

Introduction à la Physique des Plasmas I

EPFL — 2005

Cours du 1 juin et du 8 juin 2005

1 Les équations fluides

1.1 Introduction

Considérons un fluide¹ qui se meut à la vitesse \mathbf{u} . Dans ce fluide on considère un volume V qui lui aussi se meut avec \mathbf{u} . Au cours du mouvement \mathbf{u} , les diverses quantités qui caractérisent le fluide changent avec le temps. Ces quantités pour un fluide peuvent être par exemple la densité, la vitesse fluide \mathbf{u} , la pression, etc.

Soit M la masse totale du fluide et \mathbf{P} l'impulsion totale:

$$M = \int \rho dV \quad (1)$$

$$\mathbf{P} = \int \rho \mathbf{u} dV \quad (2)$$

où ρ est la densité (masse/unité de volume). ρ et \mathbf{u} varient dans l'espace et le temps:

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t) \text{ et } \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \quad (3)$$

La conservation de la masse et de l'impulsion s'écrivent:

$$\frac{d}{dt} M = \frac{d}{dt} \int \rho dV = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} = \frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{F} \quad (5)$$

¹Notez que la vitesse \mathbf{u} est la vitesse d'un élément du fluide. Ce n'est pas la vitesse des molécules ou des atomes (ou dans le cas d'un plasma des particules chargées) qui composent le milieu.

où \mathbf{F} est la somme des forces qui s'exerce sur le volume de fluide. Si l'on suppose que le fluide est immergé dans un champ de gravité \mathbf{g} et qu'il y a un terme de pression, la force est donnée par²

$$F_i = - \int p_{ik} d\Sigma_k + \int \rho g_i dV \quad (6)$$

p_{ik} est le tenseur de pression³. L'équation (5) devient alors:

$$\frac{d}{dt} P_i = \frac{d}{dt} \int \rho u_i dV = - \int p_{ik} d\Sigma_k + \int \rho g_i dV \quad (7)$$

Nous allons maintenant transformer les équations (4) et (7) dans une forme différentielle. Les membres de gauche de ces équations sont du type

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(t) dV \quad (8)$$

L'évaluation de la variation temporelle de $\int_{V(t)} f(t) dV$ fait apparaître deux termes

- l'un dû à la variation temporelle de f , soit $\int \frac{\partial}{\partial t} f dV$
- l'autre dû au déplacement de la surface S qui entoure le volume V (voir figure 1): $\int f u_i d\Sigma_i = \int f(\mathbf{u} \cdot d\Sigma)$

Donc

$$\frac{d}{dt} \int f dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} f dV + \int_\Sigma f(\mathbf{u} \cdot d\Sigma)$$

Soit en utilisant le théorème de la divergence pour évaluer l'intégrale de surface:

$$\frac{d}{dt} \int f dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} f dV + \int_V \nabla \cdot (f\mathbf{u}) dV \quad (9)$$

En utilisant l'expression (9) dans l'équation (4), on obtient

$$\frac{d}{dt} \int \rho dV = \int \frac{\partial}{\partial t} \rho dV + \int \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) dV = 0 \quad (10)$$

Le volume V étant arbitraire, l'équation (10) n'est satisfaite que si:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}) = 0 \quad (11)$$

²Nous utilisons la convention de la sommation sur les indices répétés.

³Attention à la notation: le symbole p correspond à la pression et P à la quantité de mouvement

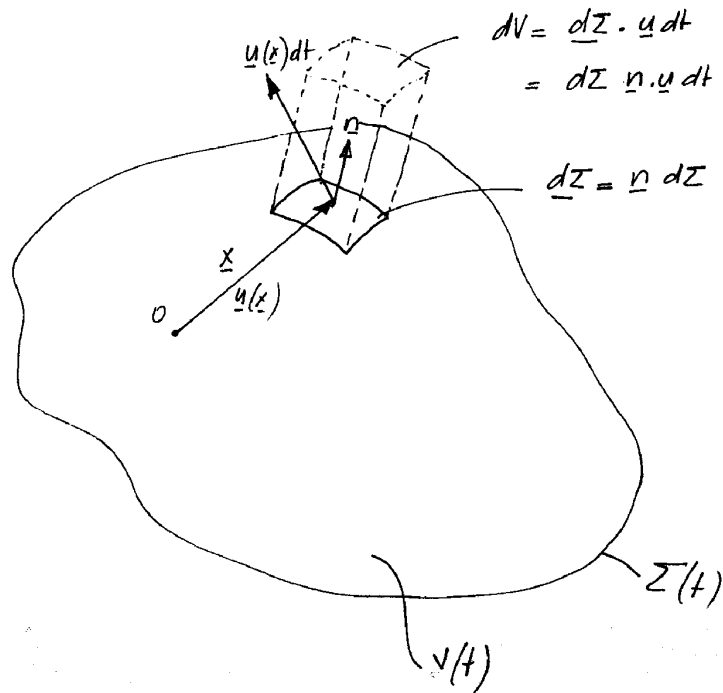


Figure 1: Déplacement de la surface

L'équation (11) est l'équation de continuité.

Transformons maintenant l'équation (7)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int \rho u_i dV &= \int \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) dV + \int \nabla \cdot (\rho u_i \mathbf{u}) dV \\
 &= - \int p_{ik} d\Sigma_k + \int \rho g_i dV \\
 &= - \int \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} dV + \int \rho g_i dV
 \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k) &= - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} p_{ik} + \rho g_i \\
 &= u_i \frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_k \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_i + u_i \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) \\
 &= \rho \frac{\partial}{\partial t} u_i + \sum_k \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_i + u_i \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) \right]
 \end{aligned}$$

$$= \rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_k u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_i \right] = - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} p_{ik} + \rho g_i \quad (12)$$

Notons que le membre de gauche n'est autre que la composante i de l'expression vectorielle

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \right] \mathbf{u}$$

Dans la plupart des cas que nous traiterons, nous pouvons considérer que le tenseur de pression p_{ik} se réduit à un tenseur diagonal $p_{ik} = p \delta_{ik}$ avec $\delta_{ik} = 0$ si $i \neq k$ et $\delta_{ik} = 1$ si $i = k$. L'équation (12) s'écrit alors:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (13)$$

C'est l'**équation de Newton**. Notez qu'à partir de maintenant le symbole p désigne la pression.

Notons que l'opérateur,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right]$$

est la dérivée convective

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (14)$$

L'équation de continuité et l'équation de Newton s'écrivent alors

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (15)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{1}{\rho} [-\nabla p + \rho \mathbf{g}] \quad (16)$$

Pour un fluide, les deux équations de continuité et de Newton ne sont toutefois pas suffisantes pour déterminer l'évolution des perturbations. En effet, il y a plus d'inconnues que d'équations. On a une équation supplémentaire, l'**équation d'état**:

$$\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0 \quad (17)$$

où $\gamma = 1$ indique un processus isotherme, et $\gamma = 5/3$ un processus adiabatique⁴ et ρ est la densité de masse. A la place de l'équation (17), on peut prendre une autre équation comme

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (18)$$

⁴Pour un processus adiabatique, γ vaut $\frac{\text{Nombre de degrés de liberté} + 2}{\text{Nombre de degrés de liberté}}$ où le nombre de degrés de liberté se réfère au nombre de degrés de liberté du phénomène considéré.

qui indique que *le fluide est incompressible*.

