Mention "Physique" de la
Licence de Sciences et Technologies
(L3)

Parcours "Physique Fondamentale" (PF)
(Année 2004/2005)

Mathématiques pour physiciens

(LP311)

Claude ASLANGUL

Préambule

Ce cours ne prétend en aucune façon être un cours de mathématiques, mais vise à familiariser les étudiants en Licence de physique avec les méthodes et les techniques mathématiques sans la maîtrise desquelles la physique d'aujourd'hui tout simplement n'existerait pas. Cette ambition limitée – qui peut sembler modeste aux yeux de certains puristes – n'en fera pas pour autant un catalogue de recettes énoncées sans démonstration : on s'efforcera de trouver l'équilibre entre la rigueur et l'intuition, n'hésitant pas à donner des versions "faibles" de vraies démonstrations de théorèmes grâce à l'utilisation d'hypothèses contraignantes, adoptées dans le seul but de maintenir la démonstration à un niveau relativement élémentaire, en tout cas largement suffisant pour les préoccupations usuelles du physicien.

L'émergence et la construction des théories physiques "modernes" (par exemple la Relativité, la Mécanique quantique) auraient été impossibles sans le recours à des concepts ou des outils mathématiques assez élaborés et très puissants. Cette nécessité s'était déjà imposée au XIX$^{\text{ème}}$ siècle pour l'Électromagnétisme (et sa cohorte d'équations aux dérivées partielles) et la Mécanique statistique dont Boltzmann peut être considéré comme le père-fondateur. Au XX$^{\text{ème}}$ siècle, l'analyse complexe a débarqué en force : jusque là cantonnés au rôle d'outils commodes (mais à tout prendre pas absolument nécessaires), les nombres complexes sont devenus l'expression la plus naturelle de la spécificité quantique – et de ses étrangetés.

Il est certain que Mathématiques et Physique sont deux disciplines intellectuelles très proches, comme en témoignent non seulement leur histoire et leur développement au fil des siècles, mais aussi les échanges fructueux et les enrichissements qu'elles se sont mutuellement apportés. C'est un fait que les théories physiques s'écrivent presque spontanément en termes mathématiques – au point que certains considèrent les mathématiques comme le *"langage de la nature"*, pour reprendre l'expression de Galilée – et que les grands principes physiques y trouvent une expression naturelle et lumineuse. Par exemple, le principe de causalité impose des propriétés analytiques remarquables aux fonctions de réponse d'un système, comme on le verra.

Toutefois, la démarche du mathématicien et celle du physicien (toutes deux fondées sur l'intuition contrairement à ce qui est parfois prétendu) sont de natures très différentes, en simple conséquence des objectifs poursuivis par l'un et l'autre. La physique est une science expérimentale qui, partant des observations, énonce des *lois* ayant le statut de *principes* à partir desquelles toute théorie physique est construite ; une théorie physique est, à un instant donné, considérée comme exacte si elle permet de rendre compte de tous les phénomènes observés et sa fécondité se situe réellement dans son aptitude à prévoir de nouveaux phénomènes non encore observés. On peut dire que la prévison théorique d'un effet inconnu jusqu'alors, la suggestion d'une expérience permettant de l'observer . . . et son observation de fait constituent le menu royal du physicien.

Le mathématicien ne saurait s'en remettre à l'expérience au sens où l'entend le physicien, et introduit ou manipule des concepts sans se soucier de leur mise à l'épreuve expérimentale, et pour cause puisque la plupart d'entre eux sont par nature inaccessibles à l'expérience[1]. La notion d'infini (même le plus petit d'entre eux, le cardinal des entiers naturels), la notion de nombre irrationnel, ..., ne sauraient faire l'objet d'une quelconque quête de vérification expérimentale, et c'est ce qui a tant troublé les Anciens, les Grecs notamment : on aura beau remplacer la diagonale d'un carré de côté de longueur unité par une succession de petits segments formant un escalier autour de la diagonale, la somme des longueurs des segments formant l'escalier sera toujours égale à 1, alors que la diagonale a pour longueur $\sqrt{2}$. En la circonstance, ce qui est impossible à réaliser expérimentalement c'est ce que le mathématicien appelle *passer à la limite*. On peut dire que la notion d'infini est hors de portée pratique du physicien, ce qui ne l'empêche évidemment pas faire le saut conceptuel et de la manipuler effectivement, quand il sait (pour de bonnes raisons) qu'il peut le faire.

