

Chapitre 6

Analyse de Fourier

*Le but de ce chapitre est d'introduire les séries de Fourier
et la transformation de Fourier
avant d'en présenter quelques applications*

L'analyse de Fourier (ou analyse harmonique) joue un rôle de tout premier plan en Physique, notamment pour l'étude des systèmes linéaires. Par définition, ces systèmes sont régis par des équations linéaires, caractérisées par le fait que toute combinaison linéaire quelconque de solutions est encore solution. Cette propriété est de première importance, et assure que l'ensemble des solutions peut être muni d'une structure d'espace vectoriel, dont une base est formée par un ensemble complet de solutions linéairement indépendantes. Bien évidemment, les équations régissant le comportement des grandeurs physiques d'intérêt ne sont pas toujours linéaires, loin de là. En fait, les richesses de comportement sont précisément dues le plus souvent aux *non-linéarités*.

Pour fixer les idées, considérons la dynamique d'une particule classique de masse m se déplaçant sur une droite (un seul degré de liberté, l'abscisse x comptée à partir d'une certaine origine). Toute la dynamique est décrite par une équation différentielle exprimant la relation entre la coordonnée x , la vitesse $\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x}$, l'accélération $\frac{d^2x}{dt^2} \equiv \ddot{x}$ et la force totale F agissant sur la particule :

$$m\ddot{x} = F, \quad (6.1)$$

Dans le cas le plus courant¹, F ne dépend que de la coordonnée et est une certaine fonction $F(x)$. À une dimension d'espace, on peut toujours poser que $F(x)$ est la dérivée d'une fonction, $F(x) = -V'(x)$; autrement dit, à une dimension et pour des forces "ordinaires", on peut toujours supposer que la force dérive d'un potentiel au sens usuel, et $V(x)$ désigne alors l'énergie potentielle de la particule dans le champ de forces considéré. Alors, (6.1) devient :

$$m\ddot{x} = -V'(x). \quad (6.2)$$

Dans le cas général, $V'(x)$ ne dépend pas linéairement de x : c'est une fonction quelconque, dont les zéros (quand ils existent) définissent les extrema de $V(x)$, donc les positions d'équilibre ($V'(x_0) = 0 \iff$ force nulle). Si $V''(x_0) > 0$, l'équilibre est stable (force de *rappel*), instable si $V''(x_0) < 0$. Par exemple, si l'énergie potentielle est de la forme :

$$V(x) = V_0 \left[\left(\frac{x}{a}\right)^4 - g \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \lambda \frac{x}{a} \right] \quad (V_0 > 0, g > 0, \lambda > 0, a > 0) \quad (6.3)$$

$V'(x)$ est un polynôme du troisième degré. (6.3) décrit un champ de force où la particule a trois positions d'équilibre si g est assez grand (trouver la condition précise), dont l'une est instable (laquelle ?).

L'équation (6.2) n'est linéaire que si $V(x)$ est au plus quadratique en x , ce qui contient les deux cas physiquement importants :

¹Ceci exclut le cas d'une particule chargée dans un champ électromagnétique, soumise à la force de Lorentz $\vec{F} = q(\vec{\mathcal{E}} + \vec{v} \times \vec{\mathcal{B}})$, et celui d'une force de frottement dépendant de la vitesse.

1. particule dans un champ de force constant (champ de pesanteur terrestre dans l'approximation locale, particule chargée dans un champ électrique constant, ...) ; alors $V(x) \propto x$ et $V'(x) = C^{\text{ste}}$
2. $V(x) \propto x^2$ (oscillateur harmonique), et alors $V'(x) \propto x$.

Lorsque $V(x)$ est une fonction quelconque, l'hypothèse des petites oscillations restitue un cadre harmonique à l'intérieur duquel le système devient (localement) linéaire. En effet, si x_m désigne l'une des positions d'équilibre stable, et si on se contente de chercher les petits écarts² $|x - x_m| \ll a$, alors il suffit de faire un développement de Taylor autour de x_m :

$$V(x) \simeq V(x_m) + \frac{1}{2}(x - x_m)^2 V''(x_m) . \quad (6.4)$$

En posant $V''(x_m) = m\omega_m^2$, on fait apparaître la pulsation relative au minimum de V considéré (la fréquence correspondante s'appelle *fréquence de fond de puits*) ; en reportant l'expression simplifiée (6.4) au second membre de (6.2), on obtient un oscillateur harmonique. Bien sûr, tout ceci ne vaut que pour les petites oscillations³, et la condition de validité du développement tronqué (6.4) doit être précisée au cas par cas ; elle s'exprimera souvent comme⁴ :

$$|(x - x_m)V'''(x_m)| \ll |V''(x_m)| . \quad (6.5)$$

L'exemple traité ci-dessus repose sur une équation *différentielle*, mais l'analyse harmonique conserve ses droits et son importance quand les équations dynamiques sont des équations aux dérivées partielles, à condition toujours qu'elles soient linéaires ; c'est le cas par exemple pour un système quantique, régi par l'équation de Schrödinger, ou pour les phénomènes de diffusion classique libre (diffusion d'une densité de particules, diffusion de la chaleur⁵), ou pour les champs régis par les équations de Maxwell. Enfin, l'analyse harmonique est d'usage presque systématique pour tous les systèmes traités dans un cadre de réponse linéaire, comme les systèmes électroniques au voisinage de leur point de fonctionnement statique, ou les systèmes macroscopiques caractérisables par une susceptibilité (Théorie de la réponse linéaire). Ces quelques exemples devraient suffire à convaincre de l'extrême importance de l'analyse harmonique, esquissée dans la suite de ce chapitre.

6.1 Rappels sur les séries de Fourier

La notion de série de Fourier s'introduit tout naturellement quand on considère une fonction périodique⁶. Pour fixer les idées, soit t la variable temps ; une fonction périodique $f(t)$, dont la plus petite période est notée T , satisfait par définition :

$$f(t + pT) = f(t) \quad \forall p \in \mathbb{Z} . \quad (6.6)$$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ est la pulsation fondamentale de la fonction, ν sa fréquence fondamentale (on dit aussi fréquence propre), les fréquences de la forme $n\nu$, $n \in \mathbb{N}^*$ constituant les *harmoniques*.

Par ailleurs, on connaît deux types de fonctions périodiques élémentaires, les sinus et les cosinus. Plus précisément ici, on peut construire deux familles, $s_n(t) = \sin n 2\pi \frac{t}{T} \equiv \sin n\omega t$ et $c_n(t) = \cos n 2\pi \frac{t}{T} \equiv \cos n\omega t$ ($n \in \mathbb{N}$). Toutes ces fonctions ont aussi pour période T (pour elles, ce n'est pas la plus petite période), satisfaisant également (6.6). La question qui vient alors à l'esprit est : dans quelle mesure peut-on représenter

² a désigne généralement une longueur caractéristique de $V(x)$, c'est la grandeur qui figure dans l'exemple donné en (6.3).

³Penser au pendule simple, à qui il n'est pas interdit de faire des tours complets, si on le lance avec une vitesse suffisante (laquelle ?) !

⁴Cette condition est d'ordre purement mathématique et porte exclusivement sur les caractéristiques de la fonction $V(x)$. Dans d'autres contextes, elle devra être complétée par des considérations physiques. Par exemple, si la particule est soumise à l'agitation thermique et que le minimum considéré est séparé de son(s) "premier(s) voisin(s)" par une barrière d'énergie ΔE , l'approximation ci-dessus ne vaut que si $k_B T \ll \Delta E$.

⁵Pour la diffusion, l'hypothèse de Fick (proportionnalité entre courant et gradient) est nécessaire. De même, pour l'équation de la chaleur, il faut d'une part pouvoir définir la notion d'équilibre local (la température est une grandeur essentiellement statistique) et faire à nouveau une hypothèse de linéarité (courant d'énergie proportionnel au gradient de température). Dans les deux cas, le courant est bien sûr dirigé en sens contraire du gradient.

⁶Pour le physicien, il n'existe pas de phénomène strictement périodique, puisqu'un tel phénomène devrait durer *infiniment* longtemps. En Physique, on considère qu'une fonction est périodique si elle représente un phénomène dont la durée est très grande devant la période T (on doit avoir le temps de compter un grand nombre de périodes).

(i. e. exprimer) une fonction périodique telle que f sous la forme d'une somme (série ?) – c'est-à-dire d'une combinaison linéaire – des s_n et des c_n ? Explicitement, la question est de préciser les conditions permettant d'écrire une expression telle que⁷ :

$$f(t) = c + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) , \quad (6.7)$$

où c , les a_n et les b_n constituent par définition les coefficients de Fourier de la fonction f . Une série telle que (6.7) est un exemple⁸ de *série trigonométrique*. Si la fonction est paire, seuls les cosinus apparaissent, si elle est impaire, il n'y a que des sinus ; cette propriété de symétrie se traduit ainsi par :

$$f(-t) = f(t) : b_n = 0 \quad \forall n , \quad f(-t) = -f(t) : c = 0, a_n = 0 \quad \forall n \quad (6.9)$$

En outre, comme la moyenne sur une période des sinus et des cosinus est nulle, la constante c est la moyenne (ici temporelle) de f , soit $c = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \equiv \bar{f}$.

Un développement tel que (6.7) est remarquable au sens où il exprime $f(t)$ en combinaison linéaire des lignes trigonométriques élémentaires contenant exclusivement la pulsation fondamentale et toutes ses harmoniques (entier $\times \omega$) – d'où la terminologie *analyse harmonique*. Il ne fait pas de doute que, au vu de (6.7), la condition caractéristique de *périodicité* de f , (6.6), est satisfaite. En outre, si un tel développement existe, il faudra en temps utile établir des formules permettant de calculer les coefficients c , a_n et b_n .

Les notions précédentes ont un sens quelle que soit la nature physique de la variable apparaissant dans les fonctions. Par exemple, il existe des situations impliquant des fonctions périodiques dans l'espace (l'énergie potentielle d'un électron dans un cristal parfait, par exemple). Dans le cas d'un réseau unidimensionnel et x désignant la coordonnée, la relation de périodicité d'une fonction v s'exprime comme :

$$v(x + pa) = v(x) \quad \forall p \in \mathbb{Z} , \quad (6.10)$$

où a est une longueur fondamentale (le côté de la maille élémentaire du cristal (réseau) dans l'exemple cité ci-dessus). En posant $k = \frac{2\pi}{a}$, on peut espérer pour v un développement du genre :

$$v(x) = c + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nkx + b_n \sin nkx) . \quad (6.11)$$

Ici, le produit kx (nombre d'onde \times coordonnée) joue le même rôle que ωt (pulsation \times temps) dans (6.7).

À l'aide des formules d'Euler, il est possible de mettre la série (6.7) sous une forme plus compacte, et souvent beaucoup plus commode en pratique :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\omega t} , \quad (6.12)$$

où la série au second membre doit être comprise comme :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^{+N} f_n e^{in\omega t} . \quad (6.13)$$

⁷La sommation se fait sur \mathbb{N}^* puisque les sinus et cosinus ont une parité déterminée.

⁸Toutes les séries trigonométriques ne sont pas de cette forme. Par exemple, la célèbre fonction de Weierstrass :

$$\mathcal{W}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b^n \cos(a^n \pi x) , \quad (6.8)$$

est un autre exemple de série trigonométrique. Sa célébrité tient au fait qu'il s'agit du premier exemple historiquement publié de fonction continue partout et nulle part dérivable (on a retrouvé des traces de tels "monstres" dans des notes non publiées de Riemann, plusieurs décennies auparavant) : en 1872, Weierstrass a démontré que si $|b| < 1$, si a est un entier impair et si $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$, la dérivée n'existe pour aucune valeur de x , alors que pour $|b| < 1$, \mathcal{W} est visiblement continue (somme d'une série uniformément convergente). Par la suite, Hardy (1916) a montré que cette propriété est vraie pour $0 < b < 1$, $ab \geq 1$ et $a > 1$, pas forcément entier impair.

Un autre exemple de séries trigonométriques : les séries de Gauss, de la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in^2 x}$ qui sont, elles aussi, des fonctions 2π -périodiques. Une série de Gauss est comme une série de Fourier dont on aurait supprimé les harmoniques dont le rang n'est pas un carré parfait ; si les f_n décroissent lentement, la variation en x de la série est extrêmement irrégulière (faire l'expérience numérique avec $f_n = q^n$ et q légèrement inférieur à 1).

En prenant les complexes conjugués et en changeant la variable muette de n en $-n$, on voit que :

$$[f(t)]^* = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{-n}^* e^{in\omega t} ; \quad (6.14)$$

il en résulte que pour une fonction f à valeurs réelles, les coefficients de Fourier f_n ont la propriété de symétrie :

$$f(t) \in \mathbb{R} \forall t \quad : \quad f_n = f_{-n}^* . \quad (6.15)$$

L'ensemble des coefficients $\{f_n\}$ constitue le *spectre de Fourier* de $f(t)$. Les relations entre les divers coefficients sont :

$$c = f_0 , \quad a_n = f_n + f_{-n} , \quad b_n = i(f_n - f_{-n}) . \quad (6.16)$$

Supposons que la série de Fourier (6.12) est uniformément convergente, auquel cas sa somme, la fonction $f(t)$, est continue. Dans ces conditions, le calcul des coefficients f_n est immédiat. En effet, multiplions (6.12) par $e^{-im\omega t}$ et intégrons membre à membre en profitant de la convergence uniforme pour permuter intégration et sommation infinie :

$$\int_0^T dt e^{-im\omega t} f(t) = \int_0^T dt e^{-im\omega t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^T dt f_n e^{i(n-m)\omega t} . \quad (6.17)$$

On a, si $n \neq m$:

$$\int_0^T e^{i(n-m)\omega t} dt = \frac{e^{i(n-m)\omega T} - 1}{i(n-m)\omega} = 0 , \quad (6.18)$$

puisque $\omega T = 2\pi$ et que $e^{in2\pi} = 1 \forall n \in \mathbb{Z}$, cependant que si $n = m$, $\int_0^T dt = T$, d'où⁹ :

$$\int_0^T e^{i(n-m)\omega t} dt = T\delta_{nm} , \quad (6.19)$$

où δ_{nm} est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $n = m$, 0 autrement. Revenant à (6.17), il vient :

$$\int_0^T dt e^{-im\omega t} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n T\delta_{nm} = T f_m \iff f_m = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-im\omega t} f(t) dt . \quad (6.20)$$

Ceci permet, pour une série uniformément convergente dont la somme est de ce fait une fonction continue, de calculer les coefficients de Fourier f_m et d'écrire explicitement la série de Fourier. Les coefficients de la série en sinus et cosinus se déduisent facilement de (6.20) et on trouve :

$$c = \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t) , \quad a_n = \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \cos n\omega t , \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T dt f(t) \sin n\omega t . \quad (6.21)$$

Enfin, toujours quand la convergence est uniforme, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^T f^*(t)f(t) dt &= \int_0^T dt \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} f_n^* f_{n'} e^{i(n'-n)\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} f_n^* f_{n'} \int_0^T e^{i(n'-n)\omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} f_n^* f_{n'} T\delta_{nn'} = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n|^2 . \end{aligned} \quad (6.22)$$

La relation :

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n|^2 \quad (6.23)$$

porte le nom de *relation de Bessel - Parseval - Plancherel*. Le second membre (au facteur T près) évoque le carré de la norme d'un vecteur de composantes f_n d'un espace vectoriel sur le corps \mathbb{C} . En conséquence, l'intégrale

⁹La même relation est encore vraie quand on remplace les bornes par $t_0, t_0 + T$.

du premier membre peut recevoir la même interprétation : c'est ce qui est fait couramment quand on considère, en Mécanique quantique, l'intégrale du module carré d'une fonction d'onde, $\int_{\mathbb{R}^3} |\Psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r$. On voit même que, en raisonnant avec deux fonctions distinctes $f(t)$ et $g(t)$, on a :

$$\int_0^T f^*(t)g(t) dt = \int_0^T dt \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} f_n^* g_{n'} e^{i(n'-n)\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} f_n^* g_{n'} T \delta_{nn'} = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n^* g_n, \quad (6.24)$$

une relation qui cette fois évoque un *produit scalaire* dans un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable, exprimé en terme des composantes des vecteurs sur une base orthonormée. Tout ceci provient du fait que l'ensemble des fonctions $e_n(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$, $n \in \mathbb{Z}$, constitue de fait une base (orthonormée) pour l'espace des fonctions admettant un développement de Fourier. Ces points seront repris dans le ch. 10.

Il est utile de récrire les relations importantes ci-dessus en termes de variables adimensionnées¹⁰, on a :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{inx}, \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(x) dx. \quad (6.25)$$

$$c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx f(x), \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx f(x) \cos nx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} dx f(x) \sin nx. \quad (6.26)$$

et :

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n|^2. \quad (6.27)$$

L'existence de l'intégrale assure que la série est convergente, donc nécessairement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n| = 0, \quad (6.28)$$

d'où il résulte que les limites de $\Re f_n$ et $\Im f_n$ sont séparément nulles :

$$\Re \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \right) = 0, \quad \Im \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \right) = 0; \quad (6.29)$$

dans le cas où f est à valeurs réelles, ceci se traduit comme :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = 0. \quad (6.30)$$

Prenons maintenant le problème sous un autre angle. Soit $f(t)$ une fonction T -périodique bornée, localement sommable mais pas forcément continue¹¹. Pour cette fonction, on peut calculer des coefficients de Fourier selon la recette (6.20) et écrire la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\omega t}$. La question est : quelle est la relation entre la série de Fourier ainsi construite (évidemment supposée convergente), et la fonction $f(t)$? On ne peut espérer que la série converge partout vers $f(t)$, puisque modifier f sur un ensemble de mesure nulle ne change pas l'intégrale (6.20) et donc laisse les coefficients f_n inaltérés : au mieux, une fonction et sa série de Fourier sont *presque partout* égales.