Il est important de noter que le choix de l'équation d'état ((17), (18) ou autres!) ne peut être déduit de la théorie fluide. Nous devons utiliser des arguments physiques (comme par exemple dire que le fluide est incompressible) pour pouvoir choisir une équation d'état bien définie. Ce genre de difficulté n'existe pas si nous faisons une théorie cinétique du milieu.

Si l'on désire décrire le plasma comme un fluide, il faut tenir compte du fait que le plasma est constitué de particules chargées: le fluide peut donc être influencé par des champs électriques et magnétiques. L'équation de Newton sans terme de collision est donc modifiée comme suit:

$$nm \frac{d\mathbf{u}}{dt} = nq[\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}] - \nabla p + nmg \quad (19)$$

où n est appelé *densité* (\equiv nombre de particules/unité de volume) et m la *masse d'une particule*.

L'équation de continuité peut aussi s'écrire

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0 \quad (20)$$

Pour un plasma composé d'ions et d'électrons (indice k) nous avons alors:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \nabla \cdot (n_k \mathbf{u}_k) = 0 \quad k = i, e \quad (21)$$

$$n_k m_k \left[\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t} + (\mathbf{u}_k \cdot \nabla) \mathbf{u}_k \right] = -\nabla p_k + n_k q_k (\mathbf{E} + \mathbf{u}_k \wedge \mathbf{B}) + \sum_{k \neq l} \mathbf{R}_{kl}, \quad k = i, e \quad (22)$$

Le terme \mathbf{R}_{kl} tient compte des collisions coulombiennes entre différentes espèces avec:

$$\mathbf{R}_{kl} = n_k m_k \nu_{kl} (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_k) = -\mathbf{R}_{lk}, \quad (23)$$

avec ν_{kl} étant la fréquence de collision entre les espèces k et l . On avait vu que $\nu \sim T^{-3/2}$, avec T étant la température du plasma. Dans l'étude des ondes dans le modèle à deux fluides, que l'on verra dans le chapitre sur les ondes dans un plasma non-magnétisé, on va négliger ce terme ($\mathbf{R}_{kl} = 0$) ce qui équivaut de considérer un plasma non-collisionnel (plasma chaud, T élevée).

Equation d'état :

$$\frac{d(p_k n_k^{-\gamma_k})}{dt} = 0, \quad k = i, e \quad (24)$$

Equations de Maxwell⁵:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (25)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (26)$$

La densité de courant \mathbf{j} est définie par:

$$\mathbf{j} = \sum_k q_k n_k \mathbf{u}_k. \quad (27)$$

Pour un plasma avec $Z = 1$ (par ex. pour un plasma d'hydrogène) on a $\mathbf{j} = e(n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e)$.

La densité de courant $j(\mathbf{x}, t)$ et la densité de charge $\rho_{el}(\mathbf{x}, t)$ sont les termes de sources des équations de Maxwell.

Qu'en est-il des deux autres équations de Maxwell faisant intervenir la divergence? Elles sont obtenues à partir des équations en rotationnel.

$$\nabla \cdot [\nabla \wedge \mathbf{B}] = 0 = \nabla \cdot \left[\mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \quad (28)$$

La divergence de \mathbf{j} est obtenue à partir de l'équation de continuité:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \sum_k \nabla \cdot (n_k q_k \mathbf{u}_k) = -\sum_k \frac{\partial}{\partial t} (n_k q_k) = -\frac{\partial \rho_{el}}{\partial t}$$

avec la définition de la densité de charge ρ_{el} :

$$\rho_{el}(\mathbf{x}, t) = \sum_k n_k(\mathbf{x}, t) q_k$$

En remplaçant dans l'équation (28), on obtient immédiatement:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} = \frac{\partial (\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t}$$

Avec un choix de la constante d'intégration à 0 nous retrouvons l'équation de Poisson:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0} \quad (29)$$

⁵Nous serons amenés à utiliser l'équation de Poisson dans certains cas pour simplifier les calculs.

En opérant de même avec la deuxième équation en rotationnel on trouve:

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{B})}{\partial t} = 0$$

En choisissant la constante d'intégration à 0, on retrouve:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{30}$$

Les deux équations en divergence peuvent donc être dérivées des équations en rotationnel avec un choix de condition initiale.

En physique des plasmas dans le modèle dit à deux fluides (un fluide d'ions et un fluide d'électrons) les équations sont donc les équations de continuité (21) et de Newton (22) complétées par une équation d'état appropriée, et les équations de Maxwell⁶ (25),(26) avec la définition de la densité de courant \mathbf{j} (27).

Une autre remarque importante: les équations de Maxwell sont linéaires. Cependant les équations de continuité, de Newton et l'équation d'état sont non linéaires (termes: $n\mathbf{u}$, $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, ...). C'est ce dernier point qui rend l'étude des phénomènes dans un plasma (et en général dans un milieu) extrêmement compliquée.

⁶Notez que dans certains cas (**ondes dites longitudinales ou encore appelées ondes électrostatiques**) il peut être plus simple d'utiliser l'équation de Poisson. Ces cas seront discutés lorsqu'ils se présenteront (c.f. Ondes dans un plasma non-magnétisé, modèle à deux fluides).

2 La magnétohydrodynamique

2.1 Les équations de la magnétohydrodynamique

Nous allons réduire les équations à deux fluides à celle à un fluide chargé soumis à des champs électrique et magnétique. Cet ensemble d'équations est appelé équations de la magnétohydrodynamique (MHD).

Les quantités que nous considérons sont :

- La densité de masse ρ_m ⁷:

$$\rho_m = n_i m_i + n_e m_e \approx n(m_i + m_e) \approx n m_i$$

où n est le nombre de ions ou d'électrons par unité de volume. Nous avons supposé un plasma avec une seule espèce de ions et que localement il y a quasi-neutralité: $n_e \simeq n_i = n$.

- La densité de charge ρ (nous avons supposé que les ions ont une charge e , c'est-à-dire $Z = 1$):

$$\rho = n_i e - n_e e = e(n_i - n_e)$$

- La vitesse fluide \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = \frac{\sum_k n_k m_k \mathbf{u}_k}{\rho_m} \approx \frac{m_i \mathbf{u}_i + m_e \mathbf{u}_e}{m_i + m_e} \approx \mathbf{u}_i + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{u}_e$$

- La densité de courant \mathbf{j} :

$$\mathbf{j} = e(n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e) \approx ne(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$$

De la définition de la vitesse fluide \mathbf{u} et de la densité de courant \mathbf{j} , nous déduisons facilement les expressions de \mathbf{u}_e et \mathbf{u}_i :

$$\mathbf{u}_i \approx \mathbf{u} + \frac{m_e}{m_i} \frac{\mathbf{j}}{ne}$$

$$\mathbf{u}_e \approx \mathbf{u} - \frac{\mathbf{j}}{ne}$$

⁷Afin d'éviter des confusions avec la densité de charge, nous définissons la densité de masse par ρ_m

Dérivons les équations du plasma en utilisant ces quantités. En multipliant les équations de continuité pour les fluides d'électrons et d'ions par la masse de l'électron et de l'ion et en faisant la somme sur les deux espèces, nous trouvons l'équation pour *la conservation de la densité de masse* ρ_m :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}) = 0 \quad (31)$$

