Chapitre 1

Fonctions d'une variable complexe

Le but de ce chapitre est d'une part de rappeler
les règles élémentaires de l'algèbre des nombres complexes,
d'autre part d'établir les conditions nécessaires et suffisantes
de l'existence de la dérivée d'une fonction d'une variable complexe
(conditions de Cauchy)

1.1 Rappels des opérations élémentaires sur les nombres complexes

Toute l'algèbre des nombres complexes (dont l'ensemble est noté $\mathbb{C}$) repose l'existence postulée d'un nombre fondamental noté i dont la seule et unique propriété extraordinaire est que son carré est égal à -1 :

$$\mathrm{i}^2 = -1 \ . \tag{1.1}$$

Une fois admis ceci, un nombre complexe quelconque, z, est par définition un nombre construit en combinaison linéaire à coefficients réels de 1 et de i :

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \ : \quad z = a \times 1 + b \times \mathrm{i} \ , \qquad a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

ce que l'on note plus simplement :

$$z = a + \mathrm{i}b \ . \tag{1.3}$$

Toutes les opérations (addition, multiplication) sont commutatives. a est appelé partie réelle de z, b est la partie imaginaire de z, ce que l'on notera :

$$a = \Re z \ , \qquad b = \Im z. \tag{1.4}$$

Deux nombres complexes sont dits égaux s'ils ont même partie imaginaire *et* même partie imaginaire :

$$z_1 = z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \text{et} \quad y_1 = y_2 \ . \tag{1.5}$$

Le nombre complexe égal à zéro est celui dont les parties réelle et imaginaire sont toutes deux nulles :

$$z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{et} \quad y = 0 \ . \tag{1.6}$$

Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est dit *imaginaire pur*, un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est un nombre réel "ordinaire".

Visiblement, les nombres 1 et i jouent dans (1.2) le même rôle que deux vecteurs orthonormalisés $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et l'on voit tout de suite que l'ensemble $\mathbb{C}$ va pouvoir être muni d'une structure d'espace vectoriel à deux dimensions sur le corps des réels : de ce point de vue, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ sont isomorphes, et dans ce contexte on dit de $\mathbb{R}^2$ qu'il est le *plan complexe*. Le nombre complexe z est ainsi représenté dans le plan par un point désigné[1] par

[1] Dans la mesure du possible, on essaiera de maintenir des notations systématiques : z est l'affixe de m , Z est celle de M, *etc.*

m dont les coordonnées, par rapport à un repère orthonormé, sont précisément a et b, et on dit que z est l'*affixe* m. D'où la notation systématique, un repère orthonormé (Ox, Oy) étant défini :

$$z = x + \mathrm{i}y \ , \qquad x \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R} \ . \tag{1.7}$$

Deux nombres complexes égaux sont représentés par le même point du plan. En pratique, pour ne pas alourdir les notations et quand aucune confusion n'est possible, on assimilera le plus souvent un nombre z et son point représentatif m.

L'équation (1.3) contient l'opération $\mathrm{i} \times b$, multiplication du nombre fondamental i et d'un réel b. Ce dernier est sur l'axe Ox à l'abscisse b alors que le nombre $\mathrm{i} \times b$ est sur l'axe Oy à la cote b. D'où l'interprétation géométrique de la multiplication par i :

$$\text{multiplication par i} \qquad \longleftrightarrow \qquad \text{rotation de } +\tfrac{\pi}{2} \text{ dans le plan } \mathbb{R}^2 \ . \tag{1.8}$$

De même, le carré de i, est associé au produit de deux rotations de $\pi/2$, c'est donc une rotation de π – et en effet comme $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^2 b$ est l'affixe du point symétrique représentant le réel b, qui de l'autre côté de l'origine O. Plus généralement, $\mathrm{i}^2 z = -z$ est l'affixe du point image de celui associé à z dans la symétrie par rapport à l'origine.

L'existence de i étant admise, et avec elle les nombres définis par (1.7), il est naturel de généraliser pour ces nombres les opérations usuelles de l'algèbre élémentaire. La définition de l'addition est déjà embryonnaire dans la définition (1.7), qui additionne un réel et un nombre imaginaire pur. Plus généralement, la somme (addition) de deux nombres complexes est tout naturellement ($Z = X + \mathrm{i}Y$) :

$$Z = z_1 + z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad X = x_1 + x_2 \ , \qquad Y = y_1 + y_2 \tag{1.9}$$

La soustraction s'en déduit par $z_1 - z_2 \equiv z_1 + (-z_2)$. Géométriquement, si z_p est l'affixe de m_p et Z celle de M, la définition de l'addition des complexes, (1.9), montre que :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{Om}_1} + \overrightarrow{\mathrm{Om}_2} \tag{1.10}$$

La multiplication de deux nombres complexes s'obtient en utilisant les règles usuelles de distributivité ($z_p = x_p + \mathrm{i}y_p$) :

$$z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = x_1x_2 + \mathrm{i}(x_1y_2 + y_1x_2) + \mathrm{i}^2 y_1y_2 \ , \tag{1.11}$$

soit :

$$z_1 z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(x_1y_2 + y_1x_2) \ , \tag{1.12}$$

d'où :

$$\Re(z_1z_2) = x_1x_2 - y_1y_2 \ , \qquad \Im(z_1z_2) = x_1y_2 + y_1x_2 \ . \tag{1.13}$$

La multiplication étant définie, la division l'est tout autant :

$$Z = \frac{z_1}{z_2} \quad \Longleftrightarrow \quad Zz_2 = z_1 \ . \tag{1.14}$$

Avec toujours $Z = X + \mathrm{i}Y$, il vient d'après (1.13) :

$$x_1 + \mathrm{i}y_1 = Xx_2 - Yy_2 + \mathrm{i}(Xy_2 + Yx_2) \ , \tag{1.15}$$

d'où :

$$Xx_2 - Yy_2 = x_1 \ , \qquad Xy_2 + Yx_2 = y_1 \ . \tag{1.16}$$

Il s'agit d'un système linéaire inhomogène 2×2 en X et Y dont la solution est :

$$X = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \ , \qquad Y = \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \ . \tag{1.17}$$

Ce résultat peut aussi s'obtenir en effectuant en multipliant haut et bas le rapport z_1/z_2 par z_2^* – c'est d'ailleurs la bonne façon de faire en pratique :

$$Z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + \mathrm{i}(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \ . \tag{1.18}$$

On appelle *conjugué* de z le nombre, noté[2] z^*, qui a même partie réelle et dont la partie imaginaire est changée de signe :

$$z \,=\, x + \mathrm{i}y \ , \qquad z^* \,=\, x - \mathrm{i}y \ . \tag{1.19}$$

De cette définition résulte immédiatement :

$$x \,\equiv\, \Re z \,=\, \frac{1}{2}(z + z^*) \ , \qquad y \,\equiv\, \Im z \,=\, \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - z^*) \ . \tag{1.20}$$

Géométriquement, z^* et z sont les affixes des points se transformant l'un dans l'autre par la symétrie-miroir définie par l'axe Ox. En posant $z_p = x_p + \mathrm{i}y_p$ ($p = 1,\, 2$), on voit que :

$$(z_1 + z_2)^* \,=\, z_1^* + z_2^* \ , \qquad (z_1 z_2)^* \,=\, z_1^* z_2^* \ . \tag{1.21}$$

Le produit d'un complexe et de son conjugué est remarquable :

$$zz^* \,=\, (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) \,=\, x^2 - (\mathrm{i}y)^2 \,=\, x^2 + y^2 \ . \tag{1.22}$$

C'est donc un nombre réel positif, nul seulement quand $z = 0$. La quantité $\sqrt{x^2 + y^2}$ est le *module* de z, noté $|z|$:

$$|z| \,=\, \sqrt{x^2 + y^2} \,=\, \sqrt{zz^*} \ . \tag{1.23}$$

Pour deux nombres z_p ($p = 1,\, 2$), le produit $z_1 z_2$ a pour module carré :

$$|z_1 z_2|^2 \,=\, z_1 z_2\, (z_1 z_2)^* \,=\, z_1 z_1^* z_2 z_2^* \,=\, |z_1|^2\, |z_2|^2 \ , \tag{1.24}$$

d'où :

$$|z_1 z_2| \,=\, |z_1|\, |z_2| \ . \tag{1.25}$$

En particulier :

$$\left|\frac{1}{z}\right| \,=\, \frac{1}{|z|} \ . \tag{1.26}$$

Géométriquement, $|z|$ est la distance entre son point représentatif m et l'origine O du plan complexe. Compte tenu de l'interprétation géométrique de la somme de deux complexes, (1.10), il en résulte immédiatement l'inégalité triangulaire :

$$|z_1 + z_2| \,\le\, |z_1| + |z_2| \tag{1.27}$$

qui exprime le fait que dans un triangle la longueur d'un côté est inférieure ou égale à la somme des deux autres. Plus généralement :

$$\left|\sum_{j=1}^{N} z_j\right| \,\le\, \sum_{j=1}^{N} |z_j| \tag{1.28}$$

Une autre inégalité utile, qu'il n'est pas difficile de démontrer, est[3] :

$$||z_1| - |z_2|| \,\le\, |z_1 + z_2| \tag{1.29}$$

La décomposition $z = x + \mathrm{i}y$ introduit les deux coordonnées cartésiennes du point associé à z (et on parle alors de *représentation cartésienne* de z). On peut aussi introduire les coordonnées polaires[4] du plan, r et θ, auquel cas on obtient l'écriture polaire du nombre complexe z :

$$z \,=\, x + \mathrm{i}y \,=\, r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta \ , \qquad r \,=\, |z|, \qquad \theta \,=\, \arg\, z \ . \tag{1.30}$$

[2] Une autre notation usuelle pour le complexe conjugué z^* est $\bar{z}$.

[3] On utilise le même symbole $|\ldots|$ pour le module d'un complexe et la valeur absolue ordinaire, puisque le premier ne fait que généraliser la seconde au domaine complexe.

[4] $r \ge 0,\ 0 \le \theta < 2\pi$.