De fait, le théorème de Dirichlet (1829, pas facile à démontrer) établit que pour toute fonction bornée monotone par morceaux¹², la suite des sommes partielles de Fourier converge simplement partout vers la demi-somme :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\omega t} = \frac{1}{2} [f(t+0) + f(t-0)] \quad \forall t. \quad (6.31)$$

La démonstration réside essentiellement dans l'important résultat :

¹⁰De fait, il suffit de remplacer formellement partout la période T par 2π et ω par 1.

¹¹Une fonction en créneau, en dents de scie égoïne, etc.

¹²Un exemple de fonction bornée mais non monotone par morceaux : $\cos \frac{1}{x}$ dans un voisinage de l'origine.

Soit $f(x)$ une fonction à variation bornée dans l'intervalle $[a, b]$. Alors l'intégrale suivante, dite de Dirichlet :

$$I(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_a^b f(x) \frac{\sin \lambda x}{x} dx \quad (6.32)$$

a les limites suivantes quand $\lambda \rightarrow \infty$:

$$I(+\infty) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \text{ et } b \text{ sont de même signe} \\ \frac{1}{2} f(0+) & \text{si } a = 0 \text{ et } b > 0 \\ \frac{1}{2} f(0-) & \text{si } a < 0 \text{ et } b = 0 \end{cases} . \quad (6.33)$$

Il en résulte en particulier que :

$$I(+\infty) = \frac{1}{2} [f(0+) + f(0-)] \quad \text{si } a < 0 < b \quad (6.34)$$

La démonstration utilise également une relation importante (mais facile, et dont il est bon de connaître l'existence) entre la somme partielle :

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{+N} f_n e^{in\omega t} \quad (6.35)$$

et la fonction $f(t)$. Cette relation s'établit comme suit :

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{+N} \frac{1}{T} \int_0^T e^{-in\omega t'} f(t') dt' e^{in\omega t} = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n=-N}^{+N} e^{in\omega(t-t')} f(t') dt' ; \quad (6.36)$$

la somme géométrique se calcule et on trouve :

$$S_N(t) = \frac{1}{T} \int_0^T D_N(t-t') f(t') dt' , \quad D_N(t) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})\omega t}{\sin \frac{1}{2}\omega t} ; \quad (6.37)$$

la somme S_N se rencontre dans les problèmes de diffraction par un réseau (fini) de N atomes, un certain déphasage spatial élémentaire entre deux ondes diffusées jouant le rôle de ωt . La figure 6.1 donne D_N en fonction de $\frac{\omega t}{2}$ pour deux (petites !) valeurs de N .

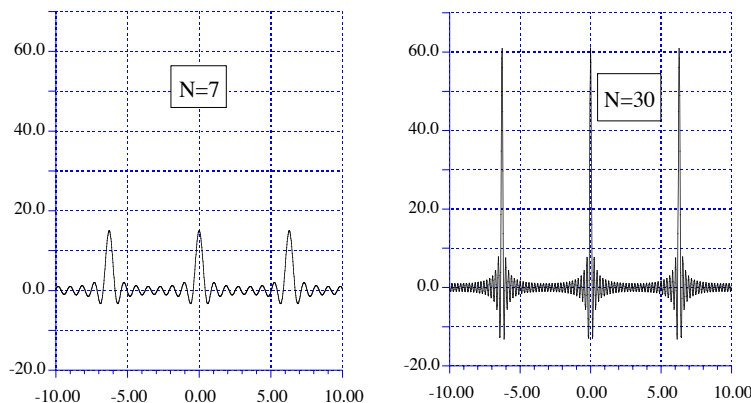


Figure 6.1: Variations de $D_N(x) = \frac{\sin(2N+1)x}{\sin x}$ pour deux valeurs de N .

Ainsi, la série de Fourier converge partout simplement vers la moyenne arithmétique des valeurs à gauche et à droite. Ceci veut dire que en tout point où f est continue et vaut $f(t)$, la série de Fourier est égale à $f(t)$.

En un point de discontinuité, la série donne la demi-somme de la limite à droite et de la limite à gauche. De façon sans doute un peu abusive, mais passée dans les mœurs, on dit encore que la série *est* la série de Fourier de la fonction $f(t)$, bien que la coïncidence n'ait pas lieu partout : la série et $f(t)$ sont *presque partout égales*¹³. Il faut bien avouer que, en Physique, ces subtilités de convergence ne jouent pas souvent un rôle¹⁴.

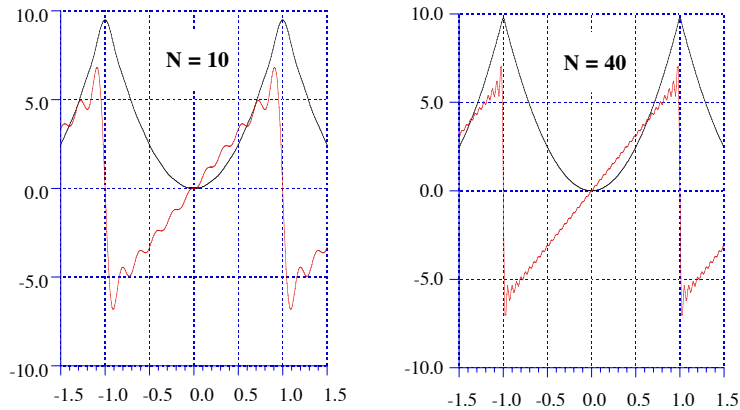


Figure 6.2: Comparaison entre d'une part la fonction (6.39) et sa dérivée, d'autre part leurs "séries" de Fourier tronquées à 10 et 40 termes.

Intuitivement, on sent bien que la série tronquée S_N définit une *approximation* de f . Une mesure de l'écart (l'erreur) est constituée par la moyenne sur une période du carré Δ_N^2 de la distance entre f et S_N , soit :

$$\Delta_N^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t) - S_N(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{|n| \geq N+1} |f(t)e^{-in\omega t}|^2 dt = \sum_{|n| \geq N+1} |f_n|^2. \quad (6.38)$$

Mesurée à l'aune de Δ_N , il est clair que l'approximation est d'autant meilleure¹⁵ que N est grand ($\Delta_{N+1} \leq \Delta_N$). À N donné, l'erreur est d'autant plus faible que les coefficients f_n décroissent vite en module en fonction de n , c'est-à-dire que la fonction a un grand nombre de dérivées continues (voir ci-dessous, notamment (6.50)). Par exemple, soit la fonction :

$$f(x) = x^2, \quad -\pi \leq x \leq +\pi \quad (6.39)$$

et périodisée sur \mathbb{R} selon $f(x + p2\pi) = f(x)$. On trouve facilement la série de Fourier correspondante :

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{inx} = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (6.40)$$

L'approximation correspondant à une troncature à N termes est simplement :

$$f_{\text{ap}}(x) = \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n=-N}^{+N} \frac{(-1)^n}{n^2} e^{inx} = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx; \quad (6.41)$$

la figure 6.2 compare f et f_{ap} et les dérivées correspondantes. On note au passage que les coefficients de Fourier de $f(x)$ décroissent comme n^{-2} , et que ceux de la dérivée décroissent corrélativement comme n^{-1} : il est visible

¹³Ceci sous-entend que sur une période, $f(t)$ a un nombre fini de discontinuités.

¹⁴En Physique, une fonction discontinue représente en fait une fonction variant très vite sur une échelle hors de portée des capacités d'observation, ou non pertinent pour la question posée.

¹⁵Toutefois, l'optimisme qui peut en résulter doit être tempéré par un phénomène surprenant, le *phénomène de Gibbs* – voir plus loin.

sur la figure que, à N donné, l'erreur est plus importante pour la dérivée que pour la fonction elle-même (et que dire des dérivées d'ordre supérieur ?!).

De fait, établissons maintenant une relation importante entre la série de Fourier d'une fonction et celles de ses dérivées. Soit $f(t)$ une fonction une fois continûment dérivable. En partant de (6.20) et en effectuant une intégration par parties, il vient :

$$f_m = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-im\omega t} f(t) dt = \frac{1}{T} \left[\frac{e^{-im\omega t}}{-im\omega} f(t) \right]_0^T + \frac{1}{im\omega T} \int_0^T e^{-im\omega t} f'(t) dt . \quad (6.42)$$

Le terme tout intégré est nul (puisque $\omega T = 2\pi$, que m est entier et que f est T -périodique), et il reste :

$$f_m = \frac{1}{im\omega T} \int_0^T e^{-im\omega t} f'(t) dt . \quad (6.43)$$

(6.43) se lit aussi :

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{-im\omega t} f'(t) dt = im\omega f_m , \quad (6.44)$$

où l'on voit apparaître, suivant (6.20), le coefficient de Fourier $f_m^{(1)}$ de la dérivée f' ; d'où la règle pratique :

$$f(t) \rightarrow f_m \quad \Longrightarrow \quad f'(t) \rightarrow f_m^{(1)} = im\omega f_m ; \quad (6.45)$$

ainsi, pour avoir le coefficient de Fourier f_m de la dérivée, il suffit de multiplier celui de la fonction par $im\omega$. Ce résultat, important pour les applications, se retrouve de tête en dérivant (6.12) terme à terme, une opération dont la légitimité repose sur une hypothèse contraignante de convergence uniforme, ce que n'exige pas la démonstration ci-dessus utilisant une intégration par parties (mais qui a toutefois supposé la fonction une fois continûment dérivable). Comme toujours, l'intégration est une opération sûre, alors que celle de dérivation peut être hasardeuse.

Par exemple, soit la fonction sinus redressé $f(t) = |\sin \omega t|$; il n'est pas difficile de trouver les coefficients de Fourier et d'écrire la série¹⁶ :

$$f(t) \stackrel{\text{d'ef}}{=} |\sin \omega t| = \frac{2}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\sin^2 n\omega t}{n^2 - \frac{1}{4}} = -\frac{2}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{4n^2 - 1} e^{2in\omega t} ; \quad (6.47)$$

cette série converge uniformément. En revanche, la dérivée $f'(t)$ a un saut à chaque fois que $\omega t = n\pi$; sa série de Fourier, obtenue suivant la règle (6.45), est :

$$f'(t) = \frac{\omega}{i\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{n}{n^2 - \frac{1}{4}} e^{2in\omega t} ; \quad (6.48)$$

cette série ne converge pas uniformément, elle vaut zéro pour $\omega t = p\pi$ ($p \in \mathbb{Z}$), qui est bien la demi-somme à gauche et à droite de $\frac{d}{dt} |\sin \omega t|$ en $\omega t = p\pi$.

Pour une fonction k -fois continûment dérivable, la règle se généralise en :

$$f(t) \rightarrow f_m \quad \Longrightarrow \quad f^{(k)}(t) \rightarrow f_m^{(k)} = (im\omega)^k f_m . \quad (6.49)$$

En lisant cette relation à l'envers, on voit que plus une fonction est un grand nombre de fois dérivable, plus ses coefficients de Fourier décroissent vite. En effet, désignant par M_k un majorant du module de la $k^{\text{ème}}$ dérivée, $|f^{(k)}(t)| \leq M_k$, on a :

$$|f_m| \leq \left(\frac{1}{m|\omega|} \right)^k \int_0^T |f^{(k)}(t)| \frac{dt}{T} = \frac{M_k}{|m\omega|^k} . \quad (6.50)$$

¹⁶ Avec la méthode exposée au chapitre 4 ($\pi \cot \pi z$ & Co), on pourra vérifier que :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{4n^2 - 1} = 0 . \quad (6.46)$$

Par ailleurs, $f(t)$ a pour plus petite période $\frac{\pi}{\omega}$ (et non $\frac{2\pi}{\omega}$), d'où l'apparition des seules valeurs *paires* de n dans la série (6.47).

De ceci résulte immédiatement un résultat important : si $f(t)$ est deux fois continûment dérivable, alors sa série de Fourier converge uniformément¹⁷. En effet, faisant $k = 2$ dans (6.50), on voit que $|f_m| \leq M_2/k^2$. Il en résulte que la série des modules est bornée par une série convergente :

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\omega t} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f_n| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{M_2}{|n\omega|^2} . \quad (6.51)$$

La majoration est indépendante de t , ce qui établit la convergence uniforme.

Remarquons enfin que (6.12) est un développement de Laurent dans la variable $z = e^{i\omega t}$:

$$f(t) = \phi(e^{i\omega t}) \quad \text{avec} \quad \phi(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n z^n , \quad (6.52)$$

et que la relation d'inversion dans (6.20) s'écrit alors :

$$f_m = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_{r=1}} z^{-(m+1)} \phi(z) dz , \quad (6.53)$$

où l'intégration se fait en tournant dans le sens positif le long du cercle de rayon unité entourant l'origine de \mathbb{C} (l'intégrale au second membre de (6.53) résulte directement du changement de variable $z = e^{i\omega t}$) – sans préjuger d'éventuelles déformations du contour compatibles avec les singularités de $\phi(z)$.

Avant de continuer, examinons quelques exemples illustrant quelques points développés ci-dessus..

• Exemples

1. Soit la fonction T -périodique :

$$f(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 < t < \frac{T}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{T}{2} < t < T \end{cases} , \quad (6.54)$$

et prolongée par périodes sur tout l'axe réel. Cette fonction (impaire) est discontinue en $t = p \times \frac{T}{2}$ ($p \in \mathbb{Z}$). Les formules (6.21) permettent d'écrire l'égalité suivante (à comprendre comme une égalité *presque partout*, comme déjà mentionné) :

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \dots \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)\omega t}{(2n+1)} . \quad (6.55)$$

Les bizarreries de convergence sont patentes sur cet exemple : si on fait brutalement $t = \frac{T}{2}$ dans la série au second membre, chacun des termes est nul ($\sin(2n+1)\pi = 0$!), alors que, par sa définition même, la fonction $f(t)$ est discontinue en ces points (où donc on ne sait pas ce qu'elle vaut) ; quoi qu'il en soit, on voit que la série est bien égale à la demi-somme des valeurs à gauche et à droite d'une discontinuité de f .

En outre, cet exemple illustre de façon exemplaire un phénomène assez surprenant, appelé *phénomène de Gibbs* : juste à gauche ou à droite d'une discontinuité de f , la somme de la série excède toujours 1 en module (alors que quand f est définie, $|f| = 1$) : l'étude du maximum de la série met en évidence des points où la somme de la série (qui contient pourtant une *infinité* de termes) ne coïncide pas avec f . Par exemple, juste à droite de $t = 0$, la série tronquée à N termes (qui est clairement infiniment dérivable) présente des oscillations amorties autour de la valeur 1 ; son *maximum maximorum* survient en $t_N = \frac{\pi}{2N+2}$ et excède 1 d'environ 20 % dans la limite $N \rightarrow +\infty$. L'écart est donc fini, même pour la série ; il faut toutefois noter que l'abscisse où cet écart persiste vaut $0+$ à la limite¹⁸. Ceci

¹⁷Noter que la réciproque est fautive : la fonction sinus redressé (6.47) a une série de Fourier uniformément convergente, et pourtant elle n'est pas deux fois continûment différentiable. Le fait est que sa dérivée n'est pas continue, et que la dérivée seconde n'est pas bornée : dans ces conditions, la majoration exprimée en (6.51) ne tient plus ou, si on préfère, est illusoire ($M_2 = +\infty$!).

¹⁸Pour plus de détails, voir le livre d'Hubert KRIVINE, ou celui de Walter APPEL, section 11.3.

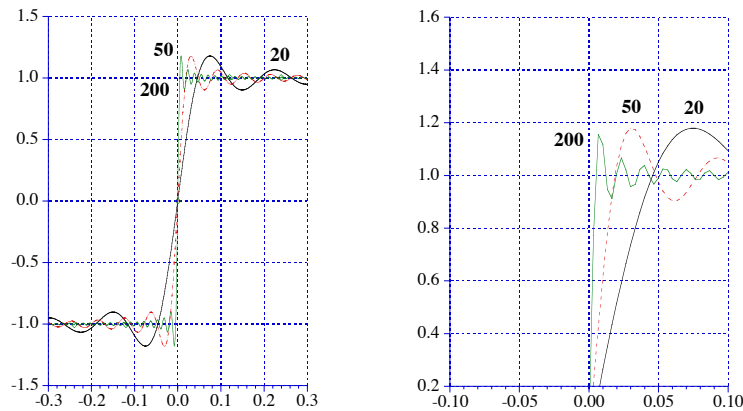


Figure 6.3: Illustration du phénomène de Gibbs.

mis à part, il reste que plus la série tronquée contient un grand nombre de termes, meilleure est la représentation de f (un ampli large bande reproduit mieux une fonction en créneaux qu'un ampli à bande étroite¹⁹), comme on l'a déjà noté. Par ailleurs, clairement la série des dérivées ne converge pas (au moins au sens usuel !), puisque si on dérive terme à terme on trouve :

$$\frac{4\omega}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(2n+1)\omega t . \quad (6.56)$$

D'un autre côté, sur la définition (6.54), on voit que $f'(t) = 0$ partout sauf si $t = p\frac{T}{2}$ ($p \in \mathbb{Z}$), auquel cas f' n'est pas définie. On verra plus loin comment comprendre tout ceci.

