kx) - l\, Z_n(lx)\, Z_{n+1}(lx)\right] \tag{V.5}$$

$$\int^x dx'\, x'\, [Z_n(kx')\,]^2 = \frac{x^2}{2}\left[[Z_n'(x)]^2 + \left[1 - \frac{n^2}{k^2x^2}\right][Z_n(kx)]^2\right] \tag{V.6}$$

Au départ nous avons supposé k^2 positif. Dans beaucoup de cas, le problème physique implique que k^2 est négatif. L'équation de Bessel modifiée est alors:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\, r\frac{df}{dr} - \left[\, k^2 + \frac{n^2}{r^2}\right] f \;=\; 0 \tag{V.7}$$

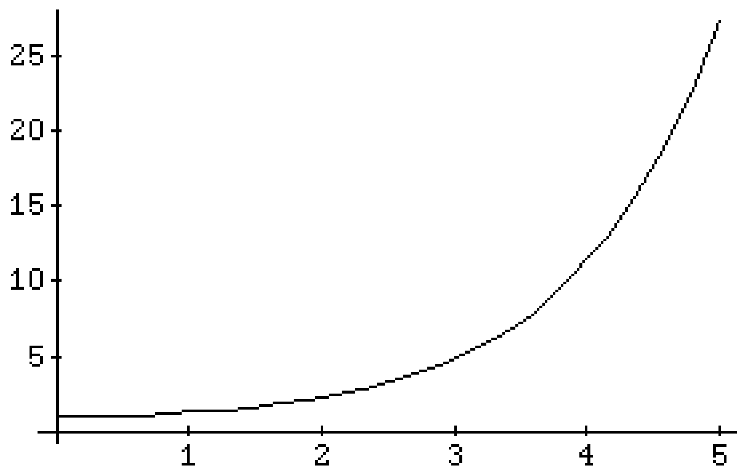
A priori, ce fait n'est pas important car la théorie générale des fonctions de Bessel est faite pour des fonctions d'argument complexe. Toutefois il est commode de définir les fonctions de Bessel modifiées $I_n(hr)$ et $K_n(hr)$ lorsque k^2 est négatif:

$$I_n(hr) = (i)^{-n} J_n(ihr) = (i)^n J_n(-ihr) \tag{V.8}$$

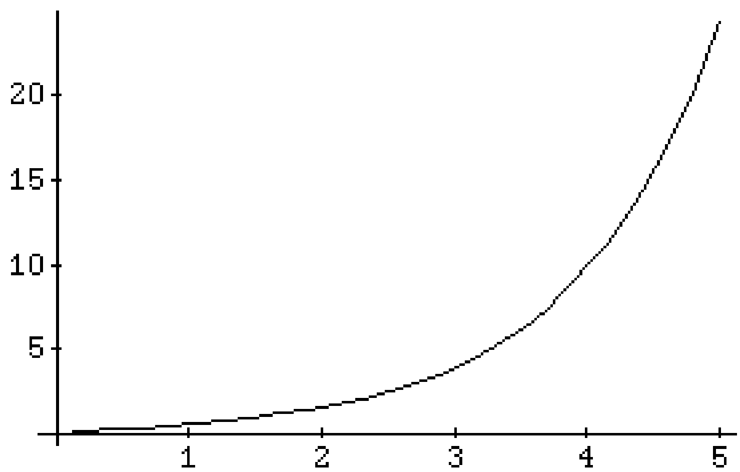
$$K_n(hr) = \frac{\pi}{2} (i)^{n+1} H_n(ihr) \tag{V.9}$$

h est égal à -ik.

Les fonctions $I_n(hr)$ sont bornées en r = 0, et tendent vers l'infini pour r tendant vers l'infini (Fig. V.3). De même, $K_n(hr)$ sont bornées en r tendant vers l'infini et tendent vers l'infini à r = 0 (Fig. V.4).

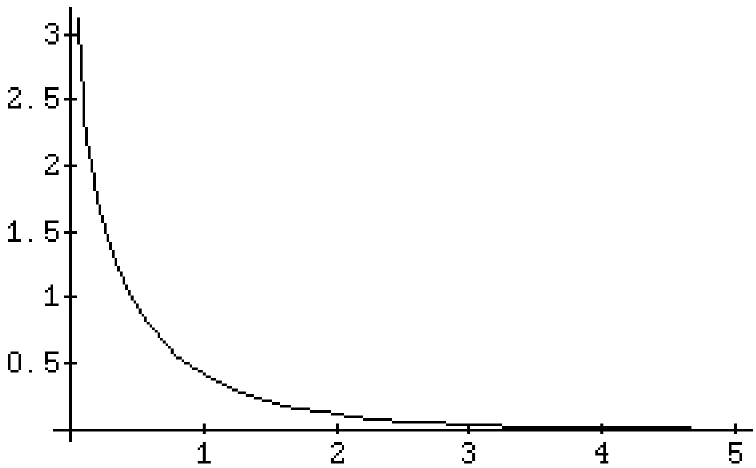


a) Variation de $I_o(x)$

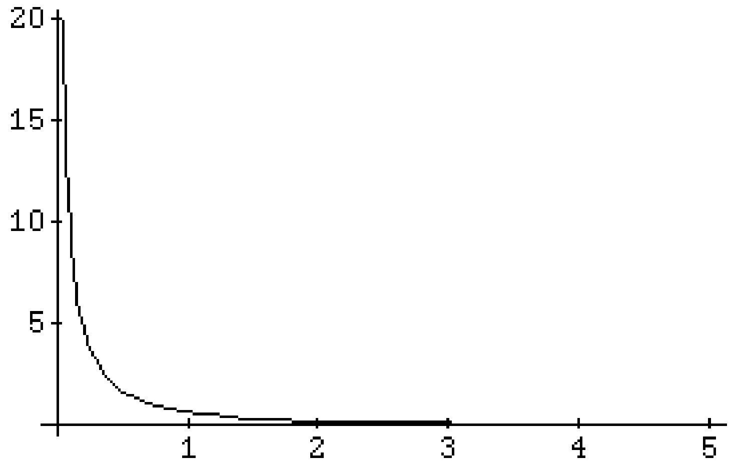


b) Variation de $I_1(x)$

Fig. V.3. Variation de $I_0(x)$ et de $I_1(x)$



a) Variation de $K_0(x)$



b) Variation de $K_1(x)$

Fig. V.4. Variation de $K_0(x)$ et de $K_1(x)$