La combinaison $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ est remarquable. Toutes ses propriétés algébriques permettent de l'identifier avec une certaine fonction exponentielle, ce qui conduit à la formule d'Euler :

$$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \ . \tag{1.31}$$

En effet, considérons le premier membre de (1.31) comme une certaine fonction $E(\theta)$ et écrivons-la pour $\theta = \theta_1 + \theta_2$; par définition :

$$E(\theta_1 + \theta_2) \;=\; \cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2) \ . \tag{1.32}$$

Calculons maintenant le produit $E(\theta_1)E(\theta_2) = \prod_{p=1}^{2}(\cos\theta_p + \mathrm{i}\sin\theta_p)$. La partie réelle est :

$$\Re[E(\theta_1)E(\theta_2)] = \Re\prod_{p=1}^{2}(\cos\theta_p + \mathrm{i}\sin\theta_p) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 = \cos(\theta_1+\theta_2) = \Re[E(\theta_1+\theta_2)] \ , \tag{1.33}$$

la partie imaginaire est :

$$\Im[E(\theta_1)E(\theta_2)] = \Im\prod_{p=1}^{2}(\cos\theta_p + \mathrm{i}\sin\theta_p) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1 = \sin(\theta_1+\theta_2) = \Im[E(\theta_1+\theta_2)] \ . \tag{1.34}$$

Autrement dit, les deux nombres complexes $E(\theta_1 + \theta_2)$ et $E(\theta_1)\,E(\theta_2)$ sont égaux entre eux :

$$E(\theta_1 + \theta_2) \;=\; E(\theta_1)\,E(\theta_2) \ . \tag{1.35}$$

Il existe une seule fonction satisfaisant cette équation fonctionnelle : c'est la fonction exponentielle. Il en résulte que $E(\theta) = \mathrm{e}^{a\theta}$ où a est une constante que l'on peut trouver de bien des façons, par exemple en regardant le développement en série entière de la fonction exponentielle et en le comparant à celui de la combinaison $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$; on trouve alors sans peine que $a = \mathrm{i}$, d'où la formule d'Euler (1.31). De cette formule découle immédiatement les deux relations :

$$\cos\theta \;=\; \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) \ , \qquad \sin\theta \;=\; \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) \ . \tag{1.36}$$

Le module du premier membre de (1.31) est $\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \;=\; 1$. On retiendra donc :

$$|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}| \;=\; 1 \qquad \forall\,\theta \in \mathbb{R} \ . \tag{1.37}$$

Ceci étant fait, l'expression polaire d'un complexe s'écrit aussi :

$$z \;=\; r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \ . \tag{1.38}$$

r est le module de z, θ est son *argument*. L'égalité de deux nombres complexes $z_p = r_p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_p}$ $(p = 1,\,2)$ s'exprime comme :

$$z_1 \;=\; z_2 \quad\Longleftrightarrow\quad r_1 \;=\; r_2 \quad \text{et} \quad \theta_1 = \theta_2 \tag{1.39}$$

où l'égalité des angles est comme toujours comprise *modulo* 2π, soit plus précisément :

$$\theta_1 = \theta_2 + k\,2\pi \qquad (k \,\in\, \mathbb{Z}) \ . \tag{1.40}$$

Notons que si le module du nombre complexe nul est bien défini ($r = 0$!), en revanche son argument ne l'est pas. Ceci traduit le fait géométrique que l'on peut s'approcher de l'origine en faisant un angle quelconque avec l'axe réel, par exemple. Par ailleurs, on définit parfois la *détermination principale* de l'argument d'un nombre complexe, notée Arg z, comme étant l'argument de z choisi dans l'intervalle $]-\pi,\,+\pi]$:

$$-\pi \,<\, \mathrm{Arg}\ z \,\leq +\pi \ . \tag{1.41}$$

La multiplication (et la division) s'expriment très simplement en représentation polaire :

$$z_1 \;=\; r_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1},\ z_2 \;=\; r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} \quad\Longrightarrow\quad z_1z_2 \;=\; r_1r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2} \;=\; r_1r_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)} \ . \tag{1.42}$$

Autrement dit :

$$|z_1 z_2| \,=\, r_1 r_2 \ , \qquad \arg(z_1 z_2) \,=\, \arg z_1 + \arg\, z_2 \ , \tag{1.43}$$

où toutes les égalités entre arguments s'entendent à 2π près. Ainsi par exemple :

$$z \,=\, r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{z} \,=\, \frac{1}{r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \ . \tag{1.44}$$

De même :

$$z \,=\, r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad \Longleftrightarrow \quad z^* \,=\, r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \ . \tag{1.45}$$

Dans le même ordre d'idées, les puissances d'un même nombre complexe z prennent la forme :

$$z^n \,=\, (r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n \,=\, r^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \,=\, r^n\,(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) \ . \tag{1.46}$$

En prenant $r = 1$ et en remplaçant z au premier membre par $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$, on obtient l'importante formule de Moivre :

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n \,=\, \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta \ . \tag{1.47}$$

Le développement de la puissance $n^{\text{ième}}$ du premier membre par la formule du binôme, et l'identification des parties réelle et imaginaire, constitue un moyen systématique pour exprimer les sin et cos d'un angle multiple.

À l'inverse, la représentation polaire permet d'exprimer simplement les n racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe. Par exemple, soit à trouver les complexes satisfaisant :

$$z^n \,=\, \rho \qquad (\rho \,>\, 0) \ . \tag{1.48}$$

Il s'agit plus précisément dans cet exemple de trouver les racines $n^{\text{èmes}}$ d'un réel positif noté ρ. En représentation polaire, (1.48) s'exprime comme :

$$(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n \,=\, \rho \ . \tag{1.49}$$

En remarquant que l'argument d'un nombre réel positif et égal à 0 (2π), l'identification donne :

$$r^n \,=\, \rho \ , \quad n\theta \,=\, 0\ (2\pi) \quad \Longleftrightarrow \quad r \,=\, \rho^{\frac{1}{n}} \ , \quad \theta \,=\, k\,\frac{2\pi}{n} \qquad (k \,=\, 1,\, 2,\, \ldots,\, n) \ . \tag{1.50}$$

En particulier, les racines $n^{\text{èmes}}$ de 1 sont les n nombres[5] ω_k :

$$\omega_k \,=\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{n}} \qquad (k \,=\, 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1) \ . \tag{1.51}$$

On vérifie sans peine que $\sum_{k=1}^{n} \omega_k = 0$. Leurs points représentatifs sont situés sur le cercle de rayon unité et sont équidistantes les unes des autres. Les racines cubiques de l'unité jouent un rôle important en Électricité et sont souvent notées 1, j et j^2 :

$$\omega_k \,=\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{3}} \qquad \omega_1 \,=\, -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \,\equiv\, j \ , \qquad \omega_2 \,=\, -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} \,\equiv\, j^2 = j^* \ , \qquad \omega_3 \,=\, 1 \ . \tag{1.52}$$

1.2 Fonction d'une variable complexe

1.2.1 Définitions

La notion de fonction est bien connue : c'est une correspondance qui permet, par des opérations algébriques bien définies (une *recette*), de construire un nombre (*image*) à partir d'un nombre (*original*) ; ici, la seule nouveauté par rapport au champ réel est que tous les nombres impliqués sont maintenant *a priori* des nombres complexes. Cette nouveauté est moins banale qu'elle en a l'air : fondamentalement et essentiellement[6], la différence est que

[5] Il est équivalent de prendre $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$.

[6] À deux dimensions, on peut *contourner* un obstacle, ce qui n'est pas possible quand on se déplace sur un fil. On se convaincra peu à peu de l'importance de la notion de *chemin* suivi par continuité (sans "lever du papier la pointe du crayon").

les nombres original et image se déplacent dans un espace à *deux* dimensions (le plan complexe $\mathbb{R}^2$), au lieu d'être confinés dans un domaine de l'axe réel, qui est de dimension 1. Ce degré de liberté supplémentaire est à l'origine des propriétés extraordinaires d'une classe de fonctions appelées *fonctions holomorphes*, qui sera définie en temps utile.

Ainsi, une fonction f de la variable complexe z est une opération (ou une suite d'opérations) qui, au nombre z dans un certain ensemble $\mathcal{D}$ inclus dans le plan, associe un certain nombre complexe noté $f(z)$:

$$\forall\, z \in \mathcal{D} \quad \longrightarrow \quad f(z) \in \mathbb{C} \ . \tag{1.53}$$

$\mathcal{D}$ est appelé l'ensemble de définition de la fonction f : c'est l'ensemble des points où l'on sait effectuer les opérations permettant de calculer $f(z)$. Le cas le plus important est celui où $\mathcal{D}$ est un *domaine*[7] du plan complexe. On ne considérera que des domaines dont la frontière est une suite finie d'arcs de courbes continûment différentiables par morceaux.

Quelques exemples de fonctions :

- $z \quad \longrightarrow \quad f(z) \;=\; z^*$ est la fonction qui à chaque nombre complexe lui associe son complexe conjugué
- $z \quad \longrightarrow \quad f(z) \;=\; |z|$ est la fonction qui à chaque nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ lui associe son module $\sqrt{x^2 + y^2}$
- $z \quad \longrightarrow \quad f(z) \;=\; z^{-1}$ est la fonction qui à $z = x + \mathrm{i}y$ associe le nombre :
$$\frac{1}{x + \mathrm{i}y} \;=\; \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} \ . \tag{1.54}$$
- $z \quad \longrightarrow \quad f(z) \;=\; \sin z$ est la fonction qui à $z = x + \mathrm{i}y$ associe le nombre :
$$\sin z \;=\; \frac{1}{2\mathrm{i}}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)}] \;=\; \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{y}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}) \;=\; \sin x \cosh y + \mathrm{i} \sinh y \cos x \ ; \tag{1.55}$$
quand $z \in \mathbb{R}$, on retrouve la définition élémentaire du sinus trigonométrique "ordinaire". Par ailleurs, la dernière forme à droite montre que :
$$\sin(x + \mathrm{i}y) \;=\; \sin x \cosh y + \mathrm{i} \sinh y \cos x \tag{1.56}$$
qui n'est autre que la généralisation aux complexes de la formule $\sin(a + b) = \sin a\, \cos b + \sin b \cos a$ (en remarquant que $\sin(\mathrm{i}a) = \mathrm{i} \sinh x$ et $\cos(\mathrm{i}b) = \cosh b$).