2. Considérons maintenant la fonction $f(t)$ définie comme :

$$f(t) = \frac{\pi - \omega_0 t}{2} , \quad 0 < t < T = \frac{2\pi}{\omega_0} , \quad (6.57)$$

et prolongée périodiquement sur \mathbb{R} :

$$f(t + nT) = f(t) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad 0 < t < T . \quad (6.58)$$

Le graphe de cette fonction – impaire – est constitué d'une infinité de segments parallèles de pente négative, allant de $+\pi/2$ à $-\pi/2$ pour $t = 0, T$, modulo T . La dérivée $f'(t)$ vaut $-\omega_0/2$ si $t \neq nT$, et n'est pas définie en $t = nT$. Toutefois, si on imagine que les discontinuités sont arrondies sur un très petit intervalle autour de nT (en pensant par exemple à la série tronquée à un nombre N fini de termes), on admet l'idée que près d'un tel point f'_N prend de très grandes valeurs positives, puisque la fonction passe de $-\pi/2$ à $+\pi/2$ alors que t augmente à peine de part et d'autre de nT : le rapport des accroissements $\delta f/\delta t$ est donc très grand (sans que l'on sache d'ailleurs précisément ce qu'il vaut puisque δt n'est pas vraiment défini). Ce point mérite d'être approfondi (voir plus loin), et produit d'ailleurs une relation rencontrée souvent en Physique, notamment à propos des problèmes de diffraction par un réseau *infini*²⁰.

Le calcul des coefficients de Fourier suivant (6.21) permet d'écrire la série de Fourier représentant la fonction $f(t)$ définie en (6.57) et (6.58) ; s'agissant à nouveau d'une fonction impaire, $f(-t) = -f(t)$,

¹⁹d'où, pour un ampli audio, l'importance d'une bande passante large (comparée à [20, 20 000] Hz !) pour une bonne restitution des transitoires (un coup d'archet, une percussion,...)

²⁰Elle sert notamment à démontrer la condition de von Laue, équivalente à celle de Bragg, $n\lambda = 2d \sin \theta$ dans les notations traditionnelles.

seuls les sinus apparaissent dans la série trigonométrique :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin n\omega_0 t, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{\pi - \omega_0 t}{2} \sin n\omega_0 t dt = \frac{1}{n} \quad (6.59)$$

Considérons maintenant la série tronquée à N termes :

$$f_N(t) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \sin n\omega_0 t. \quad (6.60)$$

La dérivée de f_N est :

$$f'_N(t) = \omega_0 \sum_{n=1}^N \cos n\omega_0 t = \frac{\omega_0}{2} \sum_{n=-N}^N e^{in\omega_0 t} - \frac{\omega_0}{2} \iff f'_N(t) + \frac{\omega_0}{2} = \frac{\omega_0}{2} \text{III}_N(\omega_0 t), \quad (6.61)$$

où :

$$\text{III}_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx}. \quad (6.62)$$

Cette somme géométrique se calcule facilement et on trouve :

$$\text{III}_N(x) = \frac{\sin(2N+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}. \quad (6.63)$$

d'où²¹ :

$$f'_N(t) + \frac{\omega_0}{2} = \frac{\sin \left[(2N+1)\frac{\omega_0 t}{2} \right]}{\sin \frac{\omega_0 t}{2}} \equiv \frac{\pi\omega_0}{2} \tilde{\delta}_N\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right), \quad \tilde{\delta}_N(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(2N+1)x}{\sin x}. \quad (6.64)$$

Si $N \gg 1$, $\tilde{\delta}_N(x)$ est une fonction 2π -périodique présentant un maximum très pointu à chaque fois que $x = p2\pi$, $p \in \mathbb{Z}$; par exemple, $\tilde{\delta}_N(0) = (2N+1)/\pi \gg 1$, et $\tilde{\delta}_N(\frac{\pi}{2N+1}) = 0$. L'aire sous la courbe représentant $\tilde{\delta}_N$ peut être estimée en assimilant chaque partie pointue à un triangle et on trouve $\frac{1}{\pi} \frac{1}{2} (2N+1) \frac{2\pi}{2N+1} = 1$ pour chaque résonance. D'ailleurs, en revenant à la définition (6.61), on a :

$$\int_{-T/2}^{+T/2} \left(f'_N(t) + \frac{\omega_0}{2} \right) dt = \frac{\omega_0}{2} \sum_{n=-N}^N \int_{-T/2}^{+T/2} e^{in\omega_0 t} dt = \frac{\omega_0}{2} \sum_{n=-N}^N T\delta_{n0} = \pi, \quad (6.65)$$

de sorte que l'aire sous $\tilde{\delta}_N(x)$, calculée sur un intervalle d'une période, est *exactement* égale à 1.

Il en résulte que pour toute fonction $\phi(x)$ définie en $x = 0$ et variant sur une échelle d'ordre 1 (donc très lentement à l'échelle $\frac{1}{N}$), on a :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \phi(x) \tilde{\delta}_N(x) dx \simeq \phi(x=0) \int_{-\pi}^{+\pi} \tilde{\delta}_N(x) dx = \phi(x=0). \quad (6.66)$$

C'est ainsi que, passant à la limite $N \rightarrow +\infty$ sous l'intégrale, s'introduit intuitivement la "fonction" de Dirac $\delta(x)$, *restreinte pour l'instant à l'intervalle* $[-\pi, +\pi]$, dont la règle d'usage est :

$$\int_a^b \phi(x) \delta(x) dx = \phi(0) \quad (-\pi \leq a < 0 < b \leq \pi). \quad (6.67)$$

De par sa définition (6.64), la fonction $\tilde{\delta}_N$ est 2π -périodique et il en va de même de sa limite δ : le raisonnement ci-dessus peut être reproduit au voisinage de chaque valeur de x de la forme entier $\times 2\pi$.

²¹ La fonction $\tilde{\delta}_N(x)$ introduite en (6.64) est essentiellement le noyau de Dirichlet D_N défini en (6.37). De même, la fonction $\text{III}_N(x)$ est égale à $D_N(\frac{x}{\omega_0})$.

Il en résulte que la limite de $\tilde{\delta}_N$, définie sur tout l'axe réel, est en fait une série de pics équidistants, ce que l'on peut écrire précisément, après calage des bonnes variables à partir de (6.61) :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N e^{in\omega_0 t} = 2\pi \sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta(\omega_0 t - p 2\pi) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta\left(\frac{t}{T} - p\right) . \quad (6.68)$$

En termes de variables sans dimension²² :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} = 2\pi \sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta(x - p 2\pi) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta\left(\frac{x}{2\pi} - p\right) \equiv \text{III}\left(\frac{x}{2\pi}\right) , \quad (6.69)$$

où $\text{III}(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - n)$ est le “peigne de Dirac”, représenté par un symbole évocateur²³. •

Suivant une idée déjà discutée, la série tronquée après le $N^{\text{ème}}$ terme, f_N , constitue une approximation de f , d'autant meilleure que N est grand. De la même façon, f'_N est une approximation de $f'(t)$. Visiblement, f'_N est nulle le plus souvent (“presque partout”, dans le langage commun) mais présente des pics très marqués à chaque fois que $t = \text{entier} \times T$. À la limite $N = +\infty$, f' est nulle presque partout (cette fois au sens du Mathématicien) ; f' est non-nulle aux seuls points de discontinuité de f . On retiendra que si une fonction présente un saut Δf en un point t_0 , alors sa dérivée est de la forme $f'_{\text{reg}}(t) + \Delta f \delta(t - t_0)$, où $f'_{\text{reg}}(t)$ est la dérivée calculée par les moyens ordinaires ; plus précisément, on a :

$$f'(t) = f'_{\text{reg}}(t) + [f(t_0 + 0) - f(t_0 - 0)] \delta(t - t_0) . \quad (6.71)$$

Ce résultat ressortira plusieurs fois dans la suite, sous une forme ou sous une autre.

Revenons maintenant au développement (6.12) ; il peut être considéré comme une transformation (linéaire) qui, à une suite infinie dénombrable de coefficients $\{f_n\}_n$ fait correspondre²⁴ la fonction $f(t)$ égale²⁵ à la somme de la série au second membre de (6.12) :

$$\{f_n\}_n \quad \xrightarrow{\text{série de Fourier}} \quad f(t) . \quad (6.72)$$

Dans la même optique, la recette (6.20) constitue la relation inverse :

$$f(t) \quad \xrightarrow{\text{formule intégrale}} \quad \{f_n\}_n \quad (6.73)$$

qui permet d'associer à f la suite de nombres f_n . Pour une fonction périodique, il y a une dissymétrie entre les relations de passage dans un sens et dans l'autre : sommation discrète dans un sens, intégration (sommation continue) dans l'autre sens. Quoi qu'il en soit on peut dire que (6.20) est la formule d'inversion associée à (6.12), ou que ces deux relations sont inverses l'une de l'autre.

Remarques

1. La relation de définition du peigne de Dirac, (6.69) :

$$f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} 2\pi \sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta(x - p 2\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{inx} , \quad (6.74)$$

²²De (6.66), on voit que $\tilde{\delta}_N(ax) = \frac{1}{|a|} \tilde{\delta}_N(x)$ ($a \in \mathbb{R}$), une relation qui est préservée à la limite : $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$.

²³De la même façon, le physicien – fort de ses idiosyncrasies et sachant plus ou moins vaguement que la justification existe en termes de Théorie des distributions – dira sans hésiter que la série obtenue en dérivant (6.55) terme à terme représente le peigne de Dirac alterné, trouvant sans états d'âme (après un petit calcul) :

$$\frac{4\omega}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(2n+1)\omega t = 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \delta\left(t - n\frac{T}{2}\right) . \quad (6.70)$$

²⁴En Physique, on appelle souvent *champs* certaines fonctions d'une grandeur physique. Un champ peut être vu comme l'ensemble (infini non-dénombrable) des composantes d'un vecteur – c'est pourquoi on dit d'un champ qu'il possède une infinité de degrés de liberté. C'est le cas en Mécanique quantique où les valeurs (complexes !) de la fonction d'onde $\Psi(x, t)$ (champ des amplitudes de probabilité) sont les différentes composantes du vecteur $|\Psi(t)\rangle$ dans la représentation dite *représentation-q*.

²⁵L'égalité étant toujours à prendre avec les subtilités énoncées plus haut.

peut bien être interprétée comme un développement en série de Fourier, celui de la “fonction” périodique $f(x)$ définie par (6.74), mais les coefficients f_n ne tendent pas vers zéro (ils sont strictement constants !), contrairement à ce qui se passe pour une vraie fonction (voir (6.28)). La raison en est que $f(x)$ n’est pas une fonction, mais une *distribution*

2. La fonction $\tilde{\delta}_N(x)$ introduite en (6.64) engendre le peigne de Dirac dans la limite $N \rightarrow +\infty$ mais doit être distinguée de la fonction de Dirac, $\delta(x)$, qui est la limite d’une fonction non-périodique, et dont la règle opérationnelle de base est :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \delta(x - x_0) dx = \phi(x_0) . \quad (6.75)$$

(comparer avec (6.66), où les bornes sont $\pm\pi$). $\delta(x)$ peut être définie comme la limite d’une suite de fonctions (le choix est vaste) ; soit par exemple la suite :

$$\delta_n(x - x_0) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x-x_0)^2} . \quad (6.76)$$

Chacune de ces fonctions est une gaussienne présentant un et un seul pic en x_0 de largeur d’ordre $\frac{1}{n}$ et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_n(x - x_0) dx = 1$. Il en résulte que l’association avec une bonne fonction $\phi(x)$ donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \delta_n(x - x_0) \simeq \phi(x_0) ; \quad (6.77)$$

à la limite, c’est bien la règle (6.75) qui est retrouvée ; on peut tout autant prendre la suite de lorentziennes :

$$\delta_n(x - x_0) = \frac{1}{n\pi} \frac{1}{(x - x_0)^2 + \frac{1}{n^2}} . \quad (6.78)$$

Toutes ces suites constituent des précurseurs de la fonction de Dirac, au sens où l’on peut énoncer (intuitivement) le résultat :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n(x - x_0) = \delta(x - x_0) . \quad (6.79)$$

Il est d’ailleurs fréquent de considérer des précurseurs qui dépendent *continûment* d’un paramètre. Ainsi on écrira par exemple :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{(x - x_0)^2 + \varepsilon^2} = \dots = \delta(x - x_0) . \quad (6.80)$$

6.2 Transformation de Fourier

6.2.1 Définition et formule d’inversion

La transformation de Fourier est en quelque sorte la généralisation au cas des fonctions non-périodiques de la notion de série de Fourier.

Pour bien montrer intuitivement la filiation entre la série de Fourier et l’intégrale de Fourier, récrivons (6.12) en appelant maintenant ω_0 la pulsation propre :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{in\omega_0 t} , \quad f(t + nT) = f(t) \quad (\omega_0 T = 2\pi) . \quad (6.81)$$

Par ailleurs, rien n’interdit de voir les f_n comme les valeurs d’une certaine fonction \tilde{f} (inconnue) pour les valeurs $n\omega_0$ de sa variable ω . Ceci étant réalisé et admis, (6.81) s’écrit tout autant :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega = n\omega_0) e^{in\omega_0 t} . \quad (6.82)$$

Pour l'instant, l'espace des pulsations (*a priori* dense (continu)) est en un sens discrétisé (quantifié) : seules les pulsations ω multiples entiers de ω_0 apparaissent. Imaginons maintenant que la période $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ devienne de plus en plus grande, ce qui équivaut à densifier les points $n\omega_0$ sur l'axe réel ; la différence $(n+1)\omega_0 - n\omega_0$ joue le rôle d'un petit incrément $\delta\omega$. À la limite $T \rightarrow +\infty$, on conçoit que la somme (6.82) devienne une intégrale^{26, 27}, moyennant l'introduction d'une densité F associée à \tilde{f} , $F(n\omega_0)\delta\omega = \tilde{f}(n\omega_0)$:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega . \quad (6.83)$$

Dans cette limite, la période T étant infinie, la fonction f n'est pas périodique ; d'ailleurs, selon (6.83) :

$$f(t + \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega(t+\tau)} d\omega \quad (6.84)$$

et il n'existe pas de temps τ tel que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega(t+\tau)} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega . \quad (6.85)$$

Cette introduction intuitive conduit à se poser la question de la définition précise d'une transformation intégrale du genre (6.83). Pour sacrifier à la tradition, on part d'une certaine fonction donnée, $f(x)$, et on définit sa transformée de Fourier $F(k)$ par la relation suivante²⁸ :

$$F(k) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx . \quad (6.87)$$

Dans cette écriture, x et k sont des quantités réelles, mais f et F sont *a priori* des fonctions à valeurs complexes. Le cas échéant, on utilisera la notation compacte :

$$F = \mathcal{F}[f] \iff f \xrightarrow{\mathcal{F}} F \quad (6.88)$$

pour désigner la transformée de Fourier. S'il est utile de préciser les variables, on écrira :

$$F(k) = \mathcal{F}[f(x)](k) \iff f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(k) \quad (6.89)$$

Avant de continuer, signalons que la définition de l'intégrale de Fourier varie d'un auteur à l'autre, un peu en fonction de sa spécialité favorite (les électriciens n'ont pas les mêmes habitudes que les probabilistes). D'abord, le signe de l'argument de l'exponentielle est purement conventionnel et on aurait pu aussi définir $F(k)$ avec e^{-ikx} . Par ailleurs, pour des raisons qui seront plus claires dans la suite, on trouve aussi des définitions ayant des facteurs additionnels²⁹. Par exemple :

$$F_1(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx , \quad F_2(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx . \quad (6.90)$$

Enfin, outre ces variations de facteur global, on trouve aussi :

$$F_3(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2i\pi\kappa x} dx . \quad (6.91)$$

²⁶Ce scénario – très intuitif – est d'usage fréquent en Physique théorique, où on passe souvent d'une représentation discrète à une représentation continue, pour l'espace par exemple. Quand on parle d'une théorie *sur réseau*, c'est juste pour dire que, par commodité, l'espace continu \mathbb{R}^d a été remplacé par un réseau discret de points \mathbb{Z}^d . Bien évidemment, l'équivalence entre les deux descriptions ne saute pas toujours aux yeux : entre \mathbb{Z}^d et \mathbb{R}^d , il y a toute (!?) la différence existant entre le dénombrable et le non-dénombrable.

²⁷Attention : au vu de (6.82), \tilde{f} a la même dimension que f . En revanche, ω étant l'inverse d'un temps, la transformée F dans (6.83) a pour dimension $[f] \times \text{temps}$.

²⁸Si x est une longueur, k est l'inverse d'une longueur, un nombre d'onde par exemple. Si la variable de f est le temps, t , on écrit tout naturellement :

$$F(\omega) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt . \quad (6.86)$$

²⁹En Mécanique quantique, c'est par une convention du genre F_1 (et avec $p = \hbar k$) que l'on passe de la représentation- q à la représentation- p et inversement.