Si la notion d'infini échappe au physicien dans ses tests expérimentaux, il en va de même de la notion de zéro : le physicien considère comme nulle (et non avenue) toute "perturbation" dont les effets se situent en-decà de ses capacités observationnelles, ou toute grandeur physique pour laquelle on a su trouver expérimentalement une borne supérieure très petite : si on déclare *nulle* la masse du photon ou la charge du neutron (par exemple), c'est d'une part parce que les théories construites avec ces hypothèses sont en accord avec l'expérience, d'autre part parce que l'on a pu trouver expérimentalement des bornes supérieures incroyablement petites. De même, dans la construction d'un modèle physique[2], on déclare (plus ou moins explicitement) que certains effets sont négligeables, ce qui revient à les annuler strictement à zéro.

L'une des démarcations les plus indiscutables entre l'univers du physicien et celui du mathématicien tient sans doute au fait que le premier a *toujours* à sa disposition des *échelles* pour les grandeurs physiques pertinentes du problème considéré : échelles de temps, de longueur, d'énergie, *etc.* C'est par rapport à ces échelles que se situent le zéro et l'infini du physicien : pour la physique atomique, la taille de notre galaxie est réellement "infinie", cependant que pour les phénomènes se situant dans le domaine d'énergie[3] de l'eV, le noyau atomique peut être considéré comme ponctuel[4] (de rayon nul). Au contraire, pour l'astrophysicien qui étudie l'univers à grande échelle, notre galaxie est un objet "microscopique", cependant que pour l'expert en *gluons* et *quarks*, un noyau est à lui seul un véritable univers. De la même façon, le temps de (quasi-)récurrence d'un système macroscopique est exponentiellement grand, mais en toute rigueur fini : c'est pourquoi le physicien énonce le Second Principe, légitimé par le fait qu'un intervalle de temps $\sim 10^{10^{23}}$ fois l'âge de l'univers est réellement pour lui inaccessible, tout comme l'infini au sens commun est et restera toujours hors de portée.

Ce sont ces distinctions qui permettent de légitimer une approche pragmatique des mathématiques à l'usage des physiciens, où l'introduction de certains nouveaux concepts en tant que résultats de passage à la limite au sens du mathématicien n'est pas toujours à proprement parler indispensable. L'exemple le plus simple venant à l'esprit est sans doute la notion de *distribution*, nécessaire en toute rigueur pour l'Électrostatique, laquelle pourtant n'a pas dû attendre (heureusement !) les années 1950 pour trouver son achèvement, et pour la Mécanique quantique mais cela n'a pas empêché Dirac de formuler l'électrodynamique quantique dès 1928. En fait, le bien-fondé de l'approche physique des mathématiques repose sur l'hypothèse que le physicien n'a pas perdu la raison, rassuré par la certitude que s'il fait des bêtises, il va trouver des âneries ! Par exemple, la "fonction" de Dirac n'est que l'idéalisation conceptuelle d'une vraie et bonne fonction $\delta_\varepsilon(x-x_0)$ de largeur ε très étroite (à l'aune de la bonne échelle, précisément), d'intégrale unité, et qui, associée à une fonction $f(x)$ à variation lente, extrait précisément la valeur de la fonction au point de concentration :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta_\varepsilon(x-x_0)\,\mathrm{d}x \;\simeq\; f(x_0) \tag{1}$$

Ceci n'est vrai que dans la mesure où, si Δx est l'échelle de variation significative de f, l'inégalité $\varepsilon \ll \Delta x$ est vérifiée pour le problème considéré ; ceci étant, le physicien n'a pas vraiment besoin de connaître la théorie des distributions pour écrire l'égalité approchée (1), qui est en fait une simple trivialité, et se borne à admettre la règle opérationnelle de la "fonction" de Dirac $\delta(x-x_0)$:

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x \;=\; f(x_0) \qquad (a < x_0 < b) \ . \tag{2}$$

[1]Par exemple, s'agissant de prouver la véracité d'une propriété fonction du cardinal $N \in \mathbb{N}$ d'un certain ensemble, on peut faire l'expérience avec un ordinateur, qui va examiner systématiquement les valeurs successives de N. Aussi puissant que soit l'ordinateur, il ne pourra jamais considérer qu'un nombre maximum N_{max}. Ceci ne démontrera jamais que la propriété est vraie $\forall\, N \in \mathbb{N}$.