Clairement, la donnée d'une fonction $f(z)$ est équivalente à la donnée de deux fonctions à valeurs réelles $u(x,\, y)$ et $v(x,\, y)$ telles que :

$$\forall\, z \in \mathcal{D} \ , \quad f(z) \;=\; u(x,\, y) + \mathrm{i}v(x,\, y) \ . \tag{1.57}$$

On ne peut évidemment pas tracer le graphe d'une fonction à valeurs complexes d'une variable complexe, comme on trace celui d'une fonction réelle d'une variable réelle : il faudrait faire des dessins dans l'espace à quatre dimensions (2 pour les deux coordonnées x et y, 2 pour les deux valeurs $u(x,\, y)$ et $v(x,\, y)$. En revanche, on peut tracer des lignes dans le plan relatives à certains attributs de $f(z)$. Par exemple, les lignes iso-module sont celles où $|f(z)|$ prend une valeur constante donnée. Les lignes iso-$\Re$ et iso-$\Im$ sont les courbes où les parties réelle et imaginaire sont constantes ; leurs équations cartésiennes sont respectivement :

$$u(x,\, y) \;=\; \mathrm{C}^{\mathrm{ste}} \ , \qquad v(x,\, y) \;=\; \mathrm{C}^{\mathrm{ste}} \tag{1.58}$$

[7] On dit qu'un ensemble $\mathcal{D}$ est un domaine si :

1. chaque point est le centre d'un cercle (suffisamment petit) tout entier contenu dans $\mathcal{D}$, autrement dit, tout point de $\mathcal{D}$ a des voisinages appartenant à $\mathcal{D}$
2. deux points quelconques de $\mathcal{D}$ peuvent être reliés par une ligne (pas forcément à tangente continue) tout entière contenue dans $\mathcal{D}$ (connexité).

Par exemple, l'ensemble des points de coordonnées irrationnelles n'est pas un domaine.

On peut se faire encore une représentation mentale de f en imaginant les surfaces obtenues en portant verticalement au-dessus du plan xOy les valeurs (algébriques) des parties réelle et imaginaire. Les surfaces correspondantes Σ_u et Σ_v ont pour équations cartésiennes :

$$z = u(x, y) \ , \qquad z = v(x, y) \tag{1.59}$$

Les lignes iso-$\Re$ et iso-$\Im$ sont les intersections de ces surfaces par des plans parallèles au plan xOy.

On peut enfin tracer les images dans le plan par f de courbes remarquables décrites par la variable z, judicieusement choisies pour une raison ou une autre.

1.2.2 Limite d'une fonction $f(z)$

Sur l'axe réel, la notion de limite d'une fonction à valeurs réelles est bien connue. On dit qu'une fonction $f(x)$ a une limite en x_0 ssi il existe un nombre f_0 tel que :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0, \forall\, |x - x_0| < \delta,\ |f(x) - f_0| < \varepsilon \tag{1.60}$$

et on écrit :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f_0 \ . \tag{1.61}$$

Une fonction est dite *continue* si $f_0 = f(x_0)$, et alors :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (f \text{ continue en } x_0) \ ; \tag{1.62}$$

cette écriture n'a évidemment de sens que dans la mesure où la quantité $f(x_0)$ est définie. Pour une fonction discontinue en un point d'abscisse x_0, la limite n'existe pas, mais on peut définir une limite à gauche et une limite à droite. La limite n'existe pas au sens définie par (1.60) puisque la quantité $f(x)$ ne prend pas la même valeur selon que l'on arrive d'un côté ou de l'autre. Soit par exemple, la fonction-échelon-unité[8] $Y(x)$ définie comme :

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \forall x < 0 \\ 1 & \forall x > 0 \end{cases} \tag{1.63}$$

Avec cette définition, la quantité $Y(0)$ *n'existe pas*, de sorte que $Y(x)$ n'a pas de limite en $x = 0$, mais rien n'interdit de parler de limite à gauche et de limite à droite, les deux étant distinctes (elles valent respectivement 0 et 1).

Pour une fonction d'une variable complexe, la liberté de mouvement est encore plus grande puisque, dans le plan, on peut s'approcher d'un point donné z_0 d'une *infinité* de façons. En généralisant immédiatement, on définit d'abord la limite d'une fonction $f(z)$ en un complexe z_0 comme :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall |z - z_0| < \delta,\ |f(z) - f_0| < \varepsilon \tag{1.64}$$

et on écrit :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f_0 \ . \tag{1.65}$$

De la même façon que dans le cas réel, on dit qu'une fonction $f(z)$ est *continue* si $f_0 = f(z_0)$, et alors :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \qquad (f \text{ continue en } z_0) \ ; \tag{1.66}$$

Il importe de bien saisir tout le contenu de cette définition, laquelle contient la nécessité de savoir calculer $f(z_0)$, c'est-à-dire que z_0 est un point où la recette de calcul définissant f est sans ambiguïté et conduit de ce fait à un nombre et un seul, noté $f(z_0)$ – une fois que l'on est arrivé en z_0, on ne sait plus comment on y est arrivé, ou encore : $f(z_0)$ ne porte aucune trace du chemin parcouru. En d'autres termes, la limite n'existe que dans la mesure où *tous* les chemins suivis pour arriver en $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ donnent un seul et même nombre. Clairement,

[8] aussi appelée fonction de Heaviside.

cette définition est bien la généralisation de la notion de limite d'une fonction réelle continue, qui n'existe que si on obtient le même nombre selon que l'on arrive d'un côté ou de l'autre du point x_0.

La condition d'existence de la limite s'exprime de façon équivalente avec les parties réelle $u(x,\, y)$ et imaginaire $v(x,\, y)$ de la fonction $f(z)$; la limite de $f(z)$ en z_0 existe si et seulement si les deux limites suivantes existent :

$$\lim_{x\to x_0,\, y\to y_0} u(x,\, y) \;=\; u_0 \;, \qquad \lim_{x\to x_0,\, y\to y_0} v(x,\, y) \;=\; v_0 \;, \tag{1.67}$$

où les deux limites $x \to x_0$, $y \to y_0$ sont prises *indépendamment* l'une de l'autre. Dire que f est continue en z_0, c'est dire que $u_0 = u(x_0,\, y_0)$ et $v_0 = v(x_0,\, y_0)$.

L'indépendance par rapport au chemin suivi du nombre obtenu quand on arrive en z_0 est d'une importance capitale. Il est facile de construire des cas où le chemin d'accès détermine la valeur finale obtenue par passage à la limite ; soit par exemple la fonction :

$$z \quad\longrightarrow\quad f(z) \;=\; \frac{z}{z^*} \tag{1.68}$$

et posons-nous la question de l'existence d'une limite en $z_0 = 0$. On voit géométriquement tout de suite que si l'on se dirige vers l'origine en restant sur l'axe réel, le nombre obtenu à la limite est 1, alors que si on reste confiné sur l'axe imaginaire, le nombre final est -1. Plus généralement, avec $z \;=\; r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, on a $f(z) \;=\; \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$, de sorte que si l'on arrive en O en suivant une ligne faisant l'angle θ_{c} avec l'axe réel, le résultat final en $z_0 = 0$ est $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta_{\mathrm{c}}}$. Ainsi, la fonction définie en (1.68) n'a pas de limite en $z = 0$, bien que pour chaque chemin différentiable à l'origine on sache calculer par un processus de limite une valeur finale pour la fonction.

Une fonction est dite *continue en* z_0 si elle est définie en tout voisinage de z_0 *et* si sa limite existe. La fonction (1.68) est bien définie dans tout voisinage de l'origine (on sait la calculer), mais n'est pas continue en $z_0 = 0$ puisque *sa* limite n'existe pas (il y a une infinité de valeurs limites).

1.2.3 Dérivée d'une fonction $f(z)$. Conditions de Cauchy

On définit la dérivée f' d'une fonction f au point z_0 comme la limite :

$$f'(z_0) \;=\; \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \;, \tag{1.69}$$

Compte tenu de la définition de la limite, le résultat est indépendant du chemin suivi pour aller de z en z_0. Une fonction ayant cette propriété en z_0 est dite *dérivable en* z_0.

Une fonction dérivable en tout point d'un domaine $\mathcal{D}$ est dite[9] *holomorphe* dans ce domaine. La somme et le produit de deux fonctions holomorphes est une fonction holomorphe ; il en va de même pour le rapport $f(z)/g(z)$ partout où $g(z) \neq 0$. On appelle fonction *entière* toute fonction qui est holomorphe pour tout z de module fini (*i. e.* dont le point représentatif est situé à distance finie de l'origine).

Les conditions de dérivabilité s'expriment par le théorème suivant, appelé conditions de Cauchy[10]. Soit $f(z) \;=\; u(x,\, y) + \mathrm{i}v(x,\, y)$, où les fonctions u et v sont différentiables en z_0 ; alors la condition nécessaire et suffisante pour que f soit dérivable en z_0 est que les égalités suivantes soient vérifiées :

$$\exists\; f'(z_0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_0,\, y_0} = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{x_0,\, y_0} \;\text{et}\; \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x_0,\, y_0} = -\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x_0,\, y_0} \;. \tag{1.70}$$

Montrons d'abord que si la limite (1.69) existe, alors les conditions de Cauchy sont satisfaites. Supposons que la limite existe et prenons d'abord le cas où z tend vers z_0 suivant un chemin parallèle à l'axe réel ; dans

[9]holomorphe signifie *même forme*. L'origine de la terminologie tient à ceci : on verra qu'une fonction holomorphe, qui est une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, préserve les angles et définit de ce fait ce que l'on appelle une *transformation conforme*. Les tranformations conformes seront étudiées en détail dans la suite du cours.