De même nous pouvons obtenir *l'équation de Newton*:

$$\rho_m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho_m \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} - \nabla p \quad (32)$$

où p est la pression totale ($p = p_e + p_i$) et nous avons fait les approximations: $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_i$, $\rho_m \approx nm_i$ et nous avons utilisé $\mathbf{R}_{jk} = -\mathbf{R}_{kj}$. A ces équations nous devons aussi ajouter une équation d'état, par exemple:

$$\frac{d(p\rho_m^{-\gamma})}{dt} = 0 \quad (33)$$

Quelles sont les conditions de validité de ces équations? Nous remarquons que les densités n_e et n_i sont supposées égales à n . Donc les deux fluides d'électrons et d'ions se comportent de la "même" façon. Pour que ceci soit satisfait, à cause de la grande différence entre l'inertie des ions et des électrons, l'échelle de temps doit être celle des ions⁸, c'est à dire les variations temporelles doivent être lentes. Mais de quelle échelle de temps parlons-nous? Dans le domaine fréquentiel, en présence d'un champ magnétique statique, nous devons avoir :

$$\omega \ll \Omega_{ci} \ll \Omega_{ce}$$

La MHD décrit donc des phénomènes à très basse fréquence.

Dans ce cadre les équations de Maxwell deviennent:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (34)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (35)$$

Dans l'équation (35), nous avons négligé le courant de déplacement devant le courant de conduction:

$$\mathbf{j} \gg \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

⁸Nous verrons cette même propriétés lors de l'étude des ondes dans un plasma non-magnétisé pour la limite à basse fréquence de l'onde acoustique ionique.

car nous nous limitons à des phénomènes à basse fréquence.

En examinant les variables des équations (31) à (35), nous notons que, contrairement au cas des équations à deux fluides, il nous manque une équation vectorielle. Nous rappelons la relation entre la densité de courant \mathbf{j} et le champ électrique. Dans le référentiel se mouvant avec la vitesse fluide \mathbf{u} , le champ électrique est \mathbf{E}' :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}$$

C'est simplement la relation de transformation des champs dans la limite non-relativiste (c.f. exercices). La relation entre la densité de courant \mathbf{j} et \mathbf{E}' est alors:

$$\mathbf{j} = \sigma_{DC} \mathbf{E}' \quad (36)$$

σ_{DC} est la conductibilité électrique DC⁹ et l'équation (36) est la loi d'Ohm. Si la conductibilité électrique était donnée, la relation (36) nous fournirait l'équation supplémentaire recherchée. La MHD idéale suppose que la conductibilité électrique du milieu (par exemple le plasma) est infinie¹⁰:

$$\sigma \rightarrow \infty$$

Sous cette hypothèse la loi d'Ohm implique, pour assurer un \mathbf{j} fini, que:

$$\mathbf{E}' = 0 = \mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} \quad (37)$$

L'ensemble des équations (31) à (34) et l'équation (37) forment les équations de la MHD idéale.

2.1.1 Conditions de validité des équations de la MHD idéale

Outre la condition sur la fréquence des phénomènes considérés, notons que dans le cadre des équations fluides nous négligeons le mouvement des particules. Nous demandons que :

$$\frac{\text{Rayon de Larmor ionique}}{\text{Echelle spatiale}} \ll 1$$

⁹Ne pas confondre la conductibilité électrique DC, σ_{DC} , dues aux collisions coulombiennes, avec le tenseur de conductibilité électrique, $\sigma(\omega, \mathbf{k})$. Pour simplifier la notation on va omettre l'indice *DC* dans ce qui suit.

¹⁰La propriété d'avoir une conductibilité infinie est différente de la supraconductivité, car nous n'avons pas l'effet Meissner. On utilise cette même approximation ($\sigma \rightarrow \infty$), dans le cas de fluides très conducteurs soumis à des champ \mathbf{E} et \mathbf{B} , comme par exemple pour des métaux en fusion.

Nous considérons que le plasma est un seul fluide. Il faut donc qu'il y ait un grand nombre de collisions dans le plasma pour thermaliser les populations d'électrons et d'ions. La condition de conductibilité électrique infinie nécessite que les collisions donnant lieu à une friction entre les électrons et les ions doivent être faibles (plasma chaud).

2.1.2 Propriétés des équations de la MHD

Force magnétique et force électrique

Quelle est l'importance de la densité de force électrique $\rho\mathbf{E}$ par rapport à la densité de force magnétique ($\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$)? Cette question est importante car elle nous permet de comprendre pourquoi le confinement du plasma se fait avec des champs magnétiques et non des champs électriques.

Estimons d'abord la densité de charge ρ_{el} en utilisant l'équation de Poisson:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0}$$

On considère l'échelle de variation spatiale $L \sim |\nabla|^{-1}$. En terme d'ordre de grandeur, l'équation de Poisson donne :

$$\frac{E}{L} \approx \frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0} \quad \text{soit} \quad \rho_{el} \approx \varepsilon_0 \frac{E}{L}$$

La force électrique vaut donc approximativement:

$$\rho_{el}E \approx \varepsilon_0 \frac{E^2}{L}$$

Estimons la force magnétique. Nous avons (dans la limite des basses fréquences qui nous a permis de négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction):

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \mathbf{B} \quad \text{soit} \quad j \approx \frac{B}{\mu_0 L}$$

et la densité de force magnétique vaut:

$$j \wedge B \approx \frac{B^2}{\mu_0 L}$$

Le rapport des densités de force électrique et magnétique est donc:

$$\frac{\rho_{el}E}{j \wedge B} \approx \varepsilon_0 \mu_0 \frac{E^2}{B^2} \quad (38)$$

La relation entre \mathbf{E} et \mathbf{B} est donnée par l'équation de Maxwell:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Soit $\tau \sim \omega^{-1}$, l'échelle de variation temporelle:

$$\frac{E}{L} \approx \frac{B}{\tau}$$

L'expression (38) devient alors:

$$\frac{\rho_{el} E}{j \wedge B} \approx \frac{1}{c^2} \frac{L^2}{\tau^2} \approx \frac{(\text{Vitesse du phénomène})^2}{c^2} \ll 1 \quad \text{dans la limite non-relativiste}$$

Dans la limite non-relativiste, la densité de force électrique est beaucoup plus faible que la densité de force magnétique.

En MHD nous négligeons donc la force électrique devant la force magnétique.

L'équation de Newton (32) se ramène à:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \right] \mathbf{u} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} - \nabla p \quad (39)$$

où, pour simplifier la notation, nous avons omis l'indice m pour la densité de masse ρ_m . Dans ce qui suit on va utiliser ρ pour définir la densité de masse.