[2]Il n'est pas exagéré de dire que l'art du physicien est de construire les (bons) modèles pour rendre compte des observations.

[3]1 eV $\simeq 1,6 \times 10^{-19}$ J.

[4]L'ordre de grandeur du "rayon" des noyaux est le Fermi (1 F $= 10^{-15}$ m).

Dans le même ordre d'idées, à propos des rappels sur les séries de Fourier, on "démontrera" la relation[5] :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}^{inx} \;=\; 2\pi \sum_{p\in\mathbb{Z}} \delta(x-2p\pi) \tag{3}$$

qui joue un rôle important dans les problèmes de diffraction (condition de von Laue, équivalente à la condition de Bragg $n\lambda = 2d\sin\theta$).

Autre exemple, relatif à la notion de fonction périodique. Pour le mathématicien, cette notion est définie sans ambiguïté : une fonction $f(t)$ est T-périodique s'il existe un réel[6] T tel que $f(t+T) = f(t)$. En soi, cette affirmation contient le fait que la fonction f est non nulle de $t = -\infty$ à $t = +\infty$. Pour le physicien, ce simple fait est une vue de l'esprit : si t est le temps, toute fonction $g(t)$ représente un phénomène de durée forcément finie ; ainsi, les fonctions manipulées par le physicien ne sont jamais *stricto sensu* périodiques. Par exemple, la fonction égale à $\sin(2\pi t/T)$ si $0 \leq t \leq \tau$ et nulle ailleurs sera considérée en Physique comme périodique si sa durée τ est grande par rapport à la période T (autrement dit, on a le temps de compter un grand nombre de périodes avant l'extinction). De façon plus quantitative, la transformée de Fourier sera considérée comme quasi monochromatique[7] si $\delta\omega \sim \tau^{-1}$ est très petit devant la résolution en pulsation disponible (expérimentalement ou dans l'intellect du physicien) : ici encore, une échelle (la résolution spectrale) permet au physicien de faire le saut conceptuel à propos d'objets qui *ne sont pas* strictement ceux qu'a définis le mathématicien.

Un dernier exemple. L'équation de Newton :

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} \;=\; \vec{F} \tag{4}$$

n'a jamais été démontrée par personne. La seule chose avérée (expérimentalement !) est que si l'on fait des mesures entre deux instants t et $t+\delta t$, la trajectoire construite par la succession des points discrets, relevés expérimentalement, s'inscrit sur la courbe continue déduite de (4). Bien sûr, la technologie aidant, on sait diminuer δt, mais il sera toujours *fini*, dans toute expérience, et ne sera jamais le dt du mathématicien. Si le physicien recourt à la forme limite (4), c'est juste parce qu'il sait intégrer les équations différentielles, et qu'il est beaucoup plus simple techniquement de procéder ainsi plutôt que de faire les calculs avec des accroissements finis[8]. C'est aussi et surtout parce qu'aucune expérience n'est venue démentir (4) au sens où, à partir d'un δt trop petit, les points expérimentaux se seraient écartés de la ligne continue déduite de (4). Si un jour on découvre qu'il faut discrétiser temps et espace[9] en-dessous de certains δr et δt, alors il faudra – au moins à ces échelles – renoncer à des écritures différentielles comme celles employées dans (4).

S'agissant d'exposer des méthodes pour physiciens, on s'efforcera de montrer d'emblée en quoi les concepts et/ou les outils introduits trouvent leur application naturelle en Physique, laquelle a d'ailleurs souvent ouvert des voies aux mathématiciens[10]. Par ailleurs, lorsqu'il s'agira d'illustrer des résultats importants (ou des curiosités), on essaiera précisément de choisir un exemple physique concret.