[10]parfois aussi appelées conditions de Cauchy - Riemann.

ces conditions, $z - z_0 = h$ où $h \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f'(z_0) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h,\, y_0) - u(x_0,\, y_0)}{h} + \mathrm{i}\,\frac{v(x_0+h,\, y_0) - v(x_0,\, y_0)}{h} \;=\; \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_0,\, y_0} + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x_0,\, y_0} \quad . \tag{1.71}$$

Prenons maintenant le cas où z tend vers z_0 suivant un chemin parallèle à l'axe imaginaire, soit $z - z_0 = \mathrm{i}k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Alors :

$$f'(z_0) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0,\, y_0+k) - u(x_0,\, y_0)}{\mathrm{i}k} + \mathrm{i}\,\frac{v(x_0,\, y_0+k) - v(x_0,\, y_0)}{\mathrm{i}k} \;=\; -\mathrm{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x_0,\, y_0} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{x_0,\, y_0} \quad . \tag{1.72}$$

En rapprochant (1.71) et (1.72), on obtient les conditions (1.70). D'où :

$$\exists\; f'(z_0) \quad \Longrightarrow \quad (1.70) \ . \tag{1.73}$$

Inversement, montrons que si les conditions de Cauchy sont satisfaites, alors la limite $f'(z_0)$ existe. Les deux fonctions u et v étant différentiables, on a :

$$u(x_0+h,\, y_0+k) - u(x_0,\, y_0) \;=\; h\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_0,\, y_0} + k\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x_0,\, y_0} + \alpha|\xi| \ , \tag{1.74}$$

$$v(x_0+h,\, y_0+k) - v(x_0,\, y_0) \;=\; h\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x_0,\, y_0} + k\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{x_0,\, y_0} + \beta|\xi| \ , \tag{1.75}$$

où $z - z_0 \equiv \xi = h + \mathrm{i}k$ et où α et β tendent vers zéro quand $|\xi| \to 0$. Il en résulte :

$$f(z_0+\xi) - f(z_0) \;=\; \left[h\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_0,\, y_0} + k\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x_0,\, y_0}\right] + \mathrm{i}\left[h\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x_0,\, y_0} + k\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{x_0,\, y_0}\right] + (\alpha + \mathrm{i}\beta)|\xi| \ . \tag{1.76}$$

D'après les conditions de Cauchy, ceci s'écrit aussi :

$$f(z_0+\xi) - f(z_0) \;=\; \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x_0,\, y_0} + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{x_0,\, y_0}\right](h + \mathrm{i}k) + \gamma|\xi| \;\equiv\; A\xi + \gamma|\xi| \ . \tag{1.77}$$

A est un nombre bien défini, $|\xi|/\xi$ est de module 1 (donc borné), cependant que $\gamma \to 0$ si $\xi \to 0$. On en conclut que, dans cette limite, le rapport $[f(z_0+\xi) - f(z_0)]/\xi$ a une valeur bien définie, égale à A. D'où :

$$(1.70) \quad \Longrightarrow \quad \exists\; f'(z_0) \ , \tag{1.78}$$

ce qui achève la démonstration de l'équivalence apparaissant dans (1.70).

Une autre démonstration procède comme suit. Lorsque z varie de $\delta z = \delta x + \mathrm{i}\delta y$, le taux de variation de f est $\delta f/\delta z$, soit :

$$\frac{\delta f}{\delta z} = \frac{\delta u + \mathrm{i}\delta v}{\delta x + \mathrm{i}\delta y} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\delta y\right)}{\delta x + \mathrm{i}\delta y} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta y}{\delta x + \mathrm{i}\delta y} \quad . \tag{1.79}$$

Après division par δx, dans la limite $\delta z \to 0$ il vient :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{1 + \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} \quad . \tag{1.80}$$

On veut que la fraction au second membre soit indépendante du rapport $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$. Pour que la fonction $\Phi(X) = (a + bX)/(c + dX)$ soit constante (indépendante de X), il faut $a/c = b/d$, d'où les conditions assurant que la limite $\mathrm{d}f/\mathrm{d}z$ existe :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{i}}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad . \tag{1.81}$$

En séparant les parties réelles et imaginaires, on retrouve bien les conditions de Cauchy.

Remarques

1. Les conditions de Cauchy ont une interprétation géométrique simple : les lignes $\Re f(z) = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}$ et les lignes $\Im f(z) = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}$ sont orthogonales les unes aux autres.

   Avant de montrer ceci, rappelons un résultat de géométrie différentielle. Soit $\phi(x, y)$ une fonction $\mathbb{R}^2$-différentiable. La relation $\phi(x, y) = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}$ définit une courbe Γ dans le plan : quand x varie, y ne varie pas n'importe comment mais précisément de telle sorte que la fonction ϕ reste constante. La différentielle de ϕ, pour des variations infinitésimales *quelconques* de x et y est :

$$\mathrm{d}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathrm{d}y \ . \tag{1.82}$$

   Maintenant, si on veut que quand x varie de $\mathrm{d}x$, la valeur de la fonction ϕ ne change pas, il faut que $\mathrm{d}y$ ne soit pas n'importe quoi mais tel que la variation $\mathrm{d}\phi$ soit nulle. Autrement dit, pour rester sur la courbe alors que x et y ont un peu varié, il faut que les accroissements $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ soient tels que :

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathrm{d}y \qquad \text{le long de } \Gamma \ . \tag{1.83}$$

   Cette condition fixe le rapport $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$, qui donne la pente de la tangente à Γ :

$$\text{pente de la tangente de } \Gamma = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial y}} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\frac{\partial \phi}{\partial y}} = \frac{\mathrm{d}y}{-\frac{\partial \phi}{\partial x}} \ . \tag{1.84}$$

   Autrement dit, $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ et $-\frac{\partial \phi}{\partial x}$ sont les coefficients directeurs de la tangente à la courbe d'équation $\phi(x, y) = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}$; cette tangente est donc la droite parallèle au vecteur $\vec{t}$ de composantes :

$$\vec{t} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}, -\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) \ . \tag{1.85}$$

   Maintenant, le gradient de ϕ est un vecteur du plan de composantes :

$$\vec{\nabla}\,\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}\right) \ . \tag{1.86}$$

   La comparaison de (1.85) et (1.86) montre que les deux vecteurs $\vec{t}$ et $\vec{\nabla}\phi$ sont orthogonaux puisque leur produit scalaire est nul :

$$\vec{t}.\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial y} + (-\frac{\partial \phi}{\partial x})\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \ . \tag{1.87}$$

   En d'autres termes, le vecteur $\vec{\nabla}\phi$ définit les lignes orthogonales à la courbe $\phi(x, y) = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}$.

   Montrons maintenant que les lignes $\Re f(z) = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}$ et $\Im f(z) = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}$ sont mutuellement orthogonales. Le vecteur tangent $\vec{t_u}$ aux lignes $\Re f(z) \equiv u(x, y) = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}$ a pour composantes :

$$\vec{t_u} = \left(\frac{\partial u}{\partial y}, -\frac{\partial u}{\partial x}\right) \ . \tag{1.88}$$

   La normale aux lignes $\Im f(z) \equiv v(x, y) = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}$ est le gradient de v, de composantes :

$$\vec{\nabla}\,v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) \ . \tag{1.89}$$

   D'après les conditions de Cauchy, on a aussi :

$$\vec{\nabla}\,v = \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \ . \tag{1.90}$$

   La comparaison de (1.88) et de (1.90) montre que $\vec{t_u} = -\vec{\nabla}\,v$: le vecteur $\vec{t_u}$ est parallèle au vecteur normal des lignes $\Im f(z) \equiv v(x, y) = \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}$, les lignes iso-$\Re f$ sont bien orthogonales aux lignes iso-$\Im f$.

Par exemple soit $z \to f(z) = z^2$. On a $u(x, y) = x^2 - y^2$ et $v(x, y) = 2xy$. Les iso-$\Re$ ont pour équation cartésienne $x^2 - y^2 = C$: ce sont des hyperboles équilatères, dont les asymptotes sont les deux bissectrices du repère xOy ; les iso-$\Im$ sont définies par $2xy = C'$ et sont à nouveau de hyperboles équilatères, mais leurs asymptotes sont les deux axes de coordonnées. Ces deux familles de courbes sont bien mutuellement orthogonales

2. Quand on utilise la représentation polaire de $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $f(z)$ a pour parties réelle et imaginaire deux fonctions $U(r, \theta)$ et $V(r, \theta)$ telles que :

$$U(r, \theta) = u(x, y) \ , \qquad V(r, \theta) = v(x, y) \tag{1.91}$$

avec les relations de passage $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \mathrm{Arctg}\theta \quad \Longleftrightarrow \quad x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, d'où résulte :

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta \ , \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta \ , \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r} \ , \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r} \ . \tag{1.92}$$

On a alors :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} \ , \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r} \ , \tag{1.93}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r} \ , \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} \ . \tag{1.94}$$

En reportant dans les deux conditions de Cauchy, on obtient le système de deux équations :

$$\frac{\partial U}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} = \frac{\partial V}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r} \ , \tag{1.95}$$

$$\frac{\partial U}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial V}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} \ . \tag{1.96}$$

En formant les bonnes combinaisons linéaires, on trouve que les relations de Cauchy prennent la forme :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_{r_0,\,\theta_0} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{r_0,\,\theta_0} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)_{r_0,\,\theta_0} = -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r_0,\,\theta_0} \ . \tag{1.97}$$

3. Compte tenu des conditions de Cauchy, la dérivée f' en un point quelconque peut s'écrire de quatre façons différentes (partir par exemple de (1.71)) :

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} \ . \tag{1.98}$$

4. À ce stade, on peut déjà remarquer qu'une fonction analytique possède des dérivées de tous les ordres (ce qui sera repris au chapitre 2). En effet, la dérivée f' satisfait elle-même les conditions de Cauchy, ce que l'on peut voir comme suit. D'après (1.98), on a :

$$f'(z) = u^{(1)}(x, y) + \mathrm{i}v^{(1)}(x, y) \quad \text{avec} \quad u^{(1)}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \ , \quad v^{(1)}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x} \ . \tag{1.99}$$

La première condition de Cauchy pour f' s'exprime comme :

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} \overset{?}{=} \frac{\partial v^{(1)}}{\partial y} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} \overset{?}{=} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.100}$$

En échangeant l'ordre des dérivations ci-dessus à droite, on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} \overset{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{1.101}$$

Or cette dernière égalité est bien vraie, puisque f satisfait les conditions de Cauchy. On démontre de même que la deuxième condition de Cauchy est aussi satisfaite, ce qui établit que si f est analytique, il en va de même de sa dérivée. En recommençant avec f', on montre que f'' existe et est analytique, et ainsi de suite. Ainsi est établi un résultat assez extraordinaire : dès qu'elle est holomorphe, une fonction est *infiniment* dérivable.