Ces variations sont purement conventionnelles, les différentes transformées étant trivialement reliées les unes aux autres (par exemple, $F_1(k) = F_3(\kappa = \frac{k}{2\pi})$). Toutefois, une fois choisie une convention, il faut s'y tenir jusqu'au bout, notamment dans l'écriture des relations inverses qui permettent d'exprimer f en fonction de F . Dans la suite, on adopte la définition (6.87) ; il faut bien sûr savoir jongler avec les définitions en cas de besoin, et pouvoir passer rapidement de l'une à l'autre si nécessaire.

Ceci étant précisé, il convient de donner les conditions dans lesquelles une fonction donnée $f(x)$ admet une transformée de Fourier, c'est-à-dire d'énoncer les conditions dans lesquelles l'intégrale de définition (6.87) existe. Il s'agit d'une intégrale impropre qui s'étend entre $\pm\infty$, de sorte que la fonction f doit décroître assez vite à l'infini. En outre, f ne doit pas posséder de singularités trop sévères sur l'axe réel. Il s'avère que les conditions générales sont difficiles à écrire ; on se bornera ici à énoncer une condition *suffisante* d'existence, qui est presque triviale : si la fonction f est absolument intégrable³⁰, alors sa transformée de Fourier existe. En effet, on a :

$$|F(k)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) e^{ikx}| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx . \quad (6.92)$$

Par hypothèse, la dernière intégrale existe, donc $F(k)$ est bornée en module. Cette condition est suffisante mais pas nécessaire : il existe des fonctions non absolument intégrables et qui pourtant ont une transformée de Fourier, par exemple $f(x) = \frac{\sin x}{x}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty \quad \text{et pourtant} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{ikx} dx = \pi [Y(k+1) - Y(k-1)] , \quad (6.93)$$

où Y est la fonction de Heaviside³¹.

La question naturelle venant maintenant à l'esprit est la suivante : étant donné une fonction $f(x)$ admettant une transformée de Fourier conformément à (6.87), existe-t-il un moyen de retrouver $f(x)$ à partir de $F(k)$? Autrement dit, dans le droit fil de (6.88), on se pose la question de la transformation de Fourier *inverse* :

$$f = \mathcal{F}^{-1}[F] \quad \Longleftrightarrow \quad F \xrightarrow{\mathcal{F}} f , \quad (6.94)$$

L'établissement de la formule d'inversion repose sur le *théorème de la convergence dominée* dû à Lebesgue et qui s'énonce comme suit :

Soit une suite de fonctions $f_n(x)$ intégrables convergeant simplement³² vers la fonction $f(x)$. S'il existe une fonction intégrable positive $g(x)$ telle que $|f_n(x)| \leq g(x) \forall x$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx , \quad (6.95)$$

Ainsi, ce théorème stipule les conditions permettant d'échanger l'ordre des opérations intégration et limite³³. En notant $[\sharp, \flat] \equiv \sharp \flat - \flat \sharp$ le commutateur des deux opérations (comme on le fait en Mécanique quantique pour les opérateurs), le théorème précise les conditions où :

$$\left[\lim_{n \rightarrow +\infty} , \int_{-\infty}^{+\infty} \right] = 0 \quad (6.96)$$

sans rien préjuger de la convergence uniforme de la suite de fonctions $f_n(x)$.

³⁰Attention ! Dans le langage conventionnel des mathématiciens, une telle fonction est dite *intégrable*, tout simplement. En cas d'ambiguïté, mieux vaut préciser les choses : *intégrable* si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ existe, *absolument intégrable* si $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ existe. L'espace des fonctions absolument intégrables sur \mathbb{R} est traditionnellement noté $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$. Cette définition vaut aussi pour les fonctions à valeurs complexes, et c'est alors le module du nombre complexe f qu'il convient de considérer.

³¹La combinaison $Y(k+1) - Y(k-1)$ est la "fonction-porte", qui vaut 1 entre -1 et $+1$ et zéro ailleurs. La fonction $\frac{\sin x}{x}$ est appelée *sinus cardinal*.

³²ce qui signifie que pour tout x fixé, f_n calculée au point x tend vers f calculée au point x quand n tend vers l'infini.

³³On sait qu'une telle inversion est légitime pour une intégrale sur un intervalle fini et s'il y a convergence uniforme. Ici, d'une part l'intégrale est impropre, d'autre part la convergence uniforme n'est pas requise.

Montrons maintenant que la transformation inverse de Fourier s'écrit comme suit³⁴ :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{-ikx} dk . \quad (6.97)$$

Pour cela, considérons la fonction $I_n(x)$ définie par l'intégrale suivante :

$$I_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{-\frac{a^2 k^2}{n^2}} e^{-ikx} dk \quad (n \in \mathbb{N}^*) . \quad (6.98)$$

On sait déjà que, si $f(x)$ est absolument intégrable, $F(k)$ est bornée en module, $|F(k)| \leq M$ (voir (6.92)) ; supposons de plus que $F(k)$ est elle aussi *absolument intégrable*. Dès lors, l'intégrand de (6.98) est une certaine fonction $u_n(k, x)$ bornée en module par $|F(k)|$ puisque la gaussienne est positive et bornée par 1. La suite u_n convergeant vers $F(k)e^{-ikx}$, le théorème de la convergence dominée, faisant jouer par $|F(k)|$ le rôle de $g(x)$, permet alors d'écrire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{-ikx} dk . \quad (6.99)$$

Examinons maintenant d'une autre façon le second membre de (6.98). Par la définition (6.87) de F , il s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{ikx'} dx' e^{-\frac{a^2 k^2}{n^2}} e^{-ikx} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ik(x'-x)} e^{-\frac{a^2 k^2}{n^2}} . \quad (6.100)$$

où le théorème de Fubini³⁵ a été utilisé. L'intégration interne en k se fait aisément³⁶ et on trouve :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \frac{n\sqrt{\pi}}{a} e^{-\frac{a^2}{4a^2}(x-x')^2} dx' . \quad (6.102)$$

Posons $x' - x = \frac{2a}{n} \xi$; l'intégrale devient :

$$\frac{n\sqrt{\pi}}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x + \frac{2a\xi}{n}\right) e^{-\xi^2} \frac{2a}{n} d\xi = 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x + \frac{2a\xi}{n}\right) e^{-\xi^2} d\xi . \quad (6.103)$$

Il est maintenant facile de trouver la limite de cette expression quand $n \rightarrow +\infty$, en faisant l'hypothèse que la fonction f est non seulement absolument intégrable mais également bornée. En effet, $f\left(x + \frac{2a\xi}{n}\right)$ converge simplement vers $f(x)$ et l'intégrand est alors l'élément général d'une suite convergeant simplement et bornée par $|f(x)|$. Le théorème de la convergence dominée permet alors d'affirmer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x + \frac{2a\xi}{n}\right) e^{-\xi^2} d\xi = 2\sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\xi^2} d\xi = 2\sqrt{\pi} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 2\pi f(x) , \quad (6.104)$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = 2\pi f(x) . \quad (6.105)$$

Par (6.99), il en résulte :

$$2\pi f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} F(k) dk , \quad (6.106)$$

ce qui établit la formule d'inversion (6.97).

³⁴ La démonstration donnée ci-dessous est une version faible : on supposera en outre en cours de route que la fonction f est *bornée*, alors que depuis le début on la suppose seulement *intégrable*. Une fonction non bornée peut néanmoins être intégrable (penser à $x^{-\frac{1}{2}}$).

³⁵ Voir par exemple le livre de Walter APPEL section 3.4.

³⁶ Il est facile de montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2 + bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{b^2}{4\alpha}} \quad (-\pi < \arg \alpha < +\pi) . \quad (6.101)$$

À nouveau, cela vaut la peine de raisonner en physicien, en admettant sans trop d'états d'âme le raisonnement suivant. En combinant les deux formules (6.87) et (6.106), on peut écrire pour "bonne" toute fonction $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x') e^{ikx'} dx' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x') \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x'-x)} dk . \quad (6.107)$$

Se souvenant alors de la relation d'usage de la "fonction" de Dirac :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x') \delta(x' - x) = f(x) , \quad (6.108)$$

on voit que l'on a³⁷ :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x'-x)} dk = \delta(x' - x) , \quad (6.110)$$

soit :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \times e^{-ikx} dk = \delta(x) ; \quad (6.111)$$

cette relation, établie intuitivement et sans grande rigueur, montre que $\delta(x)$ est la \mathcal{F}^{-1} de la fonction égale à 1 partout. Ceci se confirme en contemplant l'égalité³⁸ $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \delta(x) dx = 1$, qui exprime le fait que $\mathcal{F}[\delta(x)] = 1$; au total :

$$\mathcal{F}[\delta(x)] = 1 , \quad \mathcal{F}^{-1}[1] = \delta(x) , \quad (6.112)$$

Plus généralement, on a :

$$\mathcal{F}[\delta(x - x_0)] = e^{ikx_0} , \quad \mathcal{F}^{-1}[e^{ikx_0}] = \delta(x - x_0) . \quad (6.113)$$

Faisant toujours fi de tout état d'âme, on en déduit les relations réciproques :

$$\mathcal{F}[e^{-ik_0x}] = 2\pi\delta(k - k_0) , \quad \mathcal{F}^{-1}[\delta(k - k_0)] = \frac{1}{2\pi} e^{-ik_0x} . \quad (6.114)$$

C'est en jouant avec ces résultats que l'on peut écrire la transformée de Fourier de la fonction de Weierstrass introduite dans la note 8 (qui est continue si $b < 1$) :

$$\mathcal{F}[\mathcal{W}(x)](k) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b^n \mathcal{F}[\cos(a^n \pi x)] = \pi \sum_{n \in \mathbb{N}} b^n [\delta(k + a^n \pi) + \delta(k - a^n \pi)] . \quad (6.115)$$

À nouveau, il s'agit d'un peigne de Dirac irrégulier, dont les amplitudes s'écrasent exponentiellement, et dont les points de concentration forment une suite convergente si $a < 1$ (là où on sait que \mathcal{W} est dérivable), ou une suite exponentiellement divergente ($a > 1$), et alors on sait que \mathcal{W} n'est nulle part dérivable.

Ces résultats permettent aussi d'établir rapidement une formule, dite *formule de sommation de Poisson*. En effet soit une fonction $f(x)$ et sa transformée de Fourier $F(k)$. On peut alors écrire, supposant satisfaites toutes les hypothèses autorisant les diverses opérations successives³⁹ :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x - na) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(x-na)} F(k) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-ikx} F(k) \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inka} ; \quad (6.116)$$

³⁷On a déjà utilisé de fait cette relation. Par ailleurs, se souvenir que δ est une "fonction" paire ; changeant k en $-k$ dans l'intégrale de (6.110), on a aussi :

$$\delta(x' - x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(-)k(x'-x)} d(-k) = \delta(x - x') . \quad (6.109)$$

La relation (6.111) peut d'ailleurs s'établir en remplaçant 1 dans l'intégrale par $e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2 k^2}$; l'intégrale gaussienne se calcule aisément et vaut $\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}$, qui est un précurseur gaussien de $\delta(x)$.

³⁸qui résulte de la règle d'usage de $\delta(x)$.

³⁹en tout premier, il faut évidemment que la série au premier membre de (6.116) soit convergente !

on retrouve le peigne de Dirac, de sorte que :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x - na) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-ikx} F(k) \sum_{p \in \mathbb{Z}} \delta(ka - p2\pi) , \quad (6.117)$$

d'où la formule de sommation de Poisson :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x - na) = \frac{1}{a} \sum_{p \in \mathbb{Z}} F\left(p \frac{2\pi}{a}\right) e^{-ip \frac{2\pi x}{a}} . \quad (6.118)$$

Cette relation peut s'interpréter comme la décomposition de Fourier d'une fonction périodique (voir la Remarque 5 ci-dessous). En particulier, pour $x = 0$, (6.118) devient :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(na) = \frac{1}{a} \sum_{p \in \mathbb{Z}} F\left(p \frac{2\pi}{a}\right) . \quad (6.119)$$

Par exemple, avec $f(x) = e^{-k_0|x|}$, donc $F(k) = \frac{2k_0}{k^2 + k_0^2}$, cette formule donne :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-|n|k_0 a} = \frac{ak_0}{2\pi^2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{1}{p^2 + \left(\frac{k_0 a}{2\pi}\right)^2} , \quad (6.120)$$

que l'on peut vérifier en sommant le premier membre (série géométrique, égale à $\cot \frac{k_0 a}{2}$), et le second par la méthode $\pi \cot \pi z$ & Co vue au ch. 4. Avec des fonctions gaussiennes⁴⁰, la formule sommatoire de Poisson donne^{41,42} :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 \lambda^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^2}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} e^{-p^2 \frac{\pi^2}{\lambda^2}} , \quad (6.123)$$

une égalité pas si évidente que cela. Elle montre notamment que si $\lambda \ll 1$, alors $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 \lambda^2} \simeq \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^2}}$, un résultat qui ne saute pas aux yeux.

Remarques

1. Il est possible de définir la transformée de Fourier d'une fonction discontinue ; par exemple, si $f(x)$ a un saut fini en $x = x_0$, sa transformée de Fourier $F(k)$ se définit naturellement comme :

$$\mathcal{F}[f](k) \equiv F(k) = \int_{-\infty}^{x_0} dx e^{ikx} f(x) + \int_{x_0}^{+\infty} dx e^{ikx} f(x) , \quad (6.124)$$

et est parfaitement définie dans l'hypothèse où chaque intégrale existe. Réciproquement, la fonction $\tilde{f}(x)$ obtenue par transformation inverse :

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-ikx} F(k) , \quad (6.125)$$

est bien définie, et coïncide avec $f(x) \forall x \neq x_0$. En x_0 , où \tilde{f} existe, la comparaison n'a pas de sens puisque $f(x_0)$ n'existe pas (l'usage est alors de dire que f et \tilde{f} sont *presque partout* égales). Tout comme pour les

⁴⁰La transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne : $\mathcal{F}[e^{-\lambda^2 x^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda^2}} e^{-\frac{k^2}{4\lambda^2}}$.

⁴¹Si $\lambda = \sqrt{\pi}$, (6.123) est une identité triviale !

⁴²Le premier membre de (6.123) est $\vartheta_3(0, e^{-\lambda^2})$ où ϑ_3 est l'une des fonctions de Jacobi, définie comme :

$$\vartheta_3(x, q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} e^{2inx} \quad (|q| < 1) ; \quad (6.121)$$

l'égalité (6.123) est ainsi équivalente à :

$$\vartheta_3(0, e^{-\lambda^2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{\lambda} \vartheta_3(0, e^{-\frac{\pi^2}{\lambda^2}}) \iff \vartheta_3(0, q) = \sqrt{\frac{\pi}{-\ln q}} \vartheta_3(0, e^{\frac{\pi^2}{\ln q}}) . \quad (6.122)$$

séries de Fourier, des exemples permettent de se convaincre que $\tilde{f}(x_0)$ est égal à la demi-somme des valeurs de $f(x)$ à gauche et à droite (voir ci-dessous). Ceci reste évidemment vrai si $f(x)$ possède un nombre fini de sauts finis

Ce type de résultat doit être manié avec prudence en Physique, puisque la notion de discontinuité résulte toujours d'une idéalisation. Le cas échéant, il convient de revenir en arrière pour préciser la nature physique de la "discontinuité" et éviter ainsi de dire des âneries⁴³.

Illustrons ce qui précède par deux exemples. Soit d'abord la fonction $f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} e^{-k_0|x|}$ ($k_0 > 0$) ; sa transformée est :

$$F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} e^{-k_0|x|} dx = \frac{2k_0}{k^2 + k_0^2} . \quad (6.126)$$

Dans ce cas, f et F sont toutes deux dans $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$. Soit ensuite l'exponentielle *unilatérale* $g(x) \stackrel{\text{déf}}{=} Y(x) e^{-k_0x}$ où $Y(x)$ est la fonction de Heaviside : $Y(x < 0) = 0$, $Y(x > 0) = 1$; la transformée de Fourier de $g(x)$ est :

$$G(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} Y(x) e^{-k_0|x|} dx = \int_0^{+\infty} e^{ikx} Y(x) e^{-k_0|x|} dx = \frac{1}{-ik + k_0} . \quad (6.127)$$

Cette fonction n'est pas dans $\mathbb{L}_1(\mathbb{R})$: le module de $G(k)$ est $(k^2 + k_0^2)^{-1/2}$ et n'est pas intégrable.

Ces deux exemples montrent bien que plus une fonction est régulière, plus sa transformée décroît vite à l'infini : $f(x)$ est continue (mais non partout dérivable), et $F(k)$ décroît comme k^{-2} . Au contraire, $g(x)$ est discontinue, et $G(k)$ décroît seulement comme k^{-1} .

Que donne la formule d'inversion de Fourier ? Pour $F(k)$, il faut calculer l'intégrale :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{2k_0}{k^2 + k_0^2} dk . \quad (6.128)$$

Par résidus, on trouve qu'elle vaut $e^{-k_0|x|}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, qui est très exactement $f(x)$, partout, conformément au résultat général exprimé par la formule d'inversion pour un couple dans $\mathbb{L}_1^2(\mathbb{R})$. Pour $G(k)$, il faut trouver l'intégrale :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \frac{1}{-ik + k_0} dk . \quad (6.129)$$

Par résidus, on trouve immédiatement qu'elle vaut 0 si $x < 0$, $e^{-k_0|x|}$ si $x > 0$. Pour $x = 0$, le calcul direct est immédiat puisque l'on connaît une primitive ; on a :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{-ik + k_0} dk = -\frac{1}{2i\pi} \ln(k + ik_0) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = -\frac{1}{2i\pi} (-i\pi) = \frac{1}{2} . \quad (6.130)$$

La formule d'inversion redonne donc une fonction presque partout égale à l'original, sauf au point de discontinuité où elle donne la demi-somme des valeurs à gauche et à droite.