2.2 Variation du flux magnétique dans le cadre de la MHD idéale

Considérons le flux magnétique Φ à travers une surface S à travers le plasma comme montré dans la figure 2. Cette surface S est liée au plasma et varie lorsque le plasma bouge. Soit C le contour entourant la surface S .

$$\Phi(t) = \int_{S(t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} \quad (40)$$

La variation temporelle du flux est composée de deux contributions:

- celle due à la variation de $\mathbf{B}(t)$ à travers la surface S

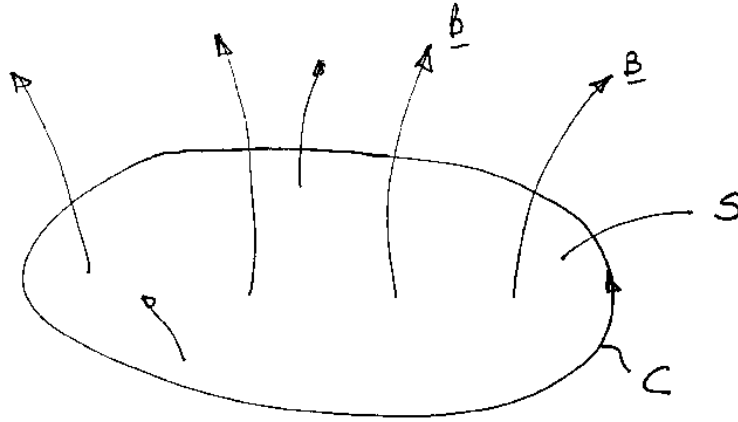


Figure 2: Flux magnétique à travers une surface S.

- celle due à la variation de la surface S due au mouvement du plasma.
Le premier terme est égal à:

$$\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S (\nabla \wedge \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (41)$$

Calculons le deuxième terme $\int \mathbf{B} \cdot \frac{d(\Delta \mathbf{S})}{dt}$. Le terme $d(\Delta \mathbf{S})$ vaut (cf. figure 3):

$$\frac{d(\Delta \mathbf{S})}{dt} = \mathbf{u} \wedge d\mathbf{l}$$

Donc:

$$\int \mathbf{B} \cdot \frac{d(\Delta \mathbf{S})}{dt} = \int \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} \wedge d\mathbf{l}) \quad (42)$$

En additionnant les deux expressions (41) et (42) nous obtenons:

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} \wedge d\mathbf{l})$$

Pour un plasma de conductibilité infinie nous avons:

$$\mathbf{E} = -(\mathbf{u} \wedge \mathbf{B})$$

Donc:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_C (\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \int_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} \wedge d\mathbf{l})$$

En utilisant la relation:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c},$$

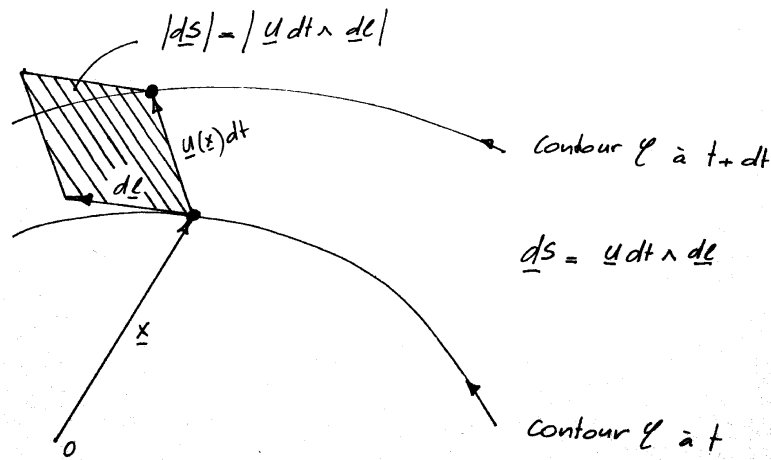


Figure 3: Déplacement du contour C

il vient:

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \int \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} \wedge d\mathbf{l}) + \int \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} \wedge d\mathbf{l}) = 0 \quad (43)$$

Le flux magnétique est conservé lorsque le fluide bouge. On dit que le flux est gelé dans le plasma.

2.2.1 Plasma gelé par les lignes de champ magnétique

Une propriété équivalente de l'équation (43) est que dans la limite de conductibilité infinie (MHD idéale) on peut montrer que le plasma est gelé dans les lignes de champ magnétique dans le sens décrit ci-dessous.

On va montrer que dans l'approximation de la MHD idéale, deux éléments fluides du plasma, initialement se trouvant sur une ligne de champ quelconque vont se trouver à des temps ultérieurs sur cette même ligne de champ indépendamment du mouvement du plasma.

- Calculons d'abord la variation de l'éléments de longueur $d(\Delta l)$. Pour ceci calculons la quantité $\frac{d}{dt}(\Delta l)$

Au premier ordre:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{l}) \cong \mathbf{u}(\mathbf{x}) + (\Delta \mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

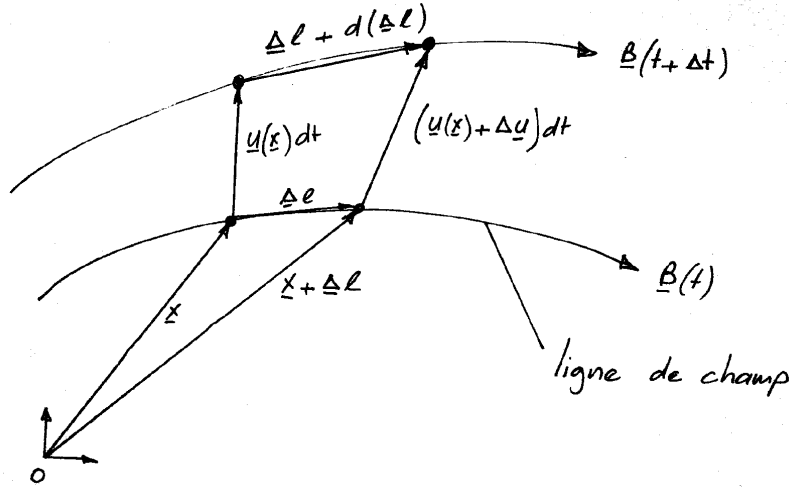


Figure 4: On considère à $t = 0$ deux éléments du plasma infiniment proches et se trouvant sur une même ligne de champ $\mathbf{B}(t)$. Dans l'intervalle de temps dt , ces deux éléments bougent d'une distance respective $\mathbf{u}dt$ et $(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u})dt$.

D'après la figure 4:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x})dt + (\Delta\mathbf{l} + d(\Delta\mathbf{l})) &= \Delta\mathbf{l} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{l})dt \\ \mathbf{u}(\mathbf{x})dt + d(\Delta\mathbf{l}) &= [\mathbf{u}(\mathbf{x}) + (\Delta\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{u}]dt \end{aligned}$$

Donc:

$$\frac{d(\Delta\mathbf{l})}{dt} = (\Delta\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{u} \quad (44)$$

- Calculons la variation de $\mathbf{B}(t)$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \wedge \mathbf{E}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) = \underbrace{\mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{B})}_{=0} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

où nous avons utilisé l'identité:

$$\nabla \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} \quad (45)$$

En utilisant l'équation(45) la dérivée totale de \mathbf{B} en suivant le mouvement du plasma devient:

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

Pour montrer que Δl reste toujours parallèle à \mathbf{B} calculons:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Delta l \wedge \mathbf{B}) &= \frac{d(\Delta l)}{dt} \wedge \mathbf{B} + \Delta l \wedge \frac{d\mathbf{B}}{dt} \\ &= [(\Delta l \cdot \nabla)\mathbf{u}] \wedge \mathbf{B} + \Delta l \wedge [(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{u})] \end{aligned}$$

Puisque $\Delta l \parallel \mathbf{B}$ le troisième terme du membre de droite s'annule.

$$\frac{d}{dt}(\Delta l \wedge \mathbf{B}) = [(\Delta l \cdot \nabla)\mathbf{u}] \wedge \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} \wedge \Delta l$$

On utilise à nouveau le fait que Δl est parallèle à \mathbf{B} .

$$\Rightarrow \Delta l = \alpha \mathbf{B}$$

Le terme de droite s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} \wedge \mathbf{B} - \alpha(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} \wedge \mathbf{B} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(\Delta l \wedge \mathbf{B}) &= 0 \end{aligned}$$

L'évolution de Δl est telle qu'il reste parallèle à \mathbf{B} .