5. Si dans un domaine $\mathcal{D}$ une fonction $f(z)$ a une partie réelle constante, ou une partie imaginaire constante, ou un module constant, alors cette fonction est constante. En effet, supposons que $u(x, y)$ est une fonction constante, auquel cas $\partial u/\partial x = \partial u/\partial y = 0$. Des conditions de Cauchy (1.70) il résulte immédiatement $\partial v/\partial y = \partial v/\partial x = 0$. Si le module de $f(z)$ est constant et égal à $M \neq 0$, alors[11] $\ln f(z)$, qui est analytique puisque $M \neq 0$, est égale à $\ln M + \mathrm{i} \arg f(z)$, dont la partie réelle est constante, donc $\ln f(z)$ est une constante, ainsi que $f(z)$ (dans le cas où $M = 0$ dans $\mathcal{D}$, c'est que f est la fonction nulle dans ce domaine : elle est bien constante !).

6. Définissons la fonction $\tilde{f}$ de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ comme suit :

$$\tilde{f}(x, y) \;=\; f(z = x + \mathrm{i}y) \;=\; u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) \ . \tag{1.102}$$

Il est alors facile de montrer que les conditions de Cauchy s'écrivent comme suit :

$$\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}\right)_{x_0,\, y_0} \;=\; -\mathrm{i}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}\right)_{x_0,\, y_0} \ . \tag{1.103}$$

7. Les conditions de Cauchy assurent qu'une fonction *holomorphe* $f(z)$ est bien une fonction de z seul, pas de z^*. Avec $z = x + \mathrm{i}y$, $z^* = x - \mathrm{i}y$, on a $x = (z + z^*)/2$, $y = (z - z^*)/(2\mathrm{i})$. Étant donné une fonction $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$, définissons les deux fonctions $\tilde{u}(z, z^*)$ et $\tilde{v}(z, z^*)$ par les relations :

$$\tilde{u}(z, z^*) \;=\; u(x, y) \ , \qquad \tilde{v}(z, z^*) \;=\; v(x, y) \ , \tag{1.104}$$

de sorte que la fonction $\tilde{f} = \tilde{u} + \mathrm{i}\tilde{v}$, qui est *a priori* une fonction de z et de z^*, coïncide partout avec la fonction $f(z)$:

$$\tilde{f}(z, z^*) \;=\; f(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \ . \tag{1.105}$$

Maintenant :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \times 1 + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z^*} \times 1 \ , \qquad \frac{\partial v}{\partial y} \;=\; \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \times \mathrm{i} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z^*} \times (-\mathrm{i}) \ . \tag{1.106}$$

La première condition de Cauchy est donc :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z^*} \;=\; \mathrm{i}\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z^*}\right) \ ; \tag{1.107}$$

un calcul analogue donne la deuxième condition de Cauchy sous la forme :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z^*} \;=\; \mathrm{i}\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z^*}\right) \ . \tag{1.108}$$

On en déduit :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \;=\; \mathrm{i}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \ , \qquad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z^*} \;=\; -\mathrm{i}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z^*} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z^*} \;=\; \mathrm{i}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z^*} \ , \tag{1.109}$$

d'où :

$$\frac{\partial}{\partial z^*}\left(\tilde{u} + \mathrm{i}\tilde{v}\right) \;=\; \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z^*} + \mathrm{i.i}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z^*} \;=\; 0 \ , \tag{1.110}$$

soit[12] $\partial \tilde{f}/\partial z^* = 0$, ce qui montre que $\tilde{f}$ ne dépend pas de z^* ; par (1.105), il en va de même de $f(z)$.

8. Par opposition, soit une fonction $f(x, y)$ $\mathbb{R}^2$-différentiable, c'est-à-dire possédant une différentielle dans un certain domaine de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{d}f \;=\; \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y \ . \tag{1.112}$$

[11] On anticipe sur la définition de la fonction logarithme, qui est donnée ci-dessous, sous-section 1.3.3.

[12] En sous-produit de ce calcul, on obtient aussi :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{u} + \mathrm{i}\tilde{v}\right) \;=\; \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} + \mathrm{i.}(-\mathrm{i})\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \;=\; 2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} \;=\; 2\mathrm{i}\,\frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} \ . \tag{1.111}$$

Par ailleurs $z = x + \mathrm{i}y$ et $z^* = x - \mathrm{i}y$ sont aussi $\mathbb{R}^2$-différentiables, avec :

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{d}y \ , \qquad \mathrm{d}z^* = \mathrm{d}x - \mathrm{i}\mathrm{d}y \ , \tag{1.113}$$

d'où l'on déduit :

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\mathrm{d}z + \mathrm{d}z^*) \ , \qquad \mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{d}z - \mathrm{d}z^*) \ . \tag{1.114}$$

En reportant ces expressions dans (1.112) et en factorisant selon $\mathrm{d}z$ et $\mathrm{d}z^*$, il vient :

$$\mathrm{d}f = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}z^* \ . \tag{1.115}$$

Cette expression justifie que l'on introduise deux opérateurs différentiels définis comme :

$$\partial \equiv \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \ , \qquad \partial^* \equiv \frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{1.116}$$

et alors la différentielle (1.115) prend la forme :

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial z^*}\mathrm{d}z^* \equiv (\partial + \partial^*)f \ . \tag{1.117}$$

Sans hypothèse supplémentaire, f est une fonction de z *et* de z^*. Supposons maintenant que f est dérivable en un certain point z_0 ; alors $\mathrm{d}f = f'(z_0)\,\mathrm{d}z$, de sorte que :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{z_0} = f'(z_0) \ , \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial z^*}\right)_{z_0} = 0 \ . \tag{1.118}$$

Il est facile de voir que la deuxième égalité dans (1.118) n'est autre que les conditions de Cauchy. En effet, appelons u et v les parties réelle et imaginaire de f ; alors :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z^*}\right)_{z_0} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)(u + \mathrm{i}v) = 0 \ . \tag{1.119}$$

En développant, on trouve :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)_{z_0} + \mathrm{i}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)_{z_0} = 0 \tag{1.120}$$

qui reproduit bien les conditions de Cauchy. En définitive, il y a équivalence entre les deux propriétés ci-après :

- $\forall z \in \mathcal{D}$, le rapport $h^{-1}[f(z+h) - f(z)]$ a une limite notée[13] $f'(z)$ quand $h \to 0$ et l'application $z \to f'(z)$ est continue
- la fonction f satisfait $\partial^* f = 0$, l'opérateur différentiel ∂^* étant défini en (1.116).

Par exemple, la fonction $f(z) = \Re z = (z + z^*)/2$ n'est pas holomorphe puisque $\partial^* f = 1/2$.

Une fonction satisfaisant (1.118) est par définition une fonction holomorphe : à l'inverse, une fonction g satisfaisant :

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \tag{1.121}$$

est dite *antiholomorphe*. Quand une fonction f satisfait (1.121), ne pas en déduire que f est une fonction constante : la fonction $z \to f(z) = z^*$ est bien antiholomorphe, mais elle n'est pas constante !

9. La dérivée f' étant définie comme pour les fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (limite du rapport des accroissements), toutes les règles de dérivation connues restent valables $((fg)' = f'g + fg', \ldots)$

[13] Aussi notée $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$. Cette notation est exclusivement réservée aux fonctions holomorphes : pour une fonction quelconque mais différentiable, les dérivées partielles sont bien définies (mais leur rapport n'a aucune raison d'être égal à $-\mathrm{i}$), et les notations f' ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}$ n'ont aucun sens.

10. Comme une fonction dérivable en tout point d'un domaine $\mathcal{D}$ est dite *holomorphe* dans ce domaine, toute fonction holomorphe dans $\mathcal{D}$ y satisfait les conditions de Cauchy.

11. Les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe vérifient l'équation de Laplace $\Delta \sharp = 0$. En effet :
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \ , \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \ . \tag{1.122}$$
En vertu de l'égalité des dérivées croisées, il vient :
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta u = 0 \ , \tag{1.123}$$
et de même $\Delta v = 0$. Une fonction f satisfaisant l'équation $\Delta f = 0$ est dite *harmonique*, une propriété possédée séparément par u et v quand $f = u + \mathrm{i}v$ est holomorphe.

La fonction monôme $z \rightarrow z^n$ ($n \in \mathbb{N}$) est holomorphe dans $\mathbb{C}$, et c'est aussi une fonction entière (il en va de même pour tout polynôme). La fonction $z \rightarrow 1/z$ n'est holomorphe que dans $\mathbb{C}^*$; autrement dit, $z \rightarrow 1/z$ n'est pas définie en $z_0 = 0$ mais l'est en tout point aussi proche que l'on veut de l'origine : en pareil cas, on dit que $z_0 = 0$ est un *point singulier*. $z \rightarrow 1/z$ n'est pas une fonction entière.