2. L'existence de $\mathcal{F}[f]$ n'exige pas que f soit bornée. Par exemple, la fonction $f(x) = \ln(1 + \frac{a^2}{x^2})$ n'est pas bornée, mais a une transformée :

$$\mathcal{F} \left[\ln\left(1 + \frac{a^2}{x^2}\right) \right] (k) = \frac{2\pi}{|k|} (1 - e^{-|k|a}) . \quad (6.131)$$

Ce résultat peut s'obtenir en effectuant une intégration par parties suivie d'une intégration par résidus (la transformée est finie en $k = 0$, et vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(1 + \frac{a^2}{x^2}) dx$, comme il se doit). De même, $\frac{Y(x)}{\sqrt{x}}$ a pour transformée $e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\pi} k^{-\frac{1}{2}}$ et, plus généralement $\mathcal{F}[Y(x)x^{-\nu}](k) = e^{i(1-\nu)\frac{\pi}{2}} k^{\nu-1}$, $0 < \Re\nu < 1$ (le démontrer). Noter aussi que cette dernière fonction, quoique non (absolument) intégrable, a une transformée de Fourier ; la divergence de la transformée en $k = 0$ en est le symptôme

⁴³Par exemple, si la variable est le temps, le Principe de causalité n'est pas bien loin. Il serait stupide d'écrire qu'un certain effet $e(t)$ de la cause $f(t)$ est de la forme $C\frac{1}{2}[f(t+0) - f(t-0)]$! En pareil cas, ce qu'il faut considérer, c'est bien évidemment la limite à droite, et écrire $e(t) = Cf(t+0)$.

3. Les couples de variables x et k , ou t et ω , apparaissant dans une transformation de Fourier sont souvent appelées *variables conjuguées*. Cette terminologie est notamment fréquente en Mécanique Quantique, où x est une coordonnée et où k est un nombre d'onde associé à l'impulsion⁴⁴ p ($p = \hbar k$). Les fonctions d'onde des deux représentations- q et $-p$ sont transformées de Fourier l'une de l'autre.
4. Il est d'usage, en Physique, de parler d'espace *direct* pour désigner l'espace où se promène le point associé à la variable x , et d'espace *réciproque* pour désigner celui de la variable k – tout comme les cristallographes parlent d'espace direct et d'espace réciproque. Il est clair que ces dénominations sont relatives, et n'ont de signification que par rapport à un présupposé mental (souvent implicite)
5. La formule de sommation de Poisson, (6.118) a une interprétation simple. Le premier membre de cette égalité est en fait une certaine fonction a -périodique⁴⁵ $\varphi(x)$, car de toute évidence (on pose $n - 1 = n'$ dans la sommation) :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x - na + a) = \sum_{n' \in \mathbb{Z}} f(x - n'a) \iff \varphi(x + a) = \varphi(x) . \quad (6.132)$$

En tant que telle, $\varphi(x)$ admet une décomposition en série de Fourier :

$$\varphi(x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \varphi_p e^{ipka} . \quad (6.133)$$

La formule Poisson ne fait qu'exprimer l'existence de cette série de Fourier, et donne les coefficients $\varphi_p = \frac{1}{a} F(pk)$ où $k = \frac{2\pi}{a}$.

6.2.2 Propriétés de la transformation de Fourier

De la définition (6.87) résultent immédiatement quelques propriétés importantes en pratique. On note toujours :

$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(k) , \quad F = \mathcal{F}[f] ; \quad F(k) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f(x) , \quad f = \mathcal{F}^{-1}[F] . \quad (6.134)$$

■ **Linéarité** L'intégrale étant une opération linéaire, on a de toute évidence :

$$\mathcal{F}[\lambda f + \mu g] = \lambda \mathcal{F}[f] + \mu \mathcal{F}[g] , \quad (6.135)$$

où λ et μ sont des scalaires *constants*, c'est-à-dire indépendants de la variable x (ils peuvent évidemment dépendre d'autres variables du problème examiné).

La transformation de Fourier est donc bien adaptée à la résolution d'équations *linéaires*, mais il faut garder une chose en tête : quand on l'utilise à cette fin, on ne peut trouver par construction que des solutions ayant une transformée de Fourier. Il en résulte que si l'équation à résoudre possède des solutions n'admettant pas de transformée, on ne peut pas toujours les obtenir par ce moyen, même en s'en remettant à une forme de calcul symbolique qui permet parfois de s'en tirer – voir ci-après.

■ **Translation** Étant donné une fonction $f(x)$, sa translatée de a est par définition la fonction⁴⁶ :

$$(\mathcal{T}_a f)(x) = f(x - a) . \quad (6.136)$$

La transformée de $\mathcal{T}_a f$ est ainsi :

$$\mathcal{F}[\mathcal{T}_a f] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} f(x - a) dx = e^{ika} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx'} f(x') dx' = e^{ika} \mathcal{F}[f] . \quad (6.137)$$

⁴⁴À ce propos, toujours en Mécanique quantique, on parle plus précisément de *grandeurs incompatibles*.

⁴⁵De la même façon, toute fonction de la forme $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(t - nT)$ représente un signal T -périodique.

⁴⁶Géométriquement : on "prend" le graphe de $f(x)$ et on le déplace à droite (si $a > 0$) de a .

Cette propriété très simple (et en un sens triviale) est utilisée pour énoncer des résultats forts et importants, fondés sur l'invariance galiléenne de l'espace (physique) par translation. De même, si $f(x)$ est l'attribut d'un système ayant une symétrie de translation de a , alors on a $f(x-a) = f(x)$: il en résulte qu'alors la transformée de Fourier doit être telle que $(e^{ika} - 1)\mathcal{F}[f] = 0$, ce qui signifie que $\mathcal{F}[f] = 0$ sauf aux points tels que $ka = \text{entier} \times 2\pi$, soit $k = \text{entier} \times \frac{2\pi}{a}$. Ceci était à attendre : $f(x-a) = f(x)$ signifie que la fonction f est a -périodique et qu'elle est décomposable en série de Fourier. En pareil cas, l'intégrale de Fourier dégénère en *série* de Fourier.

Cette propriété est utile pour résoudre certaines équations.

• Exemple

Soit l'équation aux différences finies :

$$f(x) = \lambda f(x-a) \quad (6.138)$$

où $\lambda, a \in \mathbb{R}_+$. Cette équation dit que la valeur de la fonction en x est λ fois sa valeur au point décalé de a à gauche. Si $\lambda > 1$, ceci veut dire que f croît quand x augmente, le contraire se produit si $\lambda < 1$. Ceci permet de deviner peu à peu la solution de (6.138) : il y a sûrement un facteur $\lambda^{\frac{x}{a}}$ dans f ; on peut aussi ajouter un facteur périodique en a , qui ne change pas si x varie de a . En définitive, cette équation possède des solutions du genre :

$$f_n(x) = \lambda^{\frac{x}{a}} e^{in\frac{2\pi}{a}x} = e^{(\ln \lambda)\frac{x}{a}} e^{in\frac{2\pi}{a}x} . \quad (6.139)$$

L'équation étant linéaire, toute combinaison linéaire est encore solution ; il en résulte que :

$$f(x) = \lambda^{\frac{x}{a}} \sum_n C_n e^{in\frac{2\pi}{a}x} , \quad (6.140)$$

où les C_n sont des constantes quelconques, est une solution "générale" de cette équation⁴⁷ ; sa transformée de Fourier est donc un peigne de Dirac non-uniforme modulé en amplitude par les C_n et par le facteur exponentiel $e^{(\ln \lambda)\frac{x}{a}}$. Si $\lambda > 1$ ($\ln \lambda > 0$), les fonctions f_n tendent vers l'infini quand x augmente indéfiniment. Ces fonctions ne sauraient avoir une transformée de Fourier !

Que donne ici la transformation de Fourier ? En notant $F = \mathcal{F}[f]$ et appliquant la règle (6.137), l'équation se transforme en :

$$F(k) = \lambda e^{ika} F(k) \quad (6.141)$$

Cette équation dit que F est nulle partout, sauf aux points où $\lambda e^{ika} = 1$, où F est indéterminée, et qui sont de mesure nulle. La seule solution semble donc être $F = 0$. Faut-il pour autant jeter Fourier dans ce cas ? La réponse est non, à condition de relâcher un peu de rigueur, de s'en remettre au savoir-faire et de garder en tête l'aspect *symbolique* des opérations effectuées – quitte à reporter à plus tard une vraie justification. En effet, acceptant les relations (6.112) et (6.113), on peut raisonner comme suit. (6.141) dit très précisément que $F = 0$ tant que $\lambda e^{ika} \neq 1$, mais quand $\lambda e^{ika} = 1$, $F(k)$ est indéterminée. On peut donc écrire que $F(k)$ est une combinaison linéaire (avec des coefficients à trouver mais pour l'instant quelconques) des fonctions de Dirac concentrées aux zéros de $\lambda e^{ika} - 1$, soit pour les valeurs de k égales à $k_m = 2m\frac{\pi}{a} + \frac{1}{a} \ln \lambda$ ($m \in \mathbb{Z}$). En définitive, on sent que l'on peut écrire :

$$F(k) = \sum_m A_m \delta(k - k_m) , \quad (6.142)$$

où les A_m sont des constantes quelconques. En appliquant la règle d'usage de la fonction δ – et passant outre le fait que les k_m sont ici complexes (!!!) –, la formule d'inversion (6.114) incite à écrire :

$$\mathcal{F}^{-1}[F](x) = \sum_m A_m \frac{1}{2\pi} e^{-ik_m x} = \sum_m \frac{A_m}{2\pi} e^{-im\frac{2\pi}{a}x + \frac{x}{a} \ln \lambda} = \lambda^{\frac{x}{a}} \sum_m \frac{A_m}{2\pi} e^{-im\frac{2\pi}{a}x} . \quad (6.143)$$

À des notations près, ceci est bien la fonction $f(x)$ écrite en (6.140) et construite intuitivement ! •

⁴⁷J'avoue ne pas savoir si l'équation (6.138) a d'autres solutions...

■ **Modulation** Étant donnée une fonction $f(x)$, sa modulée à k_0 est par définition $e^{-ik_0x}f(x)$. On a :

$$\mathcal{F}[e^{-ik_0x}f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-k_0)x}f(x) dx = \mathcal{F}[f](k-k_0) . \quad (6.144)$$

La modulation dans l'espace direct revient donc à une translation dans l'espace réciproque – un résultat dual de celui obtenu à propos de la transformée de Fourier d'une fonction translatée. Si x est le temps t , on voit qu'un facteur oscillatoire $e^{-i\omega_0 t}$ pour $f(t)$ supplémentaire décale⁴⁸ toutes les pulsations de ω_0 pour $F(\omega)$.

■ **Dilatation** Un changement d'échelle⁴⁹ sur la variable d'une fonction $f(x)$ définit une nouvelle fonction f_λ telle que $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$. On a :

$$\mathcal{F}[f_\lambda(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}f(\lambda x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\frac{x'}{\lambda}}f(x') dx' = \frac{1}{\lambda} \mathcal{F}[f]\left(\frac{k}{\lambda}\right) . \quad (6.145)$$

Cette relation permet de découvrir une propriété semi-quantitative importante d'un couple de Fourier (f, F) . En effet, supposons pour fixer les idées que la fonction $f(x)$ a l'allure d'une courbe en cloche. Le graphe de la fonction f_λ a le même aspect mais, si $\lambda > 1$, est plus ramassé (f_λ est plus fine). Le phénomène inverse se produit de $\mathcal{F}[f]$ à $\mathcal{F}[f_\lambda]$: toujours avec l'hypothèse $\lambda > 1$, (6.145) dit que le graphe de $\mathcal{F}[f_\lambda]$ est plus large que celui de $\mathcal{F}[f]$. En définitive, plus f est étroite, plus $\mathcal{F}[f]$ est large. Si on introduit la largeur typique de f , Δx , et celle, Δk , de F , on a une relation du genre :

$$\Delta x \Delta k \sim 2\pi ; \quad (6.146)$$

le facteur 2π est certainement un peu conventionnel, mais il est d'usage. La relation (6.146), en acceptant d'anticiper $\lambda = \frac{h}{p}$, n'est autre que l'un des avatars de ce qui est usuellement désigné par *Principe d'incertitude de Heisenberg*, $\Delta x \Delta p_x \sim h$. Ces considérations sont fréquemment utilisées dans les raisonnements d'ordre de grandeur, et gardent un caractère semi-quantitatif ; par exemple, la structure précise des fonctions peut présenter des particularités qui échappent à une telle analyse : la fonction-porte a des flancs raides et bien définis, mais sa transformée de Fourier, le sinus cardinal, présente des oscillations. Il n'en demeure pas moins vrai que la fonction-porte "décroit vite" (à support borné, elle est strictement nulle au-delà de valeurs finies), alors que le sinus cardinal décroît très lentement, essentiellement comme $\frac{1}{x}$.

■ **Conjugaison**

$$\mathcal{F}[f^*] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}f^*(x) dx = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}f(x) dx \right]^* = F^*(-k) . \quad (6.147)$$

Cette propriété joue un rôle important en Mécanique quantique, dans la discussion de l'invariance par renversement du temps. Elle est également invoquée pour déterminer les propriétés de symétrie de la susceptibilité relative à une grandeur réelle.

■ **Dérivation** Un résultat très utile en pratique est le lien entre les transformées de Fourier d'une fonction et de ses dérivées ; sans surprise, on va retrouver (à des modifications de détail près) une relation du même genre que dans la présentation des séries de Fourier.

Soit une fonction dérivable $f(x)$ dont la dérivée est notée f' ; la transformée de cette dernière, dans l'hypothèse où elle existe, est par définition :

$$\mathcal{F}[f'] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}f'(x) dx . \quad (6.148)$$

⁴⁸En Mécanique quantique, où seules comptent les *différences* des pulsations, l'adjonction d'un tel facteur global ne change rien aux prévisions physiques. En un sens, c'est aussi dire qu'en Physique seules comptent les *différences* d'énergie.

⁴⁹En anglais *scaling*. Il peut s'agir d'une dilatation ou d'une contraction selon que $\lambda > 1$ ou $\lambda < 1$.

Une intégration par parties donne :

$$\mathcal{F}[f'] = [f(x)e^{ikx}]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} ik e^{ikx} f(x) dx . \quad (6.149)$$

Le terme tout intégré est nul : en supposant f simplement intégrable, nécessairement $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Il vient ainsi, avec les conventions adoptées pour la définition⁵⁰ de \mathcal{F} :

$$\mathcal{F}[f'] = (-ik) F(k) . \quad (6.150)$$

Le même travail donne ($f^{(m)}(x) = \frac{d^m f}{dx^m}$) :

$$\mathcal{F}[f^{(m)}] = (-ik)^m F(k) . \quad (6.151)$$

Ces propriétés jouent un rôle essentiel pour la résolution des équations différentielles (linéaires). Comme à l'opération de dérivation dans l'espace direct se trouve associée la multiplication par $(-ik)$ dans l'espace réciproque, une équation différentielle se transforme par Fourier en une équation *algébrique*, ce qui simplifie la résolution. Indépendamment de cette commodité technique, le passage en Fourier se prête bien à une discussion générale (causalité, stabilité des solutions, etc).

Au passage, on note que :

$$(-ik)^m F(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} f^{(m)}(x) dx \iff |F(k)| \leq \frac{1}{|k^m|} \int_{-\infty}^{+\infty} |f^{(m)}(x)| dx \quad (6.152)$$

Ainsi, plus une fonction est dérivable et à dérivées intégrables, plus sa transformée de Fourier décroît vite à l'infini⁵¹ – et inversement (avec les bonnes hypothèses sur $F(k)$) :

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2\pi|x^m|} \int_{-\infty}^{+\infty} |F^{(m)}(k)| dk \quad (6.153)$$

De telles propriétés seront brièvement rediscutées dans la section 6.3, où on verra aussi que si $f(x)$ décroît à l'infini plus vite que toute puissance x^{-n} , n entier positif (fonction dite à *décroissance rapide*), alors $F(k)$ est infiniment dérivable et :

$$F^{(m)}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^m e^{ikx} f(x) dx . \quad (6.154)$$

• Exemples

1. À titre de premier exemple, soit à résoudre l'équation :

$$f'(x) - k_0 f(x) = 0 \quad (6.155)$$

avec $f(0)$ donné, et k_0 réel, histoire de fixer les idées. Il s'agit de l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre la plus simple que l'on puisse imaginer. La solution est (trivialement !) $f(x) = f(0)e^{k_0 x}$, une fonction qui n'a visiblement pas de transformée de Fourier, quel que soit k_0 réel (et même complexe).