Indépendamment de la complexité du mouvement, chaque ligne de champ garde son identité puisque chaque élément du plasma garde aussi son identité. Dans ces conditions, les lignes de champs magnétique ainsi que les tubes de flux évoluent comme s'ils étaient des objets réels. Ce résultat très général reste valable tant que la loi d'Ohm très simple $\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} = 0$ reste valable.

2.3 Variation du flux magnétique dans le cadre de la MHD avec conductibilité σ finie (MHD résistive)

Notons que la conservation du flux magnétique n'est vrai que si la conductibilité électrique σ est infinie. En effet si σ est finie nous avons:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B})$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} = -\frac{\nabla \wedge \mathbf{B}}{\mu_0 \sigma} - \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} \quad (46)$$

Le terme $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ vaut donc:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B})}{\mu_0 \sigma} + \nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) \quad (47)$$

Dans le calcul de $d\Phi/dt$, le terme en $\nabla^2 \mathbf{B}$ ne s'annule pas et la variation de flux est égal à:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \int \nabla^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$

Lorsque σ est infinie nous retrouvons bien la conservation du flux.

2.3.1 Diffusion du champ magnétique dans le plasma

Pour estimer quelle est l'échelle de temps sur laquelle on peut considérer que le flux est gelé dans le plasma, considérons le cas avec $\sigma \neq 0$ ce qui nous place dans ce que l'on appelle la MHD résistive. Nous sommes intéressés aux échelles de temps typiques de variation de \mathbf{B} . En développant les opérateurs dans l'équation (47) il vient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \\ &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\sigma \mu_0} (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}) = \underbrace{\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})}_{\text{convection}} + \underbrace{\frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla^2 \mathbf{B}}_{\text{diffusion}}. \end{aligned} \quad (48)$$

La variation de \mathbf{B} dans le plasma est due au fait que \mathbf{B} est transporté (terme de convection) avec la plasma et aussi à une diffusion (terme de diffusion). Pour estimer l'importance relative des deux termes, on considère l'échelle de variation spatiale $L \sim |\nabla|^{-1}$. Il vient donc:

$$\frac{|\frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla^2 \mathbf{B}|}{|\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})|} \sim \frac{\frac{1}{\sigma \mu_0} \frac{B}{L^2}}{\frac{uB}{L}} = \frac{1}{\sigma \mu_0 u L} \equiv R_m^{-1}, \quad (49)$$

où $R_m = \sigma \mu_0 u L$ est le nombre de Reynolds magnétique.¹¹ Dans la plupart des plasmas d'intérêt $R_m \gg 1$. Le temps caractéristique de diffusion de \mathbf{B}

¹¹dans les fluides ordinaires, décrit par l'équation de Navier–Stokes, on définit:

$$R \equiv \frac{\text{force d'inertie}}{\text{force de viscosité}} = \frac{|\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|}{|\mu \nabla^2 \mathbf{u}|} \sim \frac{\rho u L}{\mu}, \quad (50)$$

où μ est la viscosité qui représente un terme de dissipation.

dans le plasma est:

$$\tau = \left(\frac{1}{\mu_0 \sigma L^2} \right)^{-1} = \frac{R_m L}{u} \quad (51)$$

qui est en général macroscopique. Par exemple dans le Tokamak JET ($L \cong 1$ m, $T_e = 10$ keV, $\eta = \frac{1}{\sigma} = 5 \cdot 10^{-5} \times T_{e[\text{eV}]}^{-3/2} \ln \Lambda \sim 7.5 \cdot 10^{-10} \Omega\text{m}$)

$$\tau \sim 1700 \text{ s.} \quad (52)$$

Dans les plasmas spatiaux ce temps est même significativement plus élevé dû aux valeurs énormes de L . Un exemple important qui démontre la longue échelle de temps nécessaire pour découpler le plasma du champ magnétique vient des éruptions solaires et du vent solaire.

Le vent solaire est généré par du plasma éjecté radialement par le soleil. Ce plasma, qui constitue le vent solaire, transporte avec lui le champ magnétique solaire (terme de convection) pratiquement jusqu'au niveau de la magnétosphère terrestre. L'interaction entre la magnétosphère et le champ magnétique terrestre dépend fortement de l'orientation du champ magnétique transporté par le vent solaire. Cette direction est difficile à prédire puisqu'elle dépend du champ à l'intérieur du soleil qui est turbulent et change souvent d'orientation.

La propriété de geler le champ magnétique dans un fluide hautement conducteur comme le plasma peut aussi expliquer l'origine du champ magnétique dans l'univers ainsi que les champs magnétique des planètes qui ont un noyau métallique en fusion hautement conducteur. Cet effet de génération spontanée d'un champ magnétique macroscopique est appelé effet dynamo.

2.4 Conservation de l'énergie

En utilisant l'équation du mouvement (32) et l'équation de convection du champ magnétique \mathbf{B} dans un plasma parfaitement conducteur, avec les équations de Maxwell dans l'approximation de la MHD, on peut dériver une équation de conservation de l'énergie pour un fluide parfaitement conducteur ($\sigma \rightarrow \infty$) qui satisfait une équation d'état adiabatique.

Pour un système isolé, cette équation de conservation de l'énergie s'écrit comme:

$$\frac{dW}{dt} = 0, \quad (53)$$

avec l'énergie totale donnée par:

$$W = \int \left[\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} \right] dV \quad (54)$$

On peut interpréter cette énergie totale de la manière suivante:

$$W = T + V \quad (55)$$

avec l'énergie cinétique définie par:

$$T = \int \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 dV, \quad (56)$$

et l'énergie potentielle donnée par:

$$V = \int \left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} \right) dV, \quad (57)$$

où l'énergie potentielle contient un terme thermique et un autre dû au champ \mathbf{B} . La démonstration de cette loi de conservation se fait en multipliant scalairement l'équation du mouvement (32) par \mathbf{u} et en intégrant sur tout l'espace (c.f. exercices).

La loi de conservation de l'énergie dans le cadre de la MHD idéale est utilisée dans l'étude de stabilité de configuration magnétiques de confinement du plasma. Par analogie au résultat de la mécanique (particule dans un puit de potentiel), en vertu de la loi de conservation de l'énergie nous savons qu'une configuration d'équilibre linéairement stable correspond à un minimum local de l'énergie potentielle V . Ce résultat est à la base du **principe de l'énergie** que nous verrons plus tard dans le cours.

En résumé le modèle de la MHD idéale satisfait les lois de conservation suivantes:

- Conservation de la masse
- Conservation de l'impulsion
- Conservation de l'énergie
- Conservation du flux magnétique

2.5 Quelques propriétés des équations de la MHD

2.5.1 Vitesse de dérive $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$

Notons que formellement la vitesse de dérive $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ due à un champ électrique \mathbf{E} perpendiculaire à \mathbf{B} permet de satisfaire l'équation d'Ohm avec une conductibilité électrique infinie. En effet :

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{B^2}$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v}_D \wedge \mathbf{B} = \mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{B^2} \right) \wedge \mathbf{B} = 0$$

En assimilant la vitesse fluide \mathbf{u} à \mathbf{v}_D , l'équation d'Ohm avec une conductibilité infinie est satisfaite.