En revanche, la fonction $z \rightarrow |z|$ n'est pas holomorphe car elle n'est dérivable nulle part. En effet, avec $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\xi = \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$, on a :
$$\frac{f(z+\xi) - f(z)}{\xi} = \frac{|r + \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\theta)}| - r}{\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}} \ ; \tag{1.124}$$
au numérateur, le module se développe comme suit :
$$|r + \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\theta)}| = \Big([r + \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\phi-\theta)}][r + \varepsilon \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\phi-\theta)}]\Big)^{1/2} = \big(r^2 + 2\varepsilon r \cos(\phi - \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\big)^{1/2} \ . \tag{1.125}$$
En sortant $r > 0$ de la racine carrée et en utilisant $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^2)$ ($x \ll 1$), il vient :
$$\big(r^2 + 2\varepsilon r \cos(\phi - \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\big)^{1/2} = r + \varepsilon \cos(\theta - \phi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \ , \tag{1.126}$$
d'où :
$$\frac{f(z+\xi) - f(z)}{\xi} = \frac{\varepsilon \cos(\theta - \phi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)}{\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} \cos(\theta - \phi) + \mathcal{O}(\varepsilon) \ ; \tag{1.127}$$
le nombre obtenu à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dépend donc du chemin suivi pour arriver en z. Il en va de même pour les fonctions $z \rightarrow \Re z$, $z \rightarrow \Im z$. D'une façon plus générale, une fonction $f(z)$ dont toutes les valeurs sont réelles[14] ($f(z) \in \mathbb{R}$) n'est pas dérivable. En effet, ε étant un nombre réel, on a par définition de la dérivée :
$$f'(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(z+\varepsilon) - f(z)}{\varepsilon} \ . \tag{1.128}$$
Par hypothèse, si $f'(z)$ existe, alors c'est un nombre réel (le numérateur et le dénominateur au second membre sont tous deux des quantités réelles). Mais on doit aussi avoir, en prenant par exemple un accroissement imaginaire pur :
$$f'(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(z+\mathrm{i}\varepsilon) - f(z)}{\mathrm{i}\varepsilon} \ . \tag{1.129}$$
Maintenant, la fraction au second membre est imaginaire pure (le numérateur est réel puisque f est à valeurs réelles). Le rapprochement de (1.128) et de (1.129) permet de conclure que ou bien $f'(z) = 0$ (par la règle d'égalité de deux complexes, c'est le seul cas où un nombre réel est égal à un nombre imaginaire pur), ou bien $f'(z)$ n'existe pas. Il vaut la peine de retenir l'idée qu'une fonction est holomorphe parce qu'elle ne s'exprime qu'avec z, pas avec z^*. C'est pourquoi les fonctions $|z| = (zz^*)^{1/2}$, $\Re z = (z + z^*)/2$, $\Im z = (z - z^*)/(2\mathrm{i})$, *etc.* ne sauraient être holomorphes

[14] La conclusion est la même si l'argument de $f(z)$ est le même quel que soit z.

On peut montrer que toute fonction holomorphe est *analytique* et réciproquement[15]. En raison de cette équivalence entre analycité et holomorphie, la terminologie employée dans la littérature peut donner l'impression d'un certain flottement : ainsi, on pourra trouver des ouvrages où une fonction satisfaisant les conditions de Cauchy est dite *par définition* analytique. En tout état de cause, les deux qualificatifs *analytique* et *holomorphe* doivent être considérés comme synonymes[16], bien qu'ils se rattachent à des propriétés différentes : l'holomorphie fait référence aux conditions de Cauchy, alors que le qualificatif analytique affirme l'existence d'un développement en puissances entières positives. La synonymie est justifée par le fait qu'il y a équivalenece (au sens logique du terme) entre holomorphe et analytique.

1.3 Fonctions élémentaires

Il s'agit de montrer comment les fonctions élémentaires de l'analyse réelle, $f(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$, se généralisent sans difficulté au cas où l'argument est un nombre complexe z, et de préciser éventuellement le sens géométrique de l'application $z \to f(z) \equiv Z$. Dans cette section, on pose le cas échéant :

$$z = x + \mathrm{i}y = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \ , \qquad Z = X + \mathrm{i}Y = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \ . \tag{1.130}$$

De surcroît, certains exemples permettront d'introduire la notion essentielle de *fonction multiforme*, qui sera reprise et précisée par la suite.

1.3.1 La fonction puissance entière $z \to Z = z^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ et sa(ses) fonction(s) inverse(s)

On a ici :

$$\rho = r^n \ , \qquad \phi = n\theta \ . \tag{1.131}$$

La transformation géométrique associée à cette fonction est une rotation de $n\theta - \theta = (n-1)\theta$ et une dilatation[17] par le facteur r^{n-1}. Cette fonction est visiblement holomorphe dans tout le plan puisque la limite suivante existe :

$$\lim_{\xi \to 0} \frac{(z+\xi)^n - z^n}{\xi} = \lim_{\xi \to 0} \frac{z^n + nz^{n-1}\xi + \ldots - z^n}{\xi} = nz^{n-1} \tag{1.132}$$

et le résultat est visiblement indépendant du chemin suivi par ξ pour regagner l'origine. C'est un exercice facile de montrer (à l'aide du développement du binôme) que les conditions de Cauchy sont satisfaites : on écrit $(x + \mathrm{i}y)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^{n-p}(\mathrm{i}y)^p$ d'où l'on déduit les parties réelle $u(x,\, y)$ et imaginaire $v(x,\, y)$, sur lesquelles on vérifie ces conditions.

Les images de deux complexes z_1 et z_2 de même module et d'argument différant de $\frac{2\pi}{n}$ sont confondues puisque :

$$(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{n}})^n = \mathrm{e}^{n\mathrm{i}k\frac{2\pi}{n}} = 1 \ . \tag{1.133}$$

Ceci montre que *la* fonction inverse n'est pas définie à ce stade, au sens où il existe plusieurs z_k donnant le même Z. Plus précisément :

$$z = Z^{\frac{1}{n}} \iff r = \rho^{\frac{1}{n}} \ , \quad \theta = \frac{\phi}{n} + k\frac{2\pi}{n} \iff z \in \{z_k = \rho^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\frac{2\pi}{n}}\} \quad (k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1) \ . \tag{1.134}$$

Ainsi, la notation $Z^{\frac{1}{n}}$ ne désigne pas un seul et unique nombre mais n nombres distincts, tous de même module mais dont les arguments sont des multiples entiers de $2\pi/n$: pour cette raison, la fonction $Z^{\frac{1}{n}}$ est dite *multiforme* ; les différentes solutions de la relation inverse constituent les différentes *déterminations* de cette

[15] Une fonction $f(z)$ est dite analytique en z_0 ssi, dans le voisinage de z_0, elle admet un développement en série entière de puissances positives, $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n.(z - z_0)^n$.

[16] De même, le terme *holomorphe* est parfois pris dans une acception un peu spéciale (par exemple Lavrentiev & Chabat), désignant une fonction qui n'a pas de singularité à distance finie, ce que la plupart des auteurs qualifient de fonction *entière*.

[17] C'est de fait une contraction si $r < 1$.

fonction multiforme. Une fonction ne présentant pas cette particularité est parfois dite *uniforme* par opposition, mais ce qualificatif est source de confusion (il aractérise aussi une fonction à valeurs réelles dont la dérivée a un signe constant).

À titre d'exemple précis, traitons le cas $n = 2$, qui permettra d'illustrer explicitement la notion de fonction multiforme à propos de la racine carrée. On a ici, dans les mêmes notations :

$$\rho = r^2 \ , \qquad \phi = 2\theta \ . \tag{1.135}$$

L'argument du point image M (dont l'affixe est Z) varie deux fois plus vite que celle du point original m (associé à z) : quand M fait un tour complet, m ne fait qu'un demi-tour, . Considérons maintenant la fonction inverse $z = Z^{1/2}$ et ses deux déterminations z_k, $k = 0, 1$:

$$z = Z^{\frac{1}{2}} \iff r = \rho^{\frac{1}{2}} \ , \quad \theta = \frac{\phi}{2} + k\frac{2\pi}{2} \iff z_0 = \rho^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}} \ , \qquad z_1 = \rho^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -\rho^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\phi}{2}} \ . \tag{1.136}$$

L'argument du point image m varie deux fois moins vite que celle du point original M. Il en résulte que si M décrit une courbe fermée Γ, deux cas peuvent être considérés :

1. la courbe Γ ne contient pas l'origine en son intérieur. Ceci veut dire que l'argument de Z part d'une certaine valeur ϕ et y revient ; il reprend la même valeur au point de départ $\mathrm{M_i}$ et au point d'arrivée $\mathrm{M_f}$. Il en va de même pour l'argument de z, qui part de $\theta = \frac{1}{2}\phi$ et y revient ; alors, les deux points $\mathrm{m_i}$ et $\mathrm{m_f}$ sont confondus
2. la courbe Γ contient l'origine en son intérieur. Alors l'argument de Z part de ϕ et arrive à $\phi + 2\pi$: ses valeurs diffèrent de 2π entre les points de départ et d'arrivée ; l'argument de z passe ainsi de $\frac{1}{2}\phi$ à $\frac{1}{2}(\phi + 2\pi)$, variant seulement de π : maintenant les deux points $\mathrm{m_i}$ et $\mathrm{m_f}$ sont distincts (leurs arguments différant de π, ces points sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine).

Ainsi, suivant que l'origine est ou non comprise dans la courbe fermée décrite par l'original Z, la courbe décrite par l'image $z \equiv Z^{1/2}$ est ouverte ou fermée, traduisant le fait que ses extrémités sont différentes ou confondues. L'origine apparaît comme un point remarquable pour la fonction $Z^{1/2}$, appelé[18] *point de branchement*.

Soit par exemple la détermination notée z_0 en (1.136) ; si on part d'un point situé sur le demi-axe réel négatif (l'argument de Z vaut alors π), pour lequel $z_0 = \rho^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{+\pi}{2}} = \mathrm{i}\rho^{\frac{1}{2}}$, et qu'on tourne autour de l'origine dans le sens des aiguilles d'une montre pour revenir infiniment près du point de départ mais *en-dessous* du demi-axe réel négatif (où l'argument de Z vaut alors $-\pi$), on a en ce dernier point $z_0 = \rho^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{-\pi}{2}} = -\mathrm{i}\rho^{\frac{1}{2}}$. Ainsi, alors que les deux points originaux sont identiques ($\mathrm{M_i} = \mathrm{M_f}$, d'affixe $-\rho < 0$), les valeurs de la fonction sont distinctes ; en tout point du demi-axe réel négatif, la fonction est discontinue : ce demi-axe est une ligne continue de discontinuités.