Prenons le problème autrement. Comme l'équation est linéaire, la transformation de Fourier est *a priori* utile : on va voir que cette approche, indéniablement iconoclaste, fournit néanmoins la solution. En posant $F(k) = \mathcal{F}[f]$, la transformation de Fourier appliquée à (6.155) donne :

$$\mathcal{F}[f'(x) - k_0 f(x)] = 0 \iff -ikF(k) - k_0 F(k) = 0 \iff (k - ik_0)F(k) = 0 , \quad (6.156)$$

compte tenu de la règle (6.150). On voit bien que l'équation différentielle a été transformée par \mathcal{F} en une équation algébrique.

L'équation (6.156) signifie que $F(k)$ est nulle tant que $k \neq ik_0$, ce qui incite à poser $F(k) \propto \delta(k - ik_0)$, sans s'arrêter au fait que la "fonction" de Dirac n'a été définie que pour les valeurs réelles de sa "variable". Ceci étant fait, et selon (6.114), il vient $f(x) \propto e^{-i(ik_0)x} = e^{k_0 x} \dots$ qui est bien la solution de (6.155) ! À nouveau, l'aspect symbolique de la "dérivation" doit sauter aux yeux⁵²

⁵⁰ Attention au signe !

⁵¹ Le même phénomène a été rencontré à propos des séries de Fourier.

⁵² Toutefois, ici encore, il ne s'agit pas d'un heureux hasard : la reformulation à l'aide de la transformation de Laplace (introduite dans le chapitre suivant) permet de justifier ces opérations symboliques sur la base d'un prolongement analytique.

2. un autre exemple, tout aussi trivial. Soit à résoudre :

$$f''(x) - k_0^2 f(x) = 0 \quad (6.157)$$

avec $f(0)$ et $f'(0)$ donnés. La solution est $f(x) = f(0) \cosh k_0 x + \frac{f'(0)}{k_0} \sinh k_0 x$. D'un autre côté, la transformée de Fourier de (6.157) est :

$$(-ik)^2 F(k) - k_0^2 F(k) = 0 \iff [k^2 + k_0^2] F(k) . \quad (6.158)$$

Le même argument suggère de dire que $F(k)$ est une combinaison linéaire de $\delta(k \pm ik_0)$, ce qui par \mathcal{F}^{-1} donne $f(x)$ sous la forme d'une combinaison linéaire de $e^{\pm k_0 x}$; à nouveau, la démarche, apparemment très désinvolte, donne de fait le bon résultat. . .

3. Considérons maintenant une équation *inhomogène*, qui montrera à nouveau qu'il n'est pas interdit de faire parfois preuve d'un peu d'audace. Soit l'équation différentielle linéaire d'ordre N :

$$\sum_{m=0}^N a_m f^{(m)}(x) = \phi(x) \quad (6.159)$$

où les a_m sont des constantes, où $f^{(m)}$ est la dérivée $m^{\text{ème}}$ de f et où $\phi(x)$ fait office de source. Prenant la transformée de Fourier de cette équation, on trouve :

$$\sum_{m=0}^N a_m (-ik)^m F(k) = \Phi(k) \iff P(k)F(k) = \Phi(k) \quad (6.160)$$

où F et Φ sont les transformées de f et ϕ , et où $P(k)$ est un polynôme de degré N en k . La grande vertu de \mathcal{F} est de transformer une équation différentielle en équation algébrique, qui se résout (en principe) à vue. Naïvement, (6.160) donne immédiatement la seule et unique solution $f_{\text{part}}(x)$:

$$F(k) = \frac{\Phi(k)}{P(k)} , \quad f_{\text{part}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{\Phi(k)}{P(k)} e^{-ikx} . \quad (6.161)$$

Visiblement, il y a quelque chose qui ne va pas : la résolution complète de l'équation (6.159) doit introduire N constantes d'intégration : où sont-elles ?

En fait, la méthode naïve a exclu tous les cas où le facteur de F dans (6.160) est égal à zéro. L'audace consiste à nouveau à considérer tous les $\delta(k - k_p)$ où les k_p sont les zéros du polynôme $P(k)$, au nombre de N selon le théorème fondamental de l'algèbre. La solution la plus générale⁵³ de (6.160) n'est pas (6.161) mais la "fonction" :

$$\frac{\Phi(k)}{P(k)} + \sum_{p=1}^N C_p \delta(k - k_p) , \quad (6.162)$$

où les C_p sont des constantes arbitraires à ce stade ; la combinaison linéaire apparaissant dans (6.162) exprime la structure d'espace vectoriel de l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Par inversion, on en déduit maintenant :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{\Phi(k)}{P(k)} e^{-ikx} + \sum_{p=1}^N \frac{C_p}{2\pi} e^{-ik_p x} . \quad (6.163)$$

Les constantes C_p jouent le rôle des constantes d'intégration et seront trouvées par inversion du système linéaire $N \times N$ obtenu en écrivant explicitement les N conditions "initiales", par exemple en résolvant le système linéaire :

$$\sum_{p=1}^N (-ik_p)^m C_p = 2\pi f^{(m)}(0) - \int_{-\infty}^{+\infty} dk (-ik)^m \frac{\Phi(k)}{P(k)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots, N-1) . \quad (6.164)$$

⁵³là, on sait bien qu'il n'y en a pas d'autre !

Tous les seconds membres sont en principe connus quand le problème est bien posé ; ce système permet donc bien de trouver toutes les constantes C_p .

On voit ainsi que la solution naïve ne donne en fait qu'une solution particulière de l'équation (notée $f_{\text{part}}(x)$), cependant que la combinaison linéaire des $\delta(k - k_p)$ donne la solution la plus générale de l'équation homogène. Au total, l'expression (6.163) correspond bien à la règle connue donnant la construction de la solution la plus générale d'une équation différentielle telle que (6.159) :

$$\text{solution générale} = \text{solution particulière} + \text{solution générale de l'équation homogène} . \quad (6.165)$$

Le jeu ci-dessus est clairement formel, notamment parce que les N racines k_p du polynôme $P(k)$ sont *a priori* des nombres complexes. . . •

Il est clair que compte tenu de la symétrie entre \mathcal{F} et \mathcal{F}^{-1} , les différentes propriétés ci-dessus ont leur équivalent dans l'autre sens⁵⁴. Par exemple, si on translate la transformée $F(k)$ d'une fonction $f(x)$, $\mathcal{T}_{k_0}F(k) = F(k - k_0)$, la transformée inverse est (comparer avec (6.137)) :

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{T}_{k_0}F] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} F(k - k_0) dk = e^{-ik_0x} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik'x} F(k') dk' = e^{-ik_0x} \mathcal{F}^{-1}[F] \quad (6.166)$$

De même :

$$\mathcal{F}^{-1}[F^{(m)}] = (ix)^m \mathcal{F}^{-1}[F] , \quad (6.167)$$

et ainsi de suite.

■ **Convolution** On définit la convolution de deux fonctions, notée $f * g$, par l'opération suivante :

$$(f * g)(x) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')g(x - x') dx' . \quad (6.168)$$

La transformée de Fourier de la convolution $f * g$ est :

$$\mathcal{F}[f * g] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x')g(x - x') . \quad (6.169)$$

Supposons que f et g sont absolument intégrables, alors la fonction $f(x')g(x - x')$ est absolument intégrable sur \mathbb{R}^2 , et le théorème de Fubini s'applique. Il en résulte que, insérant dans l'intégrand $e^{-ikx'}e^{ikx'}$:

$$\mathcal{F}[f * g] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx' e^{ikx'} f(x') e^{ik(x-x')} g(x - x') . \quad (6.170)$$

Posant $x - x' = x''$ dans la deuxième intégrale, il vient :

$$\mathcal{F}[f * g] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' e^{ikx'} f(x') \int_{-\infty}^{+\infty} dx'' e^{ikx''} g(x'') \equiv F(k)G(k) . \quad (6.171)$$

D'où le résultat important, exprimant que la transformée de la convolution est simplement le *produit* des transformées de Fourier :

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g] . \quad (6.172)$$

On peut aussi montrer que la transformée de Fourier du produit de deux fonctions est la convolution de leurs transformées de Fourier :

$$\mathcal{F}[fg] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g] \iff \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g]](t) = 2\pi f(t)g(t) . \quad (6.173)$$

⁵⁴Cette affirmation doit être nuancée, ou en tout cas être utilisée à bon escient : on sait que la transformation de Fourier ne laisse pas toujours invariantes certaines propriétés, par exemple celle d'être absolument intégrable. Affirmer que ce qui est vrai dans un sens l'est aussi dans l'autre repose pourtant sur une telle invariance.

La démonstration est beaucoup plus délicate, et on se contentera d'une "preuve" un peu sauvage. La transformée du produit est :

$$\mathcal{F}[fg] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ikx} f(x)g(x) . \quad (6.174)$$

Maintenant représentons chaque fonction par la formule de Fourier inverse ; il vient :

$$\mathcal{F}[fg](k) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} dk' e^{-ik'x} F(k') \int_{-\infty}^{+\infty} dk'' e^{-ik''x} G(k'') . \quad (6.175)$$

En rassemblant les exponentielles, il apparaît $e^{i(k-k'-k'')x}$, dont l'intégration sur x donne $2\pi\delta(k-k'-k'')$:

$$\mathcal{F}[fg](k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk' F(k') \int_{-\infty}^{+\infty} dk'' G(k'')\delta(k-k'-k'') \quad (6.176)$$

et la règle d'usage de la fonction de Dirac donne alors :

$$\mathcal{F}[fg](k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk' F(k') G(k-k') \equiv \frac{1}{2\pi} (F * G)(k) \equiv \frac{1}{2\pi} (\mathcal{F}[f] * \mathcal{F}[g])(k) . \quad (6.177)$$

• Exemples

1. Le théorème de convolution est très utile pour résoudre des équations (linéaires) où figure un noyau intégral ω , du genre :

$$f(x) = \phi(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \omega(x-x')f(x') . \quad (6.178)$$

Une telle équation dit (par son terme intégral) que la valeur de f en un point x est conditionnée par les valeurs en des points différents, l'importance des points situés dans le voisinage de x dépendant des valeurs (grandes ou petites) de $\omega(x-x')$. Si x est le temps, on parlera de système ayant de la mémoire ; si x est l'espace, il peut s'agir d'un système où les interactions ne sont pas *locales*.

L'utilité du théorème de convolution saute aux yeux dans cet exemple. En effet, avec $\mathcal{F}[f] = F$, $\mathcal{F}[\phi] = \Phi$ et $\mathcal{F}[\omega] = \Omega$, la transformation de Fourier appliquée à (6.178) donne⁵⁵ :

$$F(k) = \Phi(k) + \Omega(k)F(k) \iff F(k) = \frac{\Phi(k)}{1 - \Omega(k)} . \quad (6.179)$$

de sorte qu'une solution de (6.178) apparaît immédiatement sous la forme intégrale :

$$f_{\text{part}}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{\Phi(k)}{1 - \Omega(k)} e^{-ikx} . \quad (6.180)$$

Cette intégrale, en pratique, se calcule par résidus, en prenant en compte les singularités de $\Phi(k)$ et les zéros de $1 - \Omega(k)$. L'expression (6.180) n'est pas la solution générale de (6.178) : si on ajoute à $f_{\text{part}}(x)$ n'importe quelle solution de l'équation homogène $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \omega(x-x')f(x')$, la somme ainsi formée est encore solution de (6.178).

D'ailleurs, la méthode semble inepte dans le cas où $\phi(x) \equiv 0$, auquel cas l'équation (6.178) est homogène en f . En fait, le savoir-faire permet encore de s'en tirer. En effet, quand $\phi \equiv 0$, (6.179) devient :

$$F(k) = \Omega(k)F(k) \iff [1 - \Omega(k)] F(k) = 0 , \quad (6.181)$$

et l'on peut écrire $F(k) = \sum_p C_p \delta(k - k_p)$ où les C_p sont des constantes quelconques et où les k_p sont les zéros de $1 - \Omega(k)$; d'où, selon (6.114) :

$$f(x) = \sum_p \frac{C_p}{2\pi} e^{-ik_p x} , \quad (6.182)$$

⁵⁵On suppose toujours que toutes les fonctions admettent une transformée de Fourier. En pratique, cette hypothèse (le plus souvent implicite) peut parfois induire en erreur, en faisant passer à côté de solutions de l'équation n'ayant pas de transformée...

À titre de vérification, calculons avec cette solution le second membre de (6.178) avec $\phi \equiv 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx' \omega(x-x') \sum_p \frac{C_p}{2\pi} e^{-ik_p x'} = \sum_p \frac{C_p}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \omega(x-x') e^{-ik_p x'} e^{ik_p(x-x')} = \sum_p \frac{C_p}{2\pi} e^{-ik_p x} \Omega(k_p) . \quad (6.183)$$

Comme $\Omega(k_p) = 1$ par définition des k_p , ce second membre est bien la fonction $f(x)$ donnée en (6.182).

2. Le théorème de convolution joue également un rôle important en Traitement du signal. D'une façon générale, soit un signal $e(t)$ injecté à l'entrée d'une "boîte noire", dont le fonctionnement est supposé linéaire sur toute la gamme de fréquence. Cette boîte est caractérisée par une *fonction d'appareil*, qui exprime sa façon de réagir à un signal d'entrée de fréquence ω donnée. À la sortie, on récupère un certain signal $s(t)$. En notant par des capitales les transformées de Fourier ($E = \mathcal{F}[e]$, etc), on a :

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega - \omega') E(\omega') d\omega' . \quad (6.184)$$



Figure 6.4: Entrée et sortie d'une boîte noire.

Ici, $A(\omega)$ est une fonction caractéristique de l'appareil⁵⁶ ; la relation (6.184) exprime que l'on accumule en ω , tout ce que la boîte peut ramasser à $\omega - \omega'$. Pour une boîte parfaite, on a $A(\omega) = \delta(\omega)$, donc $S(\omega) = E(\omega)$, et $s(t) = e(t)$: le signal de sortie est alors l'exacte réplique du signal d'entrée.

En règle générale, $A(\omega)$ est une fonction de largeur typique $\Delta\omega$, normalisée à l'unité et donc de hauteur $\sim \Delta\omega^{-1}$. Si $a(t)$ est sa transformée de Fourier inverse, le théorème de convolution dit que le signal à la sortie de la boîte est $s(t) = 2\pi a(t)e(t)$. Par exemple, si $A(\omega)$ est la fonction porte $\Delta\omega^{-1}[\Theta(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}) - \Theta(\omega - \frac{\Delta\omega}{2})]$, alors $a(t) = \frac{1}{\pi t \Delta\omega} \sin \frac{t \Delta\omega}{2}$, et la relation explicite entre entrée et sortie est (voir (6.173)) :

$$s(t) = \frac{2}{t \Delta\omega} \sin \frac{t \Delta\omega}{2} e(t) . \quad (6.185)$$

Pour que le signal après la boîte soit le moins déformé possible, il faut évidemment que l'on ait $\tau \Delta\omega \ll 1$, où τ est une échelle caractéristique de variation de l'entrée $e(t)$. À la limite $\Delta\omega = 0+$ (boîte parfaite, $A(\omega) = \delta(\omega)$, $a(t) = 1 \forall t$), on a strictement $s(t) = e(t)$.

3. Traitons enfin un autre exemple, qui sera l'occasion de démontrer un résultat jouant un rôle important en Physique et en Théorie des probabilités : la convolution de deux gaussiennes est une gaussienne. Posons :

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} . \quad (6.186)$$

Ceci est la loi normale pour une variable aléatoire centrée⁵⁷ (i. e. de moyenne nulle), et d'écart-type égal à σ .

Soit maintenant la convolution de deux telles gaussiennes ; par définition :

$$(G_{\sigma_1} * G_{\sigma_2})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x')^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{x'^2}{2\sigma_2^2}} dx' . \quad (6.187)$$

⁵⁶La fonction de réponse d'un dispositif est la fonction $\chi(\omega)$ décrivant la réponse en fréquence de l'appareil : le signal de sortie est relié à l'entrée selon $S(\omega) = \chi(\omega)E(\omega)$. L'appareil est parfait s'il n'introduit aucune distorsion en fréquence, soit quand $\chi(\omega)$ est une constante (fonction parfaitement plate). Ceci est évidemment une vue de l'esprit : de façon plus réaliste χ ressemble à une fonction-porte, par exemple $\hat{\chi} = \Delta\omega^{-1}[\Theta(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}) - \Theta(\omega - \frac{\Delta\omega}{2})]$; le signal transmis sera donc d'autant meilleur que la largeur de bande $\Delta\omega$ est cette fois *grande* par rapport à τ^{-1} , où τ désigne toujours l'échelle de temps caractéristique de $e(t)$. La relation $S(\omega) = \chi(\omega)E(\omega)$ signifie que $s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t-t')e(t')dt'$, où $\chi(t) = \mathcal{F}^{-1}\hat{\chi}(\omega)$, avec $\chi(t < 0) = 0$ pour la causalité.

⁵⁷Tout ce qui va être établi se généralise immédiatement au cas d'une variable de moyenne non nulle, x_0 , en utilisant notamment le théorème de translation, et en raisonnant avec $X = x - x_0$, qui est une variable centrée.