2.5.2 Calcul de la densité de force de Lorentz

Calculons la densité de force de Lorentz $\mathbf{J} \wedge \mathbf{B}$:

$$\mathbf{J} \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} = -\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B}) = -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{\mu_0} \quad (58)$$

Le terme $(B^2/2\mu_0)$ est analogue à une pression. On l'appelle la pression magnétique.

L'équation de Newton (39) devient:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla \left(P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \rho \mathbf{g} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{\mu_0} \quad (59)$$

Le rapport de la pression thermique P à la pression magnétique $(B^2/2\mu_0)$ est noté β :

$$\beta = \frac{\text{Pression thermique}}{\text{Pression magnétique}} = \frac{nk_B T}{B^2/2\mu_0} \quad (60)$$

Nous pouvons expliciter l'expression (58) en développant le terme $\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{\mu_0}$; considérons pour cela le référentiel de Frenet relatif au champ magnétique. Ce référentiel est constitué des vecteurs unitaires \mathbf{t} tangent à la ligne de champ, \mathbf{n} normal à la ligne de champ dirigé vers l'intérieur et \mathbf{b} le vecteur bi-normal à la ligne de champ (voir figure 5).

Nous avons donc:

$$\mathbf{B} = B \mathbf{t}$$

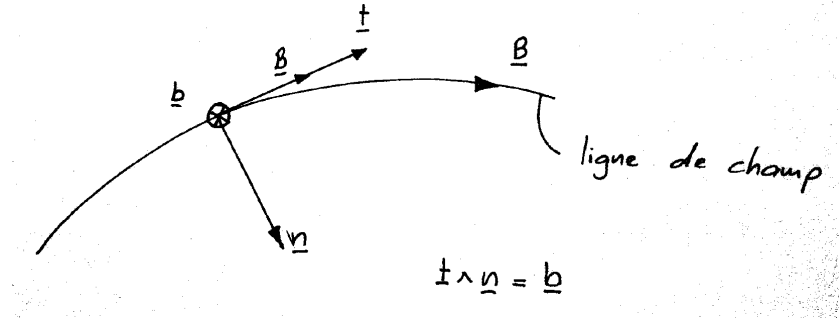


Figure 5: Trièdre de Frenet

Si nous dénotons les dérivées selon \mathbf{t} , \mathbf{n} et \mathbf{b} par $\frac{\partial}{\partial s}$, $\frac{\partial}{\partial n}$, $\frac{\partial}{\partial b}$, c'est-à-dire que le vecteur $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial n}, \frac{\partial}{\partial b} \right)$, nous avons:

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = B \frac{\partial}{\partial s} B \mathbf{t} = \mathbf{B} \frac{\partial B}{\partial s} + B^2 \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = \mathbf{t} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial B^2}{\partial s} \right) + \mathbf{n} \left(\frac{B^2}{R} \right)$$

car $\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = \frac{\mathbf{n}}{R}$, R étant le rayon de courbure local. La densité de force magnétique est donc:

$$\mathbf{j} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{n} \left(\frac{B^2}{\mu_0 R} - \frac{\partial B^2}{\partial n} \frac{1}{2\mu_0} \right) - \mathbf{b} \left(\frac{\partial B^2}{\partial b} \frac{1}{2\mu_0} \right) \quad (61)$$

De manière équivalente on peut écrire le terme $\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$ comme:

$$\mathbf{j} \wedge \mathbf{B} = \underbrace{-\nabla \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) + \nabla_{\parallel} \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right)}_{-\nabla_{\perp} \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right)} + \frac{1}{\mu_0} \frac{\mathbf{B}^2}{R} \mathbf{n} = -\nabla_{\perp} \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} \frac{\mathbf{B}^2}{R} \mathbf{n} \quad (62)$$

Nous interprétons l'expression (61) en remarquant que la densité de force de Lorentz comprend deux composantes : une pression $B^2/2\mu_0$ et une tension élastique avec une tension B^2/μ_0 . Cette tension appuie sur le plasma avec une force $B^2/R\mu_0$ (c.f. figure 6).

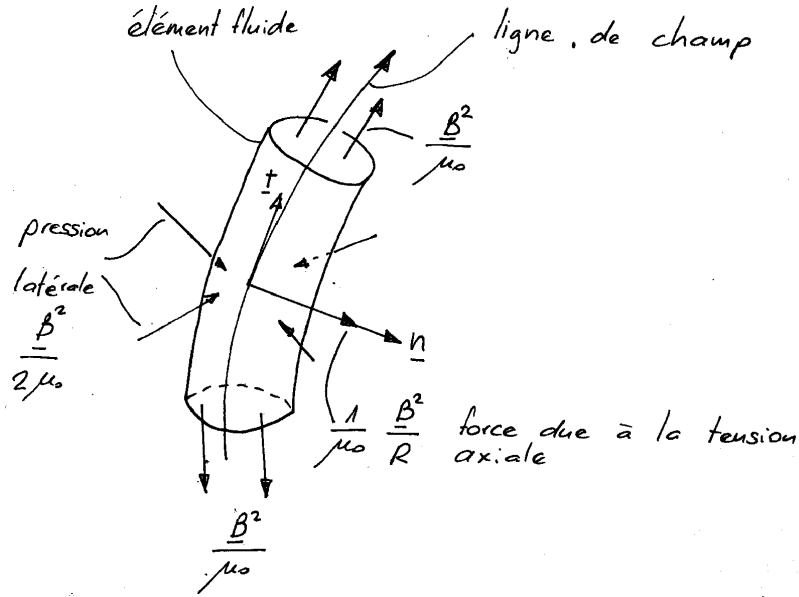


Figure 6: Tensions \parallel et \perp dans un champ magnétique avec courbure des lignes de champ.

2.6 Ondes dans le modèle de la MHD idéale

Les équations de la MHD idéale peuvent être combinées et réduites dans le système suivant:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0; \quad \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}; \quad (63)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}); \quad \frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0;^{12} \quad (64)$$

Ceci est un système de 8 équations et 8 inconnues: ρ , p , \mathbf{u} , \mathbf{B} .

Nous allons linéariser ce système d'équations en supposant de petites perturbations d'un équilibre pour un plasma uniforme et avec une vitesse fluide

¹²En récrivant l'équation de continuité comme:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}$$

on obtient

$$\frac{dp}{dt} + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

nulle à l'équilibre.

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t); \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t); \quad (65)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 + \rho_1(\mathbf{x}, t); \quad p(\mathbf{x}, t) = p_0 + p_1(\mathbf{x}, t); \quad (66)$$

Le système d'équations linéarisé devient:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0; \quad \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0; \quad (67)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0); \quad p_1 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \rho_1 \equiv c_s^2 \rho_1;^{13} \quad (68)$$

La grandeur $c_s \equiv \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ est la *vitesse d'une onde sonore*. Après élimination de p_1 et en faisant une transformation de Fourier (c.f. paragraphe "Technique mathématique dans le chapitre "Ondes dans un plasma dans le modèle à deux fluides) il vient:

$$\omega \rho_1 - \rho_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1 = 0; \quad (69)$$

$$\omega \rho_0 \mathbf{u}_1 = \mathbf{k} \rho_1 c_s^2 - \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0; \quad (70)$$

$$\omega \mathbf{B}_1 = -\mathbf{k} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0); \quad (71)$$

où nous avons supposé une dépendance $\sim e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$ pour les grandeurs perturbées.

2.6.1 L'onde d'Alfvén de cisaillement (Shear Alfvén Wave)

Sans perte de généralités on peut choisir $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$, comme montré sur la Figure 7. Considérons le cas particulier suivant: $k_y = 0$, $u_{1x} = u_{1z} = 0$, c.à d.:

$$\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z) \quad (72)$$

¹³Des équations (64) et (66) on obtient

$$(p_0 + p_1)(\rho_0 + \rho_1)^{-\gamma} = p_0 \rho_0^{-\gamma} \Rightarrow (p_0 + p_1) \left(1 - \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0}\right) = p_0$$

A l'ordre 'zero' (c.à.d. à l'équilibre, on néglige les perturbations avec un indice '1') on obtient simplement $p_0 \equiv p_0$, par contre, au premier ordre:

$$p_1 = \gamma p_0 \frac{\rho_1}{\rho_0}$$

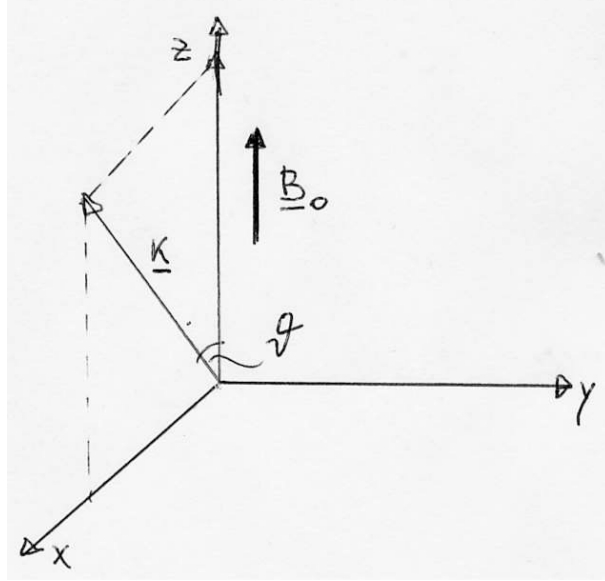


Figure 7: Géométrie considérée pour l'étude des ondes MHD.

$$\mathbf{u} = (0, u_y, 0) \quad (73)$$

On va traiter le cas $u_{1x} \neq 0 \neq u_{1z}$ plus tard.

L'équation (70) devient:

$$\omega \rho_0 u_y = -\frac{1}{\mu_0} [(\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0] = \quad (74)$$

$$= (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1)_x & (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1)_y & (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1)_z \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix}_y = \quad (75)$$

$$= \frac{B_0}{\mu_0} (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1)_x = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ k_x & 0 & k_z \\ B_{1x} & B_{1y} & B_{1z} \end{vmatrix}_x = -\frac{B_0}{\mu_0} k_z B_{1y} \quad (76)$$

Et l'équation (71) donne:

$$-\omega B_{1y} = [\mathbf{k} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0)]_y = [\mathbf{k} \times \hat{x} B_0 u_{1y}]_y = B_0 k_z u_{1y} \quad (77)$$

Le système d'équations (69),(70),(71) peut être écrit de la manière suivante:

$$\rho_1 = 0, \quad (78)$$

$$\omega \rho_0 u_{1y} + \frac{k_z B_0}{\mu_0} B_{1y} = 0, \quad (79)$$

$$k_z B_0 u_{1y} + \omega B_{1y} = 0, \quad (80)$$

où (79) et (80) peuvent être réécrites sous la forme:

$$\mathbf{A}(\omega, \mathbf{k}) \cdot \begin{pmatrix} u_{1y} \\ B_{1y} \end{pmatrix} = 0, \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}(\omega, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \omega \rho_0 & \frac{k_z B_0}{\omega} \\ k_z B_0 & \mu_0 \end{pmatrix}. \quad (81)$$

La solution non-triviale ($u_{1y} \neq 0 \neq B_{1y}$) est obtenue en annulant le déterminant de \mathbf{A} ($\det \mathbf{A} = 0$).

Ce qui donne:

$$\omega^2 = \frac{B_0^2}{\rho_0 \mu_0} k_z^2 \equiv c_A^2 k_z^2 = c_A^2 k^2 \cos^2 \theta, \quad (82)$$

où $c_A \equiv B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_0}$ est la *vitesse d'Alfvén*. Des valeurs typiques de cette vitesse sont:

Magnetosphère:

$$c_A \sim \frac{5 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{1.7 \cdot 10^{-27} \times 10^6 \times 4\pi \cdot 10^{-7}}} \sim 10^6 \text{ m/s}. \quad (83)$$

Tokamak:

$$c_A \sim \frac{3}{\sqrt{1.7 \cdot 10^{-27} \times 10^{20} \times 4\pi \cdot 10^{-7}}} \sim 6 \cdot 10^6 \text{ m/s}. \quad (84)$$

La solution (82) est appelée *onde Alfvén* (en anglais: *shear Alfvén wave*) où *onde Alfvén non-compressionnelle* puisqu'il n'y a pas de perturbation de densité:

$$\rho_1 = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1}{\omega} = 0, \quad (85)$$

Ceci est fondamentalement différent que dans le cas d'une onde sonore. De plus on peut remarquer que:

- La vitesse, v_α , des particules α nées avec une énergie cinétique de 3.5 MeV est telle que $v_\alpha > c_A$, ce qui permet aux α de devenir *résonnants*¹⁴ avec les ondes Alfvén lors de leur ralentissement collisionnel dans un réacteur de fusion.

¹⁴Dans un modèle cinétique (c.f Cours de Physique des Plasmas II), la condition $v_{\text{particle}} = v_\alpha \sim v_{\text{ph}}$ rend possible une forte interaction onde-particule avec un échange d'énergie. Ceci peut donner lieu à des instabilités et la trajectoire des particules peut être perturbée par l'onde.