Les notations utilisées respecteront les usages ; par exemple, x désignera le plus souvent l'argument d'une fonction et, de ce fait, est un *nombre pur* (*i. e.* un être mathématique bien défini en l'absence de toute référence à une *unité*). Au contraire, toutes les grandeurs physiques ont une *dimension* (masse, longueur, temps, *etc*). Il en résulte que l'argument de toute fonction intervenant dans un problème physique doit être sans dimension[11] : écrire $\sin x$ quand x est une longueur n'a pas de sens (si on passe des mètres aux millimètres, la valeur de la fonction change !). En revanche $\sin(\frac{x}{x_0})$, où x_0 est une autre longueur du problème, est parfaitement sensé. De même $\mathrm{e}^{-\gamma t}$ où t est le temps et γ l'inverse d'un temps, est parfaitement légitime alors que, dans les mêmes circonstances, e^{-t} est absurde.

[5] où x est un nombre, pas une grandeur physique ayant une dimension.

[6] Il existe évidemment des fonctions périodiques dont la période est un nombre complexe. La restriction n'est ici que pour la clarté de l'argument.

[7] et dans les calculs on introduira justement des fonctions de Dirac $\delta(\omega \pm \omega_0)$, avec $\omega_0 T = 2\pi$, qui ne sont que l'idéalisation de fonctions très étroites $\delta_{\delta\omega}(\omega \pm \omega_0)$.

[8] . . . ce que l'on fait toujours, en revanche, quand on utilise une procédure de résolution ou de simulation numérique.

[9] Ce que semblait penser Schrödinger à la fin de sa vie. Si de tels quantums d'espace et de temps existent, ils sont en-deçà de toutes les capacités actuelles d'observation.

[10] Par exemple, pour sa formulation de la Mécanique quantique (*Mécanique des matrices*, 1925), Heisenberg a introduit (apparemment sans se poser de question) des espaces vectoriels de dimension infinie dénombrable, dont la théorie a été faite ultérieurement, essentiellement par Hilbert.

[11] L'usage (trop fréquent) consistant à poser $\hbar = m = c = \ldots = 1$ est une source de confusion.

Terminons ce préambule en laissant la parole à l'un des plus grands mathématiciens, Émile Borel, qui, dans son livre *Le Hasard* et à propos de la notion de probabilité, s'exprime en des termes dont chaque mot peut être pesé :

> *"Toute probabilité concrète est en définitive une probabilité statistique définie seulement avec une certaine approximation. Bien entendu, il est loisible aux mathématiciens, pour la commodité de leurs raisonnements et de leurs calculs, d'introduire des probabilités rigoureusement égales à des nombres simples, bien définis*[12] *:* **c'est la condition même de l'application des mathématiques à toute question concrète** *; on remplace les données réelles, toujours inexactement connues, par des valeurs approchées sur lesquelles on calcule comme si elles étaient exactes : le résultat est approché, de même que les données".*

[12] C'est nous qui forçons le trait.

Quelques références

1. Walter APPEL, *Mathématiques pour la physique et les physiciens* (H & K Éditions, Paris, 2002)
2. Jean BASS, *Cours de mathématiques* (Masson, Paris, 1968)
3. Carl M. BENDER et Steven A. ORSZAG, *Advanced Mathematical Methods For Scientists And Engineers* (McGraw-Hill, Singapour, 1984)
4. Hubert KRIVINE, *Exercices de mathématiques pour physiciens* (Cassini, Paris, 2003)
5. Mikhaïl LAVRENTIEV et Boris CHABAT, *Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe* (Éditions Mir, Moscou, 1972)
6. Jon MATTHEWS et R. L. WALKER, *Mathematical Methods of Physics* (Benjamin, New York, 1965)
7. N. PISKOUNOV, *Calcul différentiel et intégral*, tomes I et II, (Éditions Mir, Moscou, 1970)
8. Laurent SCHWARTZ, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques* (Hermann, Paris, 1968)