Un calcul un peu laborieux permet de calculer explicitement l'intégrale du second membre et de montrer que⁵⁸ le résultat est :

$$(G_{\sigma_1} * G_{\sigma_2})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} e^{-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} . \quad (6.189)$$

Ce résultat s'obtient beaucoup plus rapidement avec le théorème de convolution. En effet, soit $\mathcal{G}_\sigma = \mathcal{F}[G_\sigma]$, qui se calcule aisément :

$$\mathcal{G}_\sigma(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} G_\sigma(x) dx = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2} , \quad (6.190)$$

soit :

$$\mathcal{F}[G_\sigma](k) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2} \iff \mathcal{F}^{-1}[e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2}](x) = G_\sigma(x) . \quad (6.191)$$

On note que $\mathcal{G}(k=0) = 1$, en conséquence du fait que $\int_{-\infty}^{+\infty} G_\sigma(x) dx = 1$. Le théorème de convolution permet maintenant d'écrire :

$$\mathcal{F}[G_{\sigma_1} * G_{\sigma_2}](k) = e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 k^2} \times e^{-\frac{1}{2}\sigma_2^2 k^2} = e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)k^2} . \quad (6.192)$$

Prenant alors la \mathcal{F}^{-1} :

$$(G_{\sigma_1} * G_{\sigma_2})(x) = \mathcal{F}^{-1} \left[e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)k^2} \right] = G_{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2}}(x) , \quad (6.193)$$

où la dernière égalité résulte de (6.191). Au total, on retrouve bien (6.189), venant du calcul direct de la convolution. Ainsi se trouve établi le résultat majeur : la convolution de deux gaussiennes est une gaussienne.

Il s'agit là d'un résultat très important, que l'on retrouvera dans le chapitre consacré à la Théorie des probabilités ; il s'exprimera alors de la façon suivante : la somme de deux variables aléatoires gaussiennes (indépendantes) est une variable gaussienne (on dit que la gaussienne est *stable* par l'addition⁵⁹). Par ailleurs, l'équation (6.187) peut maintenant se lire comme suit :

$$G_{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\sigma_1}(x') G_{\sigma_2}(x - x') dx' . \quad (6.194)$$

Cette relation est un cas très particulier de l'équation de chaîne de Bachelier - Chapman - Kolmogorov, qui est l'équation centrale de la théorie des processus stochastiques markoviens. •

6.3 Propriétés asymptotiques

La question est ici de toucher du doigt la relation entre les propriétés⁶⁰ à l'infini d'une fonction $f(x)$ et le comportement près de $k = 0$ de sa transformée $F(k) = \mathcal{F}[f](k)$. Il s'agit en fait de l'autre facette des résultats énoncés ci-dessus (voir par exemple (6.152), et (6.153)), concernant l'existence des dérivées $f^{(m)}$ et la décroissance de $F(k)$ à l'infini. D'un autre côté, on a :

$$F^{(m)}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} (ix)^m e^{ikx} f(x) dx \quad (6.195)$$

⁵⁸Pour des gaussiennes centrées respectivement en x_1 et x_2 , la convolution est :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} e^{-\frac{(x - \frac{x_1 + x_2}{2})^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} . \quad (6.188)$$

⁵⁹Cette propriété remarquable est le fondement d'un théorème d'importance cruciale, le théorème central limite, que l'on rencontrera au ch. 8. La loi de Gauss n'est pas la seule loi stable par l'addition.

⁶⁰Compte tenu de la symétrie intrinsèque de la transformation de Fourier, tout ce qui suit vaut aussi quand on échange simultanément f et F , et x et k – avec les réserves que l'on sait.

de sorte que :

$$F^{(m)}(0) = i^m \int_{-\infty}^{+\infty} x^m f(x) dx \quad (6.196)$$

Chacune de ces intégrales existe si $f(x)$ décroît à l'infini plus vite que $x^{-(m+1)}$. En d'autres termes, la décroissance rapide de $f(x)$ à l'infini assure l'existence des dérivées en $k = 0$ de sa transformée de Fourier

Comme déjà mentionné, il y a une dualité entre les propriétés des partenaires d'un couple de Fourier, dans l'hypothèse où les conditions d'existence sont satisfaites pour f et pour F (ce que n'assure pas le passage de f à F en général⁶¹). Deux exemples regardés en détail permettent de bien se convaincre qu'une telle relation existe.

Soit la gaussienne (normalisée) $G(x)$ définie en (6.186), et dont la transformée est $\mathcal{G}_\sigma(k)$ donnée en (6.190). Considérant l'expression intégrale de $\mathcal{G}_\sigma(k)$, on peut développer l'exponentielle e^{ikx} en série entière et intégrer terme à terme :

$$\mathcal{G}_\sigma(k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ik)^n}{n!} M_n, \quad M_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (6.197)$$

Les M_n sont appelés les *moments* de la fonction⁶², ici ce sont les moments de la gaussienne, qui sont tous définis compte tenu de la décroissance ultra-rapide de $G_\sigma(x)$ à l'infini. Par symétrie (parité de l'intégrand) seuls les moments pairs sont non-nuls⁶³ ; il faut calculer :

$$M_{2p} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{+\infty} x^{2p} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{+\infty} u^{p-\frac{1}{2}} e^{-\frac{u}{2\sigma^2}} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (2\sigma^2)^p \Gamma(p + \frac{1}{2}), \quad (6.198)$$

d'où :

$$\mathcal{G}_\sigma(k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(ik)^{2p}}{(2p)!} (2\sigma^2)^p \Gamma(p + \frac{1}{2}). \quad (6.199)$$

Sachant que⁶⁴ $\Gamma(p + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^p} (2p-1)!!$, on trouve finalement que :

$$\mathcal{G}_\sigma(k) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{k^2 \sigma^2}{2} \right)^p, \quad (6.200)$$

en accord avec (6.190), puisque ceci n'est autre que le développement en série de $e^{-\frac{1}{2}k^2\sigma^2}$. Il ne s'agissait pas de retrouver autrement ce résultat, mais de montrer que si tous les moments M_n de f existent, alors $F(k)$ est une fonction analytique admettant en tant que telle un développement en série entière de k , comme exhibé en (6.200). L'existence de tous les moments de f exige une décroissance rapide à l'infini de $f(x)$, et le développement en série entière donne aisément le comportement de $F(k)$ près de $k = 0$ ($k\sigma \ll 1$).

Comme cas extrême opposé, considérons la lorentzienne⁶⁵ (aussi appelée fonction de Cauchy) :

$$C_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2}. \quad (6.201)$$

Tous ses moments impairs de cette fonction paire sont nuls par symétrie, du moins si on les définit comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{+A} dx \frac{ax^{2p+1}}{x^2+a^2}$. En revanche, tous les moments pairs M_{2p} , $p \geq 1$ n'existent pas⁶⁶, car $C_a(x)$ décroît trop lentement à l'infini. Il est facile de calculer la transformée de Fourier ; le calcul par résidus donne immédiatement⁶⁷ :

$$C_a(k) = e^{-|k|a}. \quad (6.202)$$

⁶¹Notamment, la propriété de sommabilité en module n'est pas forcément préservée par la transformation de Fourier : la fonction-porte est absolument sommable, mais pas sa transformée de Fourier, le sinus cardinal.

⁶²Si x est considérée comme une variable aléatoire, le premier moment M_1 est la moyenne de x , l'écart quadratique de x étant la combinaison $M_2 - M_1^2$.

⁶³Bien sûr, ceci n'est vraie que pour une variable *centrée*, dont la valeur moyenne est nulle.

⁶⁴Cette relation se démontre à partir de $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ et sachant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

⁶⁵Dans les deux exemples considérés, les fonctions sont définies avec les bons facteurs conduisant à une intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ égale à 1, avec $f = G_\sigma$ et $f = C_a$. On observera que les transformées de Fourier ont corrélativement pour valeur 1 en $k = 0$.

⁶⁶Si on les définit plus précisément comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-A}^{+A} dx \frac{ax^{2p}}{x^2+a^2}$ ($p \geq 1$), on peut dire qu'ils sont tous infinis.

⁶⁷À nouveau, $C_a(k=0) = 1$ en conséquence du fait que l'intégrale de $C_a(x)$ est égale à 1.

En raison de la présence du module $|k|$, $C_a(k)$ n'est pas une fonction analytique (holomorphe) ; en particulier, il n'existe pas de développement de Taylor près de l'origine (la dérivée première est discontinue en $k = 0$!). C'est la décroissance lente de $C_a(x)$ à l'infini (cause première de l'absence des moments) qui induit une singularité à l'origine pour la transformée de Fourier. Les mêmes observations valent pour le couple de fonctions (6.131). Il apparaît ainsi que l'origine et le point à l'infini sont en quelque sorte duaux l'un de l'autre par la transformation de Fourier⁶⁸.

Bien sûr, on peut échanger les rôles. Par exemple, soit la fonction :

$$\gamma_\xi(x) = \frac{1}{2\xi} e^{-\frac{|x|}{\xi}}, \quad \mathcal{F}[\gamma_\xi] \equiv \Gamma(k) = \frac{1}{1 + \xi^2 k^2}. \quad (6.203)$$

Maintenant, c'est le tour de $f(x)$ de ne pas avoir un développement de Taylor à l'origine, lié au fait que $F(k)$ décroît trop lentement à l'infini.

Ces remarques ont en fait une portée générale, et sont à rapprocher de la majoration (6.153), qui exprime bien qu'une fonction qui décroît vite a une transformée de Fourier ayant beaucoup de dérivées – une façon commune (et un peu vague) de traduire les phénomènes observés sur les deux cas particuliers ci-dessus.

6.4 Généralisation en dimension quelconque

Jusqu'à présent, on a considéré la transformation de Fourier unidimensionnelle. La généralisation à \mathbb{R}^3 est immédiate. Soit une fonction $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{D}$, domaine de \mathbb{C} ; sa transformée de Fourier est par définition :

$$F(\vec{k}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{r}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3r. \quad (6.204)$$

L'établissement de la formule d'inversion procède essentiellement de la même façon que pour \mathbb{R} , et on trouve :

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} F(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3k. \quad (6.205)$$

De fait, les formules et/ou propriétés établies précédemment se transposent sans difficulté. En particulier :

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3k = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3k, \quad (6.206)$$

où $\delta(\vec{r})$ est définie comme⁶⁹ :

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z). \quad (6.208)$$

On vérifie aussi sans peine que :

$$\mathcal{F}[\vec{\nabla} f(\vec{r})] = -i\vec{k} \mathcal{F}[f(\vec{r})], \quad (6.209)$$

relation que l'on retrouve immédiatement en dérivant mentalement (6.205) membre à membre.

Si la fonction f possède certaines symétries – c'est-à-dire ne dépend pas explicitement en fait de toutes les coordonnées –, il est possible d'effectuer d'emblée certaines intégrations et de mettre sa transformée F sous la forme d'une intégrale impliquant alors moins de D variables. Par exemple, dans \mathbb{R}^3 ($D = 3$), si f est à symétrie

⁶⁸La même dualité sera retrouvée pour la transformation de Laplace.

⁶⁹Pour une fonction $f(\vec{r})$ bien définie en $\vec{r} = 0$ (ce qui exige que la valeur $f(\vec{0})$ est indépendante du chemin suivi pour arriver à l'origine), on vérifie que la définition de $\delta(\vec{r}) : f(\vec{0}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{r})\delta(\vec{r}) d^3r$ donne :

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r^2} \delta(r). \quad (6.207)$$

De même, dans \mathbb{R}^2 on a $\delta(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi r} \delta(r)$ et, plus généralement dans \mathbb{R}^D , $\delta(\vec{r}) = \frac{1}{S_D} \delta(r)$, où S_D est la surface de la sphère de rayon r dans \mathbb{R}^D (voir ch. 5).

L'homogénéité permet de débusquer les omissions : la définition (6.208) dit clairement que $[\delta(\vec{r})] = L^{-3}$; si l'inadvertance faisait écrire quelque chose comme $\delta(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \delta(r)$, on devrait réaliser immédiatement qu'il y a une erreur.

sphérique, c'est-à-dire ne dépend que du *module* r du vecteur \vec{r} , le choix des coordonnées sphériques s'impose. On a alors ($d^3r = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$) et, par définition (voir (6.204)) :

$$F(k) = \int_0^{+\infty} r^2 dr f(r) \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} , \quad (6.210)$$

en profitant du fait que par hypothèse $f(r)$ ne dépend pas des angles. Par ailleurs, c'est bien k (et non \vec{k}) qui figure comme argument de F puisque la symétrie sphérique de f se transporte visiblement⁷⁰ sur F . Maintenant, rien n'interdit de choisir l'axe Oz le long de \vec{k} (qui est fixé⁷¹) ; dès lors, (6.210) se réécrit comme :

$$F(k) = \int_0^{+\infty} r^2 dr f(r) \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi e^{ikr \cos\theta} . \quad (6.211)$$

L'intégrale sur ϕ se fait immédiatement et donne un simple facteur 2π ; celle sur θ est aussi immédiate et donne $\frac{2 \sin kr}{kr}$. Au total, il ne reste que l'intégrale en r et on a :

$$F(k) = \frac{4\pi}{k} \int_0^{+\infty} r dr f(r) \sin kr . \quad (6.212)$$

Comme prévu, F ne dépend que du module de \vec{k} , ce qui est bien normal, puisque la quantité $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ est un produit scalaire, donc invariant dans toute rotation simultanée de \vec{r} et \vec{k} (voir note 70).

De la même façon, dans \mathbb{R}^2 cette fois, on trouve :

$$F(k) = \int_0^{+\infty} r dr f(r) \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos\theta} d\theta \equiv 2\pi \int_0^{+\infty} dr f(r) J_0(kr) \quad (6.213)$$

où J_0 est la fonction de Bessel déjà rencontrée ($J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-in\theta} e^{ix \sin\theta} d\theta$, $n \in \mathbb{Z}$).

On rencontrera en Mécanique Quantique la relation précise entre la fonction d'onde en représentation- q , $\Psi(\vec{r}, t)$, et son image en représentation- p , $\Phi(\vec{p}, t)$; cette relation est un exemple de transformée de Fourier multidimensionnelle, qui s'écrit habituellement avec l'impulsion \vec{p} (et non pas le vecteur d'onde $\vec{k} = \hbar^{-1}\vec{p}$) ; dans \mathbb{R}^D , et avec les facteurs traditionnels dans un tel contexte :

$$\Phi(\vec{p}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{D}{2}}} \int_{\mathbb{R}^D} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{r}} \Psi(\vec{r}, t) d^D r . \quad (6.214)$$

Pour une onde plane⁷² $\Psi(\vec{r}, t) = L^{-\frac{D}{2}} e^{i\vec{k}_0\cdot\vec{r}}$, on trouve $\Phi(\vec{p}, t) = (\frac{2\pi\hbar}{L})^{\frac{D}{2}} \delta(\vec{p} - \hbar\vec{k}_0)$, comme il se doit. On vérifie sans peine que Ψ et Φ ont respectivement pour dimension (longueur) $^{-\frac{D}{2}}$ et (impulsion) $^{-\frac{D}{2}}$, en conformité avec le fait que l'intégrale du module carré de chacune de ces fonctions dans un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^D$ est un nombre, plus précisément une probabilité.

Notons aussi que le caractère transverse ou longitudinal d'un champ de vecteur, $\vec{\mathcal{A}}(\vec{r})$, se traduit très simplement à l'aide de la transformée de Fourier. En effet, soit :

$$\vec{\mathcal{A}}(k) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \vec{\mathcal{A}}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} . \quad (6.215)$$

Pour un champ transverse, on a par définition $\text{div}\vec{\mathcal{A}} = 0$, ce qui se traduit par :

$$\vec{k}\cdot\vec{\mathcal{A}}(k) = 0 \quad (\text{champ transverse}) , \quad (6.216)$$

exprimant l'orthogonalité entre $\vec{\mathcal{A}}$ et \vec{k} . Pour un champ longitudinal, $\text{rot}\vec{\mathcal{A}} = 0$, c'est-à-dire que l'on a :

$$\vec{k} \times \vec{\mathcal{A}}(k) = 0 \quad (\text{champ longitudinal}) , \quad (6.217)$$

une relation qui dit que $\vec{\mathcal{A}}$ et \vec{k} sont colinéaires.

⁷⁰La quantité $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ est un produit scalaire, donc invariant dans toute rotation simultanée de \vec{r} et \vec{k} . Quand f est à symétrie sphérique, l'intégrand ne change pas par rotation, et il en est de même de F .

⁷¹L'intégrale est un nombre qui se moque du système de coordonnées choisi pour effectuer son calcul.

⁷²où L est une certaine longueur.

6.5 Causalité et analyticité

La Physique est construite sur quelques principes, qui sont des affirmations énoncées sans autre souci de démonstration que la mise à l'épreuve expérimentale. Au fil de l'histoire, certains d'entre eux sont passés du statut de principe à celui de résultat dont la preuve découle de principes réputés plus fondamentaux, comme le Second Principe de la Thermodynamique : dans la formulation statistique, celui-ci est essentiellement une *conséquence* du postulat de base de la Mécanique statistique ( quiprobabilit  des  tats de même énergie pour un système isolé), allié à la limite thermodynamique qui assure la divergence des temps de retour.

Ici, il s'agit du Principe de causalité, qui est finalement une affirmation de bon sens : les effets ne peuvent être antérieurs aux causes, – une particule au repos ne peut être mise en mouvement qu'après l'application d'une force, le courant dans un circuit ne peut apparaître qu'après avoir fermé l'interrupteur.