- La première observation des ondes Alfvén a été faite dans l'espace, et par la suite dans un plasma de mercure (densité ρ_0 élevée \rightarrow longueur d'onde λ petite: ce qui facilite la mesure dans un plasma fini de laboratoire).
- Les ondes Alfvén sont équivalentes à l'onde d'une corde de masse par unité de longueur M soumise à une tension S .

$$M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = S \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \quad \implies \quad \omega^2 = \frac{S}{M} k_z^2 \quad (86)$$

2.6.2 L'onde magnétozonique

Considérons maintenant le cas où $u_{1x} \neq 0$, $u_{1y} = 0$, $u_{1z} \neq 0$. En choisissant $B_{1y} = 0$ et avec notre choix initial $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$ et $k_y = 0$ on obtient de (71)

$$\mathbf{B}_1 = \frac{u_{1x} B_0}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_y). \quad (87)$$

En utilisant ρ_1 de (69) et \mathbf{B}_1 dans (87) in (70) on obtient un système linéaire pour u_{1x} and u_{1z} . Comme avant ce système possède une solution non-triviale si le déterminant des coefficients de la matrice s'annule. Après un peu d'algèbre on obtient la relation de dispersion:

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 (c_A^2 + c_s^2) + k_z^2 k^2 c_A^2 c_s^2 = 0, \quad (88)$$

qui a comme solution:

$$\omega^2 = \frac{1}{2} (c_A^2 + c_s^2) k^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} (c_A^2 + c_s^2)^2 k^4 - c_A^2 c_s^2 k^2 k_z^2}. \quad (89)$$

On peut remarquer que:

$$\left(\frac{c_s}{c_A} \right)^2 = \frac{\gamma p_0 \mu_0 \rho_0}{\rho_0 B_0^2} = \frac{\gamma p_0}{2 \frac{B_0^2}{2\mu_0}} = \frac{\gamma}{2} \beta, \quad (90)$$

Avec β étant le rapport entre la pression thermique et la pression magnétique (équation (60)). Pour beaucoup de plasmas d'intérêt on a $\beta \ll 1$, ce qui implique $c_s \ll c_A$. Dans cette limite la solution "+" de (89) devient:

$$\omega^2 \simeq k^2 c_A^2. \quad (91)$$

Cette solution est appelée *onde rapide* (fast wave) où *onde Alfvén compressive*.¹⁵ Pour la solution “-” on trouve *l’onde lente* où *onde magnéto-sonique*

$$\omega^2 \simeq c_s^2 k_z^2 = k^2 c_s^2 \cos^2 \theta. \quad (92)$$

Une manière utile de représenter les différentes solutions est de représenter la surface parcourue par le vecteur vitesse de phase $\omega \mathbf{k} / k^2$ en fonction de l’angle entre le champ d’équilibre \mathbf{B}_0 et le vecteur d’onde \mathbf{k} (Figure 8).

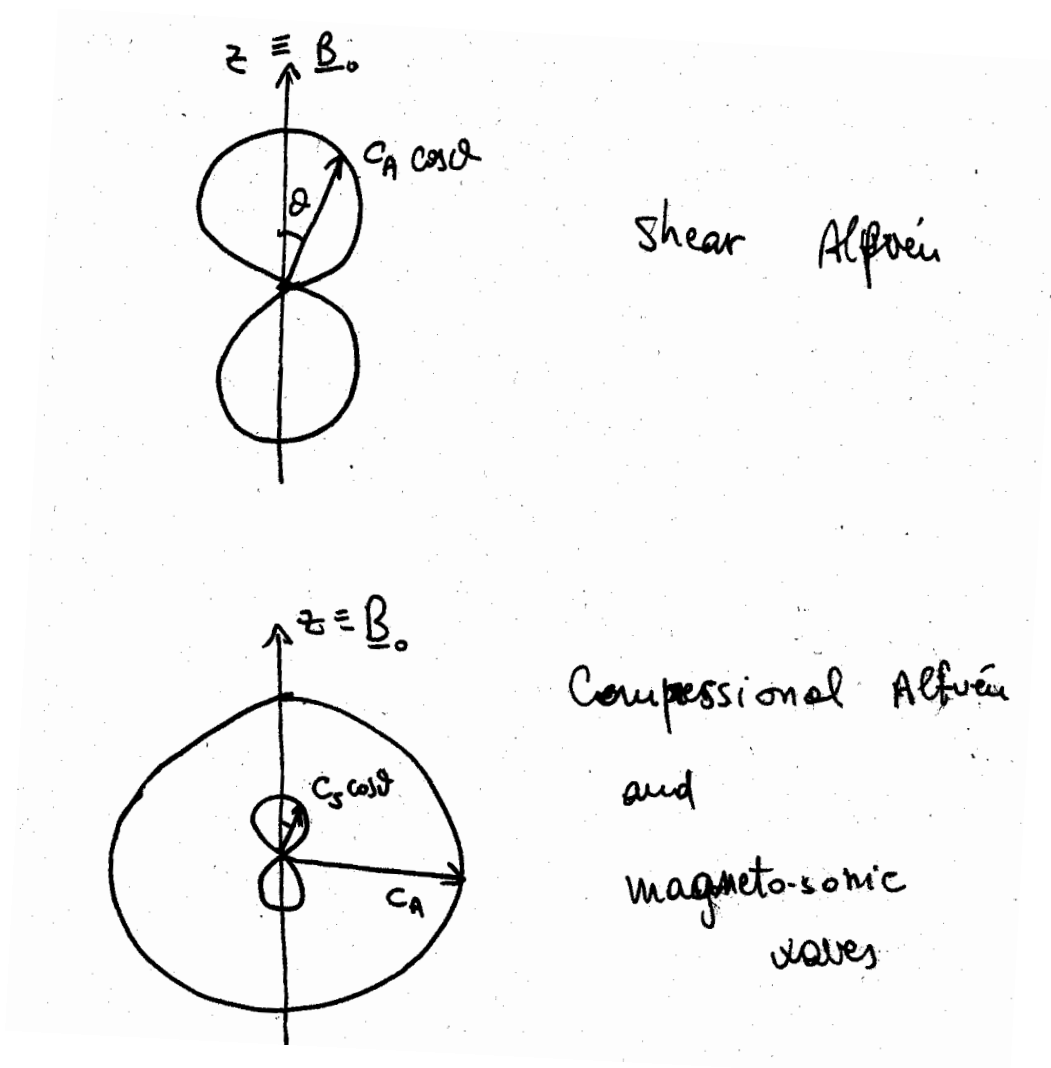


Figure 8: Ondes Alfvén

¹⁵ $\rho_1 \neq 0 \iff \nabla \cdot \mathbf{u}_1 \neq 0$

Les conclusions générales suivantes peuvent tirées:

- Les 3 ondes que nous avons trouvées sont *tous* les modes possibles d'oscillation d'un plasma (infini) dans le cadre du modèle de la MHD idéale.
- On remarquera que dans le cadre d'un plasma infini, uniforme, nous avons trouvé des solutions stables pour les 3 ondes. Autrement dit, pour un vecteur d'onde \mathbf{k} avec des composantes réelles nous avons toujours une solution réelle de ω .
- On verra qu'en présence de gradients ($\nabla p_0 \neq 0$) et/ou de courants ($\mathbf{j}_0 \neq 0$) ce résultat n'est plus valable, pour un vecteur d'onde \mathbf{k} avec des composantes réelles on peut trouver des solutions avec ω complexe ce qui peut donner lieu à des instabilités. Dans un Tokamak, nous avons un plasma, magnétisé, fini, en présence de courants et de gradients de pression, il est donc crucial d'étudier les critères de stabilité (signe de la partie imaginaire de ω) de ces configurations dans le cadre de la MHD. Avec la dépendance $\sim e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$, des solutions avec $\text{Im}(\omega) = \omega_I < 0$ sont des solutions instables.
- Si on relâche les hypothèses de la MHD plusieurs autres modes d'oscillation peuvent apparaître, comme par exemple lorsqu'on sépare la dynamique des électrons et des ions. Pour décrire ces modes d'oscillation il faut utiliser des modèles plus complets comme par exemple le modèle à plusieurs fluides où le modèle cinétique. Dans le cadre de ce cours nous utiliserons le modèle à deux fluides pour un plasma uniforme non-magnétisé.