Le domaine d'analycité de la détermination z_0 peut ainsi être choisi comme le plan $\mathbb{R}^2$ privé (coupé) du demi-axe réel négatif ; cette ligne est appelée *coupure*, et doit être vue comme un mur infranchissable tant que le caractère holomorphe doit être préservé. Clairement, on pourrait prendre n'importe quelle autre ligne (d'ailleurs pas forcément une demi-droite) issue de l'origine : le choix de la coupure est pure affaire de commodité, seul le[19] point de branchement est défini en soi, en-dehors de toute convention choisie pour le confort des calculs ou du raisonnement géométrique.

La règle absolue pour ne pas se prendre les pieds dans le tapis, c'est-à-dire sauter sans s'en rendre compte d'une détermination à une autre, est de suivre par continuité des *chemins* dans le plan sans jamais "décoller".

[18] L'origine de la terminologie apparaîtra clairement dans la suite.
[19] ou les points de branchement, car il peut en exister plusieurs. Par exemple la fonction $(z^2 + a^2)^{1/2}$, $a \in \mathbb{R}$, a deux points de branchement en $\pm\mathrm{i}a$.

1.3.2 La fonction exponentielle $z \to Z = \mathrm{e}^z$

On a ici :

$$Z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) \ . \tag{1.137}$$

La dérivée est :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{e}^z = \lim_{\xi\to 0}\frac{\mathrm{e}^{z+\xi}-\mathrm{e}^z}{\xi} = \lim_{\xi\to 0}\frac{\mathrm{e}^z\mathrm{e}^\xi-\mathrm{e}^z}{\xi} = \lim_{\xi\to 0}\frac{\mathrm{e}^z(1+\xi+\mathcal{O}(\xi^2))-\mathrm{e}^z}{\xi} = \mathrm{e}^z \ . \tag{1.138}$$

Ainsi, tout comme dans le champ réel, la fonction exponentielle $z \to \mathrm{e}^z \equiv f(z)$ satisfait l'équation différentielle caractéristique :

$$f' = f \ . \tag{1.139}$$

Réciproquement, les seules solutions de cette équation homogène sont de la forme $C\mathrm{e}^z$ où C est une constante arbitraire. Dans un problème de physique bien posé, une information supplémentaire permettra toujours de trouver C ; par exemple, on se donne (ou on connaît par ailleurs) la valeur f_0 de la fonction cherchée en un point donné z_0. Alors la solution est unique et vaut $f_0\mathrm{e}^{z-z_0}$.

Pour mémoire, rappelons que la fonction exponentielle satisfait aussi l'équation fonctionnelle caractéristique[20] :

$$f(z_1+z_2) = f(z_1)\,f(z_2) \quad\Longleftrightarrow\quad f(z) = \mathrm{e}^{\alpha z} \tag{1.140}$$

où α est un nombre quelconque. L'équation n'étant pas linéaire et homogène (le premier est linéaire en f, le second est quadratique), aucune constante multiplicative arbitraire n'apparaît.

L'holomorphie de e^z est établie par le fait que la dérivée existe (voir (1.138)). On peut aussi vérifier à titre d'exercice que les conditions de Cauchy sont satisfaites :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^x\cos y) = \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^x\sin y) \ , \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^x\cos y) = -\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^x\sin y) \ . \tag{1.141}$$

La fonction exponentielle est périodique, de (plus petite) période imaginaire pure égale à $2\mathrm{i}\pi$:

$$\mathrm{e}^{z+2\mathrm{i}n\pi} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^{2\mathrm{i}n\pi} = \mathrm{e}^z \qquad \forall\, n\in\mathbb{Z} \quad\Longleftrightarrow\quad f(z+2\mathrm{i}n\pi) = f(z) \ . \tag{1.142}$$

La fonction e^z permet de généraliser simplement les fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques familières au cas où leur argument est complexe. On *définit*[21] ainsi :

$$\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) \ , \qquad \cos z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) \ . \tag{1.143}$$

Toutes les relations trigonométriques ordinaires se généralisent alors immédiatement par les règles de l'algèbre élémentaire. Par exemple :

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \frac{1}{4\mathrm{i}^2}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}-2-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z}) + \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}+2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z}) = 1 \ . \tag{1.144}$$

On vérifie immédiatement à partir de (1.143) que $\sin z$ et $\cos z$ sont des fonctions 2π-périodiques, comme dans le champ réel :

$$\sin(z+2n\pi) = \sin z \ , \qquad \cos(z+2n\pi) = \cos z \qquad \forall n\in\mathbb{Z} \ . \tag{1.145}$$

De même, on définit :

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = -\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}} = -\mathrm{i}\,\frac{1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z}}{1+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}z}} \ , \qquad \cot z = \frac{1}{\tan z} \ , \tag{1.146}$$

[20] Par *caractéristique*, on entend que $\mathrm{e}^{\alpha z}$ est la seule et unique fonction satisfaisant cette équation.
[21] Il s'agit en réalité d'un prolongement analytique élémentaire et légitime de (1.36).

relations qui montrent que :

$$\tan(z + n\pi) = \tan z \ , \qquad \cot(z + n\pi) = \cot z \qquad \forall n \in \mathbb{Z} \ . \tag{1.147}$$

Quant aux dérivées, elles sont la simple généralisation au champ complexe des relations établies quand l'argument est réel :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) = \cos z \ , \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\cos z = -\sin z \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\tan z = \frac{1}{\cos^2 z} \qquad etc \ , \tag{1.148}$$

Ces relations peuvent aussi se vérifier en prenant à chaque fois la limite $\lim_{\xi \to 0}[f(z+\xi) - f(z)]/\xi$.

On définit aussi les fonctions hyperboliques comme suit :

$$\sinh z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}) \ , \qquad \cosh z = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}) \ , \tag{1.149}$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-2z}}{1 + \mathrm{e}^{-2z}} \ , \qquad \coth z = \frac{1}{\tanh z} \ . \tag{1.150}$$

Ces fonctions sont périodiques, mais leur période est imaginaire pure ; en effet, puisque $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}n\pi} = 1 \, \forall \, n \in \mathbb{Z}$:

$$\sinh(z + 2\mathrm{i}n\pi) = \sinh z \ , \qquad \cosh(z + 2\mathrm{i}n\pi) = \cosh z \qquad (n \in \mathbb{Z}) \ . \tag{1.151}$$

De même, comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi} = (-1)^n \, \forall \, n \in \mathbb{Z}$, $\sinh(z + \mathrm{i}n\pi) = (-1)^n \sinh z$, $\cosh(z + \mathrm{i}n\pi) = (-1)^n \cosh z$ et donc :

$$\tanh(z + \mathrm{i}n\pi) = \tanh z \ , \qquad \coth(z + \mathrm{i}n\pi) = \coth z \qquad (n \in \mathbb{Z}) \ . \tag{1.152}$$

En passant de z à $\mathrm{i}z$, on transite des fonctions circulaires aux fonctions hyperboliques ; en effet :

$$\sin(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}\sinh z \ , \qquad \cos(\mathrm{i}z) = \cosh z \ , \qquad \tan(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}\tanh z \ ; \tag{1.153}$$

en particulier, pour $z = x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\sinh x \ , \qquad \cos(\mathrm{i}x) = \cosh x \ , \qquad \tan(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\tanh x \ . \tag{1.154}$$

Enfin, notons que pour un argument complexe, les bornes élémentaires du genre $|\sin x| < 1$, *etc*, ne sont plus vraies. Par exemple :

$$|\sin z|^2 = \sin z \, (\sin z)^* = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y})(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-y} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{y}) = \frac{1}{2}(\cosh 2y - \cos 2x) \ ; \tag{1.155}$$

Il est bien évident que cette dernière expression peut être aussi grande que l'on veut. Il en résulte qu'une équation du genre $\sin z = a$ ou $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, a des solutions, en fait une infinité, données par $-\mathrm{i}\ln(a \pm \sqrt{a^2-1}) + (2k+\frac{1}{2})\pi$.

1.3.3 La fonction logarithme $z \to Z = \ln z \quad (z \neq 0)$

À un niveau élémentaire, il est possible de définir la fonction logarithme comme la fonction inverse de l'exponentielle :

$$\forall \, X \in \mathbb{R} \ , \quad x = \mathrm{e}^X \in \mathbb{R}_+ \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \, x \in \mathbb{R}_+ \ , \ X = \ln x \in \mathbb{R} \ . \tag{1.156}$$

C'est cette définition que l'on va étendre au champ complexe, en écrivant (gardant la même notation, ln, que pour le logarithme réel) :

$$\forall \, Z \in \mathbb{C} \ , \quad z = \mathrm{e}^Z \in \mathbb{C} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \, z \in \mathbb{C} \ , \ Z = \ln z \in \mathbb{C} \ . \tag{1.157}$$

Ceci étant écrit, on réalise qu'il n'y a pas *une* fonction logarithme complexe, mais une infinité : en effet, tous les Z différant de $k \times 2\mathrm{i}\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) donnent le même z. Autrement dit, $\ln z$ est défini modulo $2\mathrm{i}\pi$, et possède une infinité de déterminations.

Une autre façon de voir ceci consiste à écrire z sous forme polaire et à utiliser la propriété caractéristique du logarithme $\ln(zz') = \ln z + \ln z'$ (qui résulte simplement du fait que l'exponentielle de la somme est le produit des exponentielles). Alors[22] :

$$\ln z \,=\, \ln(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \,=\, \ln r + \ln(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \,=\, \ln r + \mathrm{i}\theta \qquad (r \neq 0) \ . \tag{1.158}$$

Alors, l'infinité des valeurs possibles pour le premier membre saute aux yeux puisque l'angle θ est lui-même défini à 2π près. Ceci admis, $\ln r$ au second membre de (1.158) est considéré comme le logarithme (complexe) du nombre (réel) $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|_{\theta=0}$.

Si on a bien $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+2n\pi)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, en revanche, pour un angle θ donné (12345.6789 radians, par exemple), $\ln[\mathrm{i}(\theta + 2n\pi)] \neq \ln(\mathrm{i}\theta)$: tout comme pour la fonction puissance, il est encore possible de définir la fonction inverse, mais il n'y en a pas qu'une, puisque pour un Z donné, $Z = \mathrm{e}^z$ donne une infinité[23] de valeurs pour z. $\ln z$ fournit ainsi un autre exemple de fonction multiforme.

La considération de courbes fermées décrites par le point représentatif de l'original z, contenant ou non l'origine O, conduit à des conclusions analogues à celles tirées pour la racine carrée (section 1.3.1) : par exemple, si z fait un tour complet dans le sens positif autour de O, la valeur finale du logarithme est augmentée de $2\mathrm{i}\pi$ par rapport à sa valeur de départ, quelle que soit la détermination choisie ; si la courbe laisse l'origine à l'extérieur, le logarithme prend à l'arrivée la même valeur qu'au départ[24]. O est donc le point de branchement de la fonction logarithme, et la coupure nécessaire pour préserver le caractère holomorphe est une ligne partant de l'infini (dans n'importe quelle direction) et arrivant en O.

Un usage fréquent (mais pas systématique), si l'on prend pour arg z sa détermination principale Arg z (voir (1.41)), est de noter Lnz la détermination correspondante de la fonction logarithme :

$$\mathrm{Ln}z \,=\, \mathrm{Ln}|z| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}\, z \qquad (r \neq 0) \ . \tag{1.159}$$

Avec cette définition, $\mathrm{Ln}\, x$ pour $x \in \mathbb{R}_+$ coïncide avec la fonction logarithme définie à un niveau élémentaire, et la coupure est le demi-axe réel négatif. De plus, on note que pour $x < 0$:

$$\mathrm{Ln}(x + \mathrm{i}0) \,=\, \ln|x| + \mathrm{i}\pi \ , \quad \mathrm{Ln}(x - \mathrm{i}0) \,=\, \ln|x| - \mathrm{i}\pi \ , \tag{1.160}$$

ce que l'on peut aussi écrire ($z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $\theta = \pm\mathrm{i}\pi$) :

$$\mathrm{Ln}(z = x + \mathrm{i}0) \,=\, \ln r + \mathrm{i}\pi \ , \quad \mathrm{Ln}(z = x - \mathrm{i}0) \,=\, \ln r - \mathrm{i}\pi \ , \tag{1.161}$$

ainsi, pour deux points situés juste au-dessus ou juste au-dessous de la coupure, la fonction Lnz a un saut ; si sa partie réelle est la même (pour un x négatif donné), sa partie imaginaire vaut $+2\mathrm{i}\pi$ d'un côté, $-2\mathrm{i}\pi$ de l'autre : tout comme pour la fonction $z^{1/2}$, la coupure est une ligne continue du plan où la fonction est discontinue. Ne pas pouvoir franchir cette ligne si l'on veut préserver le caractère holomorphe devient une évidence : la seule façon de faire est de rebrousser chemin.

La dérivée de $\ln z$ se trouve par le procédé habituel, en faisant le rapport des accroissements et en en prenant la limite. Par ailleurs, il est évident que *toutes* les déterminations du logarithme donnent la même différence puisqu'elles ne diffèrent les unes des autres que d'une constante (entier$\times 2\mathrm{i}\pi$) additive[25]. Toutes les déterminations de $\ln z$ ont donc la même dérivée. En raisonnant par exemple avec la détermination définie en (1.159), il vient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{Ln}z \,=\, \lim_{\xi \to 0} \frac{\mathrm{Ln}(z + \xi) - \mathrm{Ln}z}{\xi} \ . \tag{1.162}$$

[22] De toute évidence, $\ln z$ n'est pas défini en $z = 0$, ne serait-ce que parce que $\ln r$ ne l'est pas non plus.

[23] Pour la fonction inverse de $Z = z^n$, il n'y a que n valeurs distinctes pour z.

[24] On note aussi que si z décrit une certaine courbe fermée ne contenant pas l'origine, toutes les déterminations, différant de entier $\times$ $2\mathrm{i}\pi$ les unes des autres, décrivent des courbes translatées de 2π les unes des autres, formant un réseau à une dimension parallèle à l'axe imaginaire.

[25] De la même façon, en Mécanique, toutes les différences d'énergie potentielle entre deux points donnés coïncident, et représentent l'unique quantité douée de sens physique, à savoir le travail de la force qui dérive du potentiel.

Le numérateur a une valeur sans ambiguïté : sa partie imaginaire est la variation de l'argument quand on passe de z au nombre $z+\xi$ infiniment voisin, qui est infiniment petite. On peut donc l'écrire comme le Ln du rapport $\frac{z+\xi}{z}$, d'où :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{Ln}z \,=\, \lim_{\xi\to 0}\frac{\mathrm{Ln}(\frac{z+\xi}{z})}{\xi} \,=\, \lim_{\xi\to 0}\frac{\mathrm{Ln}(1+\frac{\xi}{z})}{\xi} \ . \tag{1.163}$$

En utilisant maintenant $\mathrm{Ln}(1+z) = z + \mathcal{O}(z^2)$, et puisque toutes les déterminations ont la même dérivée, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln z \,=\, \frac{1}{z} \ . \tag{1.164}$$

Si l'on veut de surcroît vérifier les conditions de Cauchy, leur forme polaire (1.97) est recommandée ; par ailleurs, il suffit visiblement de considérer une détermination[26], la détermination principale (1.159) par exemple. On a ici :

$$U(r,\,\theta) \,=\, \ln r \ , \qquad V(r,\,\theta) \,=\, \theta \qquad (-\pi \,<\theta \,\leq\, +\pi) \ , \tag{1.165}$$

de sorte que les conditions s'écrivent (voir (1.97)) :

$$\frac{\partial U}{\partial r} \,=\, \frac{1}{r} \ , \quad \frac{\partial V}{\partial \theta} \,=\, 1 \ , \quad \frac{\partial V}{\partial r} \,=\, 0 \ , \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} \,=\, 0 \ . \tag{1.166}$$

Les conditions de Cauchy sont donc trivialement satisfaites $\forall\ \theta \in]-\pi,\,+\pi[$. En revanche, $\mathrm{Ln}z$ n'est pas une fonction *continue* puisque, comme déjà mentionné, si z est sur le demi-axe réel négatif, alors $\theta = +\pi$, tandis que si z est infiniment proche de ce demi-axe, mais en-dessous, $\theta = -\pi$. La fonction n'est donc analytique que dans le domaine $\theta \in]-\pi,\,+\pi[$, qui est plus petit que le domaine de définition $\theta \in]-\pi,\,+\pi]$. Le même phénomène se produit pour toutes les autres déterminations.

Pour être en mesure de lever toute ambiguïté, il suffit de comprendre que la question *"Combien vaut* $\ln z$ *?"* n'a pas de réponse (unique) tant que l'on n'a pas précisé la branche considérée de la fonction multiforme. En revanche, la question *"Combien vaut* $\ln z$ *pour la branche égale à* $\ln r$ *en* $\theta = 0$ *?"* admet une réponse unique. L'information suppplémentaire permet bien de calculer univoquement $\ln z$. En pratique, pour éviter de raisonner de travers, le plus sûr est sans doute de garder en tête la notion de continuité, en suivant mentalement un chemin du plan allant du point pour lequel l'information supplémentaire est fournie au point où l'on veut calculer la fonction.

1.3.4 La fonction puissance généralisée $z \to Z = z^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{C})$

Soit maintenant à généraliser la fonction puissance au cas où l'exposant n'est plus un entier, mais un nombre complexe quelconque α :

$$Z \,=\, z^\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{C}) \ . \tag{1.167}$$

Prenant le logarithme des deux membres, on a $\ln Z = \alpha \ln z$; prenant maintenant l'exponentielle de cette dernière relation, il vient $Z = \mathrm{e}^{\alpha \ln z}$, égalité qui constitue la définition naturelle de la puissance généralisée :

$$z^\alpha \,\stackrel{\text{déf}}{=}\, \mathrm{e}^{\alpha\ln z} \qquad (\alpha \in \mathbb{C}) \ . \tag{1.168}$$

Cette fonction est visiblement multiforme en général, puisque $\ln z$ l'est et que α est quelconque[27]. Les différentes branches s'expriment explicitement comme ($z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$) :

$$z^\alpha \,=\, \mathrm{e}^{\alpha\ln r + \mathrm{i}\alpha(\theta+2k\pi)} \,=\, \mathrm{e}^{\alpha\ln r+\mathrm{i}\alpha\theta}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha k\pi} \,=\, r^\alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha\theta}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha k\pi} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \ . \tag{1.169}$$

C'est seulement dans le cas où $\alpha \in \mathbb{Z}$ que l'on retrouve une fonction à une seule détermination, puisque le produit αk est alors un entier (et le dernier facteur à droite vaut 1 quel que soit k). Si α est un réel rationnel, $\alpha = \frac{p}{q}$, p et q premiers entre eux, il n'y a que q branches distinctes ; si α est irrationnel, z^α possède une infinité de branches distinctes.

[26] Toutes les déterminations ne diffèrent que par une constante (entier$\times 2\mathrm{i}\pi$) qui disparaît après toute dérivation.

[27] de sorte que les différentes branches du logarithme donnent le facteur $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha k\pi}$, qui ne vaut pas 1 puisque $\alpha \neq$ entier.

Si $\alpha = a + \mathrm{i}b$, alors :

$$z^{a+\mathrm{i}b} \;=\; \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)[\ln r + \mathrm{i}(\theta+2k\pi)]} \;=\; \mathrm{e}^{a\ln r - b(\theta+2k\pi)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}[b\ln r + a(\theta+2k\pi)]} \qquad (k\in\mathbb{Z})\ . \tag{1.170}$$

Par exemple, toujours avec a et b réels :

$$z^a \;=\; \mathrm{e}^{a\ln r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}a(\theta+2k\pi)} \;=\; r^a\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}a(\theta+2k\pi)}\ , \quad z^{\mathrm{i}b} \;=\; \mathrm{e}^{-b(\theta+2k\pi)}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}b\ln r} \qquad (k\in\mathbb{Z})\ . \tag{1.171}$$

Enfin, pour $\alpha = 0$, (1.168) montre que $z^0 = 1$.