D'un point de vue plus formel, soit $x(t)$ une grandeur dynamique d'un certain système soumis à une perturbation externe notée $f(t)$. Très souvent, l'effet de la perturbation peut se traduire par la relation suivante entre la cause, $f(t)$, et l'effet, $x(t)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t-t')f(t') dt' . \quad (6.218)$$

La fonction $\chi(t-t')$ s'appelle *fonction de réponse*, ou *susceptibilité*⁷³, suivant le contexte. Fondamentalement, cette relation est *linéaire*, et on peut penser qu'elle apparaît spontanément si la cause est petite, en un sens à préciser soigneusement. Ceci n'est pas toujours vrai : d'une part une telle relation peut exister indépendamment de l'intensité de la perturbation (c'est le cas pour un oscillateur harmonique – voir plus loin). D'autre part, il peut arriver que même si la cause est infiniment petite, la fonction χ n'existe pas : c'est le cas pour un système critique dont la susceptibilité est infiniment grande.

Admettons que la relation (6.218) est vraie. Le Principe de causalité exige alors que :

$$\chi(t-t') = 0 \quad \text{si } t' > t \quad \iff \quad \chi(t) = 0 \quad \forall t < 0 . \quad (6.219)$$

Il s'agit de montrer comment cette affirmation se traduit par des propriétés de la fonction χ , plus précisément par des propriétés d'analyticité de sa transformée de Fourier $\hat{\chi}$. S'il est possible de s'en tenir à un exposé formel, mieux vaut toutefois traiter un exemple précis (et universel en Physique), en l'occurrence un oscillateur harmonique amorti, quitte à généraliser mentalement les résultats de portée universelle obtenus dans ce cadre restrictif.

Pour un tel oscillateur, l'équation dynamique est :

$$m\ddot{x} = \Lambda(x, \dot{x}) - kx + F(t) . \quad (6.220)$$

x est l'abscisse mesurée à partir de la position d'équilibre, m est la masse de la particule, $-kx$ la force de rappel (on posera $k = m\omega_0^2$) ; $F(t)$ est une force extérieure pour l'instant arbitraire et c'est la réponse de l'oscillateur à cette force que l'on veut étudier. Λ est la force de frottement qui introduit l'amortissement, toujours inévitable pour les systèmes réels ; pour faire simple, on choisit un frottement *fluide* où, par définition, le freinage est proportionnel à la vitesse :

$$\Lambda = -\alpha\dot{x} \quad (\alpha > 0) . \quad (6.221)$$

Avec ces choix, l'équation (6.220) devient :

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m}F(t) \quad (\gamma = \frac{\alpha}{m} > 0) ; \quad (6.222)$$

γ a la dimension de l'inverse d'un temps.

⁷³ $\chi(t-t')$ mesure bien la façon dont le système réagit à la sollicitation représentée par $f(t)$: quand la fonction χ est petite, le système est relativement indifférent à la perturbation ; au contraire, quand χ est grand, le système "part au quart de tour" (le mot *susceptibilité* est employé dans le même sens que lorsque l'on dit d'une personne qu'elle est *susceptible*). Pour un système critique, la susceptibilité est infinie, signifiant que le système "bascule"   la plus infime sollicitation. Par ailleurs, on verra par la suite que la susceptibilité est une certaine fonction de Green, dite fonction de Green *avancée*.

La transformée de Fourier de $x(t)$ est :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{i\omega t} dt \quad (6.223)$$

et la relation inverse est :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{-i\omega t} d\omega . \quad (6.224)$$

On a aussi :

$$\dot{x} \rightarrow \mathcal{F}[\dot{x}] = -i\omega \mathcal{F}[x] = -i\omega X(\omega) , \quad \ddot{x} \rightarrow \mathcal{F}[\ddot{x}] = (-i\omega)^2 \mathcal{F}[x] = -\omega^2 X(\omega) . \quad (6.225)$$

Prenons maintenant la transformée de Fourier de (6.222). En utilisant la linéarité de cette équation, et la linéarité de la transformation intégrale de Fourier, on trouve :

$$(-i\omega)^2 X(\omega) - i\gamma\omega X(\omega) + \omega_0^2 X(\omega) = \frac{1}{m} \Phi(\omega) , \quad (6.226)$$

où $\Phi(\omega) = \mathcal{F}[F(t)]$. Dès lors (6.226) s'inverse à vue :

$$X(\omega) = \frac{1}{m} \frac{1}{-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2} \Phi(\omega) \equiv \hat{\chi}(\omega) \Phi(\omega) , \quad (6.227)$$

où ceci définit de fait la transformée de Fourier de la susceptibilité $\hat{\chi}(\omega)$:

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{m} \frac{1}{-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2} \equiv |\hat{\chi}(\omega)| e^{i\phi(\omega)} . \quad (6.228)$$

En effet, par la relation inverse de Fourier (6.224), on a :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \hat{\chi}(\omega) \Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{-i\omega t} \hat{\chi}(\omega) e^{+i\omega t'} F(t') . \quad (6.229)$$

En échangeant l'ordre des intégrations, on trouve finalement :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \chi(t-t') F(t') , \quad \chi(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} \hat{\chi}(\omega) . \quad (6.230)$$

de sorte que, selon la relation inverse (6.224), $\hat{\chi}(\omega)$ apparaît bien comme $\mathcal{F}[\chi]$.

La question importante est maintenant de montrer le lien entre analyté et causalité, plus précisément d'établir que la fonction $\chi(t)$:

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{m} \frac{e^{-i\omega t}}{-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2} \quad (6.231)$$

satisfait à la réquisition du principe de causalité $\chi(t) = 0 \forall t < 0$. On va voir que c'est bien le cas parce que $\hat{\chi}(\omega)$ est analytique dans le demi-plan supérieur⁷⁴. En effet, les zéros du dénominateur dans l'intégrand de (6.231) sont des pôles pour $\hat{\chi}(\omega)$; ils sont donnés par :

$$z_{\pm} = -i\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} . \quad (6.232)$$

Pour le frottement faible (régime sous-amorti, γ petit, plus précisément $\gamma < 2\omega_0$), la racine carrée est réelle ; dans le cas contraire (frottement fort, régime suramorti), la racine carrée est imaginaire pure. On voit cependant que dans tous les cas la partie imaginaire de chaque pôle est négative (heureusement !) :

$$\Im z_{\pm} < 0 \quad \forall \gamma, \omega_0 , \quad (6.233)$$

⁷⁴ Attention : ceci est lié explicitement aux définitions de Fourier adoptées ci-dessus. Si par exemple on prenait une autre convention en écrivant $X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$ - c'est une autre façon de faire tout aussi légitime -, alors $\hat{\chi}(\omega)$ serait analytique dans le demi-plan inférieur.

toutes les singularités (ici des pôles) de la susceptibilité $\hat{\chi}(\omega)$ sont dans le demi-plan inférieur : $\hat{\chi}(\omega)$ est bien analytique dans tout le demi-plan supérieur. Maintenant, quand $t < 0$, et en invoquant le lemme de Jordan, on peut calculer l'intégrale de (6.231) en refermant par un demi-cercle, situé dans le demi-plan supérieur. Par le théorème des résidus⁷⁵, et puisqu'il n'y a pas de pôles dans le contour ainsi formé, l'intégrale est nulle, et il vient bien $\chi(t) = 0 \forall t < 0$, en conformité avec le principe de causalité.

Quand au contraire t est positif, un calcul simple de résidus (en refermant cette fois par le demi-cercle inférieur) donne :

$$\chi(t) = \frac{1}{m} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} t\right) = \frac{1}{m} \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}} \sinh\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} t\right) \quad \forall t > 0, \gamma, \omega_0. \quad (6.234)$$

Ces deux expressions sont vraies quel que soit le signe de $\omega_0 - \frac{\gamma}{2}$, mais on peut préférer l'une ou l'autre suivant que le frottement est faible ou fort : dans le premier cas, la première expression exhibe les oscillations dont l'amplitude décroît exponentiellement, dans le second, le retour à la position d'équilibre s'effectue d'une seule traite⁷⁶, mais lentement (fluide très visqueux).

En définitive, l'écart à l'équilibre $x(t)$, après extinction des transitoires – voir la Remarque ci-dessous – et pour une perturbation quelconque $F(t)$, est donné (par exemple) par⁷⁷ :

$$x(t) = \int_{-\infty}^t dt' \frac{1}{m} \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}} \sinh\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2} (t - t')\right) F(t'). \quad (6.235)$$

Les calculs ont été faits explicitement pour un oscillateur amorti, mais le résultat majeur reste vrai : pour tout système physique, la transformée de Fourier définie avec la convention (6.223) est nécessairement une fonction analytique (holomorphe) dans le demi-plan complexe supérieur. Dans le cas général, la fonction $\hat{\chi}(\omega)$ a une forme plus compliquée mais toutes ses singularités sont dans le demi-plan inférieur puisque l'on doit toujours avoir :

$$\chi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{\chi}(\omega) e^{-i\omega t} \equiv 0 \quad \forall t < 0. \quad (6.236)$$

Par ailleurs, quand $\gamma \ll \omega_0$, le module de $\hat{\chi}(\omega)$ a un pic très prononcé tout près de ω_0 (voir fig. 6.5). Ce résultat a une autre portée générale : les *résonances* de la susceptibilité révèlent les fréquences propres du système analysé. Le plus souvent, $\hat{\chi}(\omega)$ est une fraction contenant au dénominateur la fonction de transfert $Z(\omega)$; quand Z n'a que des zéros simples, $\hat{\chi}(\omega)$ peut donc se mettre sous la forme :

$$\hat{\chi}(\omega) = \sum_{\alpha=1}^N \frac{C_\alpha}{\omega - \omega_\alpha + i\gamma_\alpha}, \quad (6.237)$$

où N est l'ordre de l'équation différentielle, et où $z_\alpha = \omega_\alpha - i\gamma_\alpha$ est l'un quelconque des pôles de $\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{Z(\omega)}$. Le coefficient C_α n'est autre que le résidu de $\hat{\chi}(z)$ au pôle z_α .

Remarque

À la réflexion, l'expression générale (6.235) est certainement en un sens incomplète : en fait, elle relève d'un tour de passe-passe. En effet, l'équation dynamique (6.222) est du second ordre en temps (comme toujours pour un système mécanique), et sa solution la plus générale *doit* contenir des constantes d'intégration arbitraires tant que les conditions initiales, par exemple position et vitesse au départ, n'ont pas été explicitement prises en compte. Or rien de tel n'apparaît dans (6.235), qui ne peut donc représenter la solution la plus générale de (6.222).

⁷⁵ou, encore plus simplement, par le théorème de Cauchy (est nulle l'intégrale sur un cycle d'une fonction partout holomorphe dans le domaine délimité par le cycle).

⁷⁶La seconde expression n'est que le prolongement analytique immédiat de la première quand la variable $\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}$ devient négative.

⁷⁷L'intégrale s'arrête à t puisque $\chi(t - t')$ est nulle pour $t' > t$.

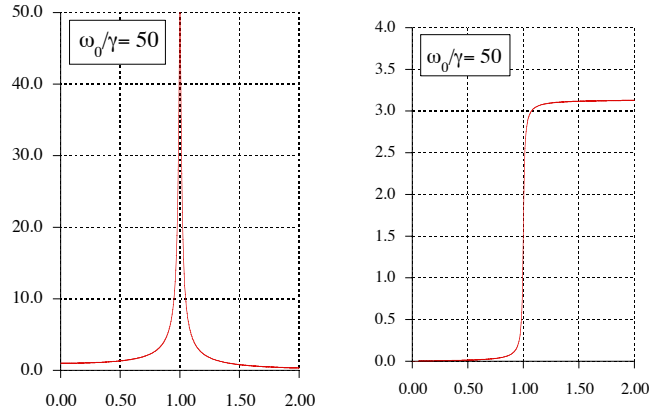


Figure 6.5: Suivant les définitions (6.228) : à gauche, module de $m\omega_0^2\hat{\chi}(\omega)$, à droite, argument $\phi(\omega)$ de $\hat{\chi}(\omega)$, dans le cas très sous-amorti ($\gamma \ll \omega_0$). L'abscisse est le rapport $\frac{\omega}{\omega_0}$.

En réalité, (6.235) représente ce que l'on appelle le *régime forcé*. Sans rentrer dans le détail, les choses se présentent en fait comme suit. À un certain instant, t_0 , où on se donne les conditions initiales x_0 et \dot{x}_0 , on branche la perturbation $F(t)$. Il en résulte que la solution générale arrive sous la forme :

$$x(t) = e^{-\gamma(t-t_0)}C(x_0, \dot{x}_0) + \int_{t_0}^t dt' \frac{1}{m} \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}} \sinh\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}(t-t')\right) F(t') . \quad (6.238)$$

Le premier terme – propre à l'équation homogène et qui survit sur un temps de l'ordre de γ^{-1} (c'est typiquement un régime transitoire) – exprime *l'oubli*⁷⁸ *des conditions initiales* : suffisamment longtemps après t_0 – et à condition que le système soit amorti –, toute trace de la position et de la vitesse initiales est en pratique effacée, et seul subsiste le régime forcé obtenu auparavant. Formellement, ceci est strictement vrai quand on prend la limite $t_0 \rightarrow -\infty$ dans (6.238).

En définitive, le régime forcé, solution obtenue un peu par inadvertance, est en réalité le régime pertinent physiquement, une fois éteints les transitoires inévitables consécutifs au branchement de la perturbation, mais à la condition essentielle que le système soit amorti. Sa pertinence physique est bien sûr tributaire de l'existence d'une échelle de temps τ dûment caractérisée et à la nature de la loi de relaxation, ici exponentielle.

6.6 Relations de Kramers - Kronig

À la suite de l'exemple traité ci-dessus en détail, cela vaut la peine de revenir un instant sur les relations de Kramers - Kronig, déjà introduites au ch. 4, compte tenu de leur rôle important en Physique par le lien explicite qu'elles mettent en évidence entre les parties réelle et imaginaire de la transformée de Fourier d'une susceptibilité. Avec les définitions de la section 6.5, on vient de voir que la fonction $\hat{\chi}(\omega)$ est analytique dans le demi-plan supérieur. Pour cette raison, l'intégrale le long d'un contour sur l'axe réel contournant la singularité en ω_0 en l'excluant, et refermé par le haut, est égale à zéro (pas de pôle, pas de résidu – voir fig. 6.6) :

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\chi}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega - i\pi\hat{\chi}(\omega_0) = 0 . \quad (6.239)$$

À des notations près, cette relation a déjà été obtenue au ch. 4. En introduisant les parties réelle et imaginaire de $\hat{\chi}(\omega) = \hat{\chi}_1(\omega) + i\hat{\chi}_2(\omega)$, et en écrivant (6.239) sous la forme de deux équations réelles en séparant parties

⁷⁸Cette amnésie n'est pas présente pour les systèmes dits chaotiques.

réelle et imaginaire, il vient⁷⁹ :

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\chi}_1(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega = -\pi \hat{\chi}_2(\omega_0) , \quad \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{\chi}_2(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega = \pi \hat{\chi}_1(\omega_0) . \quad (6.241)$$

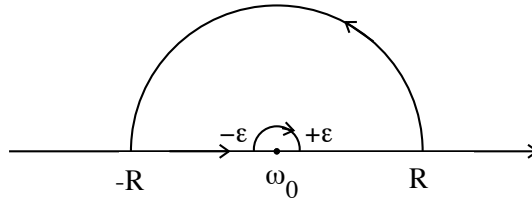


Figure 6.6: Contour d'intégration pour établir les relations de Kramers - Kronig. ($R \rightarrow +\infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$)

Ces relations sont importantes en pratique pour la raison suivante. On peut montrer que l'absorption d'énergie d'un système excité par un champ monochromatique de pulsation ω_0 est proportionnelle à la partie imaginaire d'une certaine fonction de réponse⁸⁰ $\hat{\chi}_E$ à la pulsation du champ, soit $\hat{\chi}_{E,2}$. Il est en général facile de mesurer une telle absorption, donc de déterminer expérimentalement la fonction $\hat{\chi}_{E,2}(\omega)$. Ceci étant fait, la deuxième relation (6.241) permet d'en déduire la partie réelle par transformation intégrale. Bien sûr, la qualité de la fonction $\hat{\chi}_{E,1}$ ainsi trouvée dépend crucialement de la finesse de la grille expérimentale (bonne résolution en pulsation) et de l'amplitude de l'intervalle de mesure (large bande).

Dans l'exemple traité dans la section 6.5, la susceptibilité est donnée par (6.227) et on a :

$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} + i \frac{1}{m} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \equiv \hat{\chi}_1(\omega) + i \hat{\chi}_2(\omega) . \quad (6.242)$$

La partie imaginaire a l'allure d'une courbe en cloche, bien piquée en ω_0 si $\gamma \ll \omega_0$ (résonance marquée si frottement faible, avec une largeur $\Delta\omega \sim \gamma \ll \omega_0$). Au contraire, la partie réelle change de signe en s'annulant en $\omega = \omega_0$. Il est facile de vérifier directement (par un calcul d'intégrales réelles) que les relations de Kramers - Kronig sont satisfaites par la fonction $\hat{\chi}(\omega)$.

⁷⁹La transformation :

$$f(x) \rightarrow f_H(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathcal{D}} \frac{f(x')}{x' - x} dx' \quad (6.240)$$

porte le nom de transformation de Hilbert. C'est pourquoi on dit que les parties réelle et imaginaire d'une fonction de réponse sont (essentiellement) transformées de Hilbert l'une de l'autre.

⁸⁰Ceci sera démontré au ch. 9, à propos des fonctions